



Arbeitsblatt 10

17.12.2024

Heisenbergbild

Auf diesem Übungsblatt betrachten Sie die Zeitentwicklung einer Observable für verschiedene Potentiale mit Hilfe des Heisenbergbildes.

Aufgabe 1: Freies Teilchen im Heisenbergbild

(10 Punkte)

Betrachten Sie ein freies Teilchen der Masse m , d.h. mit dem Hamiltonoperator $\hat{H}_S = \frac{1}{2m}\hat{p}_S^2$. Der Index S bezeichnet hierbei das Schrödingerbild.

- (a) Stellen Sie die Bewegungsgleichung des Ortsoperators $\hat{x}_H(t)$ und des Impulsoperators $\hat{p}_H(t)$ im Heisenbergbild auf und lösen Sie diese mit den Anfangsbedingungen $\hat{x}_H(0) = \hat{x}_S$ und $\hat{p}_H(0) = \hat{p}_S$.
- (b) Stellen Sie $\hat{x}_H(t)$ und $\hat{p}_H(t)$ im Ortsraum dar.
- (c) Drücken Sie die Erwartungswerte des Ort- und des Impulsoperators zum Zeitpunkt t durch die Erwartungswerte zum Zeitpunkt $t = 0$ aus.
- (d) Berechnen Sie die Kommutatoren $[\hat{x}_H(t_2), \hat{x}_H(t_1)]$, $[\hat{p}_H(t_2), \hat{p}_H(t_1)]$ und $[\hat{x}_H(t_2), \hat{p}_H(t_1)]$.

Aufgabe 2: Teilchen im konstanten elektrischen Feld

(10 Punkte)

Gegeben sei ein Teilchen mit Masse m und Ladung q in einem elektrischen Feld der Feldstärke \mathcal{E} . In diesem Fall ist der Hamiltonoperator gegeben durch

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} - q\mathcal{E}\hat{x} \quad (1)$$

- (a) Bestimmen Sie die Heisenberg'schen Bewegungsgleichungen für den Ort $\hat{x}_H(t)$ und den Impuls $\hat{p}_H(t)$ und lösen Sie diese.
- (b) Bestimmen Sie die zugehörigen Mittelwerte $\langle \hat{x}_H(t) \rangle$ und $\langle \hat{p}_H(t) \rangle$ in Abhängigkeit ihrer Anfangswerte. Geben Sie außerdem ihre Varianzen $\Delta \hat{x}_H(t)^2$ und $\Delta \hat{p}_H(t)^2$ an. Betrachten Sie zuletzt das Verhältnis zwischen der Fluktuation des Ortes und seines Mittelwerts $\frac{\Delta \hat{x}_H(t)}{\langle \hat{x}_H(t) \rangle}$ für große Zeiten $t \gg 1$ und interpretieren Sie das Ergebnis.
- (c) Betrachten Sie nun den Anfangszustand mit der Wellenfunktion

$$\Psi(x, t = 0) = C \frac{e^{ik_0x}}{x^2 + a^2} \quad (2)$$

mit der Normierungskonstante $C = \sqrt{\frac{2a^3}{\pi}}$. Es handelt sich hierbei um ein Teilchen am Ort $\langle \hat{x} \rangle = 0$ mit einem Impuls $\langle \hat{p} \rangle = \hbar k_0$, das in beiden Größen eine gewisse Unschärfe besitzt. Bestimmen Sie für diesen Anfangszustand die Varianz von Ort und Impuls für verschiedene Zeiten t .

Aufgabe 3: Eigenschaften von Heisenbergoperatoren (10 Punkte)

In dieser Aufgabe werden einige Eigenschaften des Heisenbergbildes betrachtet.

- (a) Zeigen Sie, dass für einen Hamiltonian der Form $\hat{H} = \hat{p}^2/(2m) + \hat{V}(\hat{x}_H)$ auch in der Quantenmechanik formal die Newtongleichung $m\ddot{\hat{x}}_H = -\partial\hat{V}/\partial\hat{x}_H =: \hat{F}_H$ gilt, mit \hat{x}_H dem Heisenbergbild des Positionsoperators

Betrachten Sie nun einen allgemeinen Operator \hat{O}, \hat{O}_H im Schrödinger- und im Heisenbergbild. Aus dem Klassischen würde man erwarten, dass die Zeitableitung des Quadrats dieses Operators die Form

$$\frac{d\hat{A}(t)^2}{dt} = 2\hat{A}(t)\frac{d\hat{A}(t)}{dt} \quad (3)$$

besitzt. Aufgrund der Nichtkommutativität der Operatoren ist dies jedoch nicht der Fall.

- (b) Zeigen Sie, dass $d(\hat{O}_H)^2/dt = d(\hat{O}^2)_H/dt$ gilt und bestimmen Sie dessen Differentialgleichung. Verglichen mit Gleichung (3), welche Korrekturen treten im quantenmechanischen Fall auf? Wann entspricht diese Gleichung (3)?
- (c) Zeigen Sie, dass für den Ortsoperator

$$\frac{d\hat{x}_H^2}{dt} = 2\hat{x}_H\frac{d\hat{x}_H}{dt} + \frac{\hbar}{m} \mathbb{1} \quad (4)$$

gilt.

- (d) Zeigen Sie, dass für den Operator der kinetischen Energie \hat{T}_H die folgende Gleichung gilt

$$\frac{d\hat{T}_H}{dt} = \frac{\hat{p}_H\hat{F}_H}{m} + \frac{1}{2m}[\hat{F}_H, \hat{p}_H]. \quad (5)$$

Geben Sie die Differentialgleichung des Operators der kinetischen Energie explizit an, für ein harmonisches Potential $\hat{V}(x_H) = m\omega^2\hat{x}_H^2/2$.