TP2: Quantenmechanik
Wintersemester 24/25

Universität Stuttgart

Arbeitsblatt 8 03.12.2024

Einfache Potentiale I

Auf diesem Übungsblatt betrachten wir die Lösung der Schrödinger-Gleichung für einfache eindimensionale Potentiale: vom Potentialtopf über die Potentialstufe zum Delta-Potential.

Aufgabe 1: Unendlich tiefer Potentialtopf in der Impulsdarstellung (10 Punkte)

Ein Teilchen der Masse m befinde sich in einem in einem unendlich tiefen Potentialtopf

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad 0 \leq x \leq a \\ \infty & \text{für} \quad \text{sonst} \end{cases} \tag{1}$$

Die Eigenwerte und Wellenfunktionen im Topf seien gegeben durch

$$\psi_n(x) = \langle x|\psi_n\rangle = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin nKx, \qquad E_n = n^2 \frac{\hbar^2 K^2}{2m} \tag{2}$$

mit $K = \frac{\pi}{a}$ und $n = \mathbb{N}$.

(a) Zeigen Sie, dass die Eigenzustände $|\psi_n\rangle$ im Impulsraum die Darstellung

$$\phi_n(p) = \langle p|\psi_n\rangle = \frac{1}{2\mathrm{i}} \sqrt{\frac{a}{\pi\hbar}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{pa}{2\hbar}} \left[\mathrm{i}^n F(p - n\hbar K) - (-\mathrm{i})^n F(p + n\hbar K)\right] \tag{3}$$

besitzen, wobei

$$F(p) = \operatorname{sinc}\left(\frac{ap}{2\hbar}\right) = \frac{\sin \frac{ap}{2\hbar}}{\frac{ap}{2\hbar}} \tag{4}$$

als die Sinus-Cardinalis-Funktion bezeichnet wird.

(b) Zeigen Sie hiermit, dass der mittlere Impuls $\langle \hat{p} \rangle$ aller Eigenzustände verschwindet. Bestimmen Sie außerdem den Mittelwert des Impulsquadrats $\langle \hat{p}^2 \rangle$.

(c) Sei $P_n(p) = |\phi_n(p)|^2$ die Wahrscheinlichkeitsdichte des Impulses für den Eigenzustand mit der Impulsraumwellenfunktion $\phi_n(p)$. Skizzieren sie nun mit dem Ergebnis aus Teilaufgabe (a) für $n = 1, 2$ und $n \gg 1$ die Wahrscheinlichkeitsdichte. Überlegen Sie sich, wie die klassische Impulsverteilung eines Teilchens mit der selben Energie E_n aussieht und vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit dieser.

Hinweis: Die potentielle Energie im Potentialtopf ist null, also besitzt das klassischen Teilchen nur seine kinetische Energie.

(d) Bestimmen Sie den Mittelwert des Ortsoperators $\langle \hat{x} \rangle = \langle \psi_n | \hat{x} | \psi_n \rangle$ im Eigenzustand $|\psi_n\rangle$ sowie Nebendiagonalmatrixelemente des Ortsoperators $\langle \psi_n | \hat{x} | \psi_{n'} \rangle$ bezüglich der Energiebasis mit Hilfe der Ortsraumdarstellung. Nutzen Sie dieses Ergebnis um den Mittelwert des Ortsoperators für den Superpositionszustand

$$\Psi_{n,n'}(x, t = 0) = \frac{1}{\sqrt{2}}[\psi_n(x) + \psi_{n'}(x)] \tag{5}$$

anzugeben. Interpretieren Sie hiermit die Bedeutung der Nebendiagonalmatrixelemente $\langle \psi_n | \hat{x} | \psi_{n'} \rangle$.

(e) Gegeben sei folgender Anfangszustand $\Psi_{n,n+1}(x, t = 0)$ Bestimmen Sie die Wellenfunktion $\Psi_{n,n+1}(x, t)$ zu einem beliebigen späteren Zeitpunkt und den zeitlichen Mittelwert der Ortskoordinate $\langle x(t) \rangle$ in diesem Zustand.

(f) Vereinfachen Sie den Ausdruck für $\langle x(t) \rangle$ im Grenzfall $(n \gg 1)$ und vergleichen Sie diesen mit der klassischen Bewegung eines Teilchens, dass sich mit der gleichen Periode T wie im Quantenfall im Potentialtopf zwischen den Wänden hin und her bewegt. Inwiefern unterscheidet sich die Quantenbewegung von der klassischen? Überlegen Sie sich eine physikalische Begründung für dieses Verhalten.

Aufgabe 2: Potentialstufe (10 Punkte)

Betrachten Sie ein quantenmechanisches Teilchen, dass von links auf eine Potentialstufe der Form

$$V(x) = \begin{cases} V_0 & \text{für} \quad x \geq 0 \\ 0 & \text{für} \quad x < 0 \end{cases} \tag{6}$$

mit $V_0 > 0$ zuläuft.

(a) Lösen Sie zunächst die Schrödinger-Gleichung. Berücksichtigen Sie dabei, dass nur von links einlaufende Teilchen betrachtet werden. Werten Sie anschließend die Stetigkeitsbedingungen der Wellenfunktion und ihrer Ableitung aus.

(b) Bestimmen Sie aus der Wellenfunktion die Wahrscheinlichkeitsstromdichte $j(x)$ auf beiden Seiten der Potentialstufe.

(c) Berechnen Sie den Reflexions- und den Transmissionskoeffizienten als Funktion von V_0 und der Energie E. Welche beiden Fälle müssen Sie hierbei unterscheiden? Interpretieren Sie ihr Ergebnis physikalisch.

Aufgabe 3: Teilchen in δ-Potentialen (10 Punkte)

Ein Teilchen der Masse m bewege sich in einem eindimensionalen Potential der Form

$$V(x) = -\frac{\hbar^2}{m}\Omega\delta(x), \tag{7}$$

wobei $\delta(x)$ die Dirac-Deltafunktion ist und $\Omega > 0$. In dieser Aufgabe soll betrachtet werden ob es möglich ist ein Teilchen mit diesem Potential zu binden.

(a) Bestimmen Sie alle möglichen gebundenen Energien sowie Eigenfunktionen. Entsprechen die erhaltenen Funktionen gebundenen Zuständen, sind sie also quadratintegrabel?
Hinweis: Wie sieht die zeitunabhängige Differentialgleichung für $x \neq 0$ aus? Bestimmen Sie damit die Wellenfunktionen in diesen Bereichen. Was können Sie über die Differenz $\lim_{\varepsilon\to 0}(\Psi'(\varepsilon) - \Psi'(-\varepsilon))$ mittels der Differentialgleichung sagen? Ist die Wellenfunktion überall differenzierbar? Nutzen Sie die so erhaltene Gleichung um alle möglichen gebundenen Energien zu bestimmen.

(b) Bestimmen Sie den Wert x_0, sodass die Wahrscheinlichkeit dass sich das Teilchen im Intervall $x \leq x_0$ befindet $1/2$ ist.

Betrachten Sie nun ein Potential bestehend aus zwei δ-Peaks

$$V(x) = -\frac{\hbar^2}{m}\Omega(\delta(x-a) + \delta(x+a)),\ \Omega > 0. \tag{8}$$

Ziel ist ebenfalls die Bestimmung der gebundenen Energien und Zustände.

(c) Bestimmen Sie die Wellenfunktionen $\Psi(x)$ für $x \neq \pm a$. Nutzen Sie Symmetrieüberlegungen um $\Psi(x)$ im Intervall $[-a, a]$ zu vereinfachen. Konstruieren Sie daraus eine symmetrische und antisymmetrische Wellenfunktion im gesamten Raum.

(d) Betrachten Sie den Punkt $x = a$ und finden Sie mittels Kontinuitäts- und Diskontinuitätsargumenten der Wellenfunktion eine Gleichung für a, E und Ω. Betrachten Sie beide Seiten dieser Gleichung graphisch und zeigen Sie, dass es je fixem Ω, a genau zwei gebundene Zustände gibt. Welcher Zustand ist der energetisch günstigere?

Betrachten Sie zuletzt das Potential

$$V(x) = -\frac{\hbar^2}{m}\Omega(\delta(x+b) + \delta(x+c)),\ \Omega > 0, \tag{9}$$

mit $b, c > 0, c > b$.

(e) Wie sieht die definierende Gleichung für E und Wellenfunktion Ψ für dieses Potential aus? Wie unterscheidet es sich vom vorherigen?

Moderne Forschung: Gebundene Zustände in einem Potential

a) *Quantum States of Confined Carriers in Very Thin $Al_xGa_{1-x}As - GaAs - Al_xGa_{1-x}$ Heterostructures*
R. Dingle *et al.*
Phys. Rev. Lett. **33**, 827 (1974).
b) *Quantum states of neutrons in the Earth's gravitational field*
V. V. Nesvizhevsky *et al.*
Nature **415**, 297 (2002).