Arbeitsblatt 6 20.11.2024

Besetzte Zustände und Messungen

In diesem Blatt betrachten Sie einfache Anwendungen der Postulate der Quantenmechanik: Eigenwerte und Messergebnisse.

Aufgabe 1: Messung der Drehimpulsoperatoren (9 Punkte)

Der Drehimpuls in der Quantenmechanik wird beschrieben durch die folgenden Operatoren

$$\hat{L}_x = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}, \quad \hat{L}_y = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0 & -i & 0\\ i & 0 & -i\\ 0 & i & 0\end{pmatrix}, \quad \hat{L}_z = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die möglichen Messwerte von $\hat{L}_z$.

(b) Bestimmen Sie den zugehörigen Eigenzustand zum Eigenwert $\hat{L}_z = 1$. Geben Sie $\langle \hat{L}_x \rangle$, $\langle \hat{L}_x^2 \rangle$ und $\Delta \hat{L}_x$ in diesem Zustand an.

(c) Bestimmen Sie die Eigenwerte und normalisierten Eigenvektoren von $\hat{L}_x$ in der $\hat{L}_z$ Basis.

(d) Gehen Sie davon aus, dass sich das Teilchen im Eigenzustand zum Eigenwert $\hat{L}_z = -1$ befindet und nun $\hat{L}_x$ gemessen wird. Was sind die möglichen Messergebnisse und ihre zugehörigen Wahrscheinlichkeiten?

(e) Gehen Sie von folgendem Zustand aus

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix}1/2\\ 1/2\\ 1/\sqrt{2}\end{pmatrix},$$

welcher in der L_z Basis gegeben ist. Wenn L_z^2 in diesem Zustand gemessen wird und Sie das Ergebnis $+1$ erhalten, was ist dann der Zustand des Systems nach der Messung? Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhalten Sie diesen? Wenn Sie stattdessen L_z messen, was sind die Möglichen Messergebnisse und ihre zugehörigen Wahrscheinlichkeiten?

(f) Ein Teilchen befinde sich in einem Zustand, für den folgende Wahrscheinlichkeiten gelten: $P(L_z = 1) = 1/4$, $P(L_z = 0) = 1/2$ und $P(L_z = -1) = 1/4$. Zeigen Sie, dass der allgemeinste normalisierte Zustand mit diesen Eigenschaften gegeben ist durch

$$|\psi\rangle = \frac{e^{i\delta_1}}{2}|L_z = 1\rangle + \frac{e^{i\delta_2}}{\sqrt{2}}|L_z = 0\rangle + \frac{e^{i\delta_3}}{2}|L_z = -1\rangle$$

Aus der Vorlesung ist bekannt, dass zwei Zustände, die sich nur durch eine Phase unterscheiden identisch sind. Bedeutet dies, dass die Faktoren $e^{i\delta_i}$ im obigen Zustand irrelevant sind? Berechnen Sie hierzu z.B. $P(L_x = 0)$.

Aufgabe 2: Messung und Zeitentwicklung eines Zwei-Niveau-Systems (9 Punkte)

Gegeben seien zwei normalisierte Eigenzustände $|\psi_1\rangle$ und $|\psi_2\rangle$ eines Hamiltonians $\hat{H}$ mit zugehörigen Eigenwerten E_1 und E_2.

(a) Zeigen Sie, dass $|\psi_1\rangle$ und $|\psi_2\rangle$ zueinander orthogonal sind.

(b) Gehen Sie vom Zustand $|\psi_-\rangle = [|\psi_1\rangle - |\psi_2\rangle]/\sqrt{2}$ aus. Bestimmen Sie den Erwartungswert der Energie $\langle E\rangle$ und die Dispersion ΔE in diesem Zustand.

(c) Das System befinde sich zum Zeitpunkt $t = 0$ im Zustand $|\psi_-\rangle$. Was ist der Zustand des Systems $|\psi(t)\rangle$ zu einem späteren Zeitpunkt t?

(d) Gehen Sie von einer Observablen $\hat{A}$ mit folgenden Eigenschaften aus

$$\hat{A}|\psi_1\rangle = |\psi_2\rangle, \quad \hat{A}|\psi_2\rangle = |\psi_1\rangle$$

Was sind die Eigenwerte a von $\hat{A}$ im Unterraum, der von $|\psi_1\rangle$ und $|\psi_2\rangle$ aufgespannt wird?

(e) Konstruieren Sie mit $|\psi_1\rangle$ und $|\psi_2\rangle$ die zugehörigen Eigenvektoren von $\hat{A}$.

(f) Das System befinde sich nun zum Zeitpunkt $t = 0$ im Zustand $|\psi_-\rangle$, welcher dem Eigenwert $a = -1$ zugeordnet ist. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit für das Messergebnis $a = -1$ bei einer Messung von A zu einem beliebigen späteren Zeitpunkt t.

Aufgabe 3: Quanten-Zeno-Effekt (9 Punkte)

Gegeben sei ein Quantensystem mit den zwei Energieeigenzuständen $|1\rangle$ und $|2\rangle$ und den zugehörigen Energieeigenwerten E_1 und E_2. Außerdem ist das System über eine physikalische Observable charakterisiert, deren Operator $\mathcal{P}$ wie folgt auf die Energieeigenzustände wirkt:

$$\mathcal{P}|1\rangle = |2\rangle, \quad \mathcal{P}|2\rangle = |1\rangle.$$

Damit kann dieser Operator als eine Art Paritätsoperator betrachtet werden.

(a) Angenommen, das System befindet zu Beginn in einem positiven Paritätseigenzustand $|\Psi(t = 0)\rangle = |+\rangle$. Bestimmen Sie den Zustand des Systems zu einem beliebigen Zeitpunkt t.

(b) Zu einem bestimmten Zeitpunkt t wird eine Paritätsmessung durchgeführt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das System in einem Zustand positiver Parität gefunden wird?

(c) Nehmen Sie an, dass eine Reihe von N Paritätsmessungen zu den Zeitpunkten $\Delta t,\ 2\Delta t,\ \ldots,\ N\Delta t = T$ durchgeführt wird. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das System zum Zeitpunkt T in einem Zustand positiver Parität gefunden wird? Was geschieht für $N \to \infty$? Hinweis: Für $N \gg 1$ gilt $(1 - \frac{x^2}{N^2})^N \approx \exp(-\frac{x^2}{N})$.

(d) Angenommen, die Paritätsmessungen sind nicht instantan, sondern dauern jeweils eine kurze Zeit $\delta\tau$. Wie groß ist die Überlebenswahrscheinlichkeit des Zustands positiver Parität, wenn der oben genannte Messprozess im Zeitintervall T durchgeführt wird?

Moderne Forschung: Experimentelle Beobachtung des Quanten-Zeno-Effekts

a) *Observation of the Quantum Zeno and Anti-Zeno Effects in an Unstable System*
M. C. Fischer *et al.*
Physical Review Letters **87**, 040402 (2001).
b) *Experimental realization of quantum Zeno dynamics*
F. Schäfer *et al.*
Nature Communications **132**, 3194 (2014).