Arbeitsblatt 5 13.11.2024

Mathematischer Formalismus III

Auf diesen Übungsblatt folgen einige weitere Übungen zum mathematischen Formalismus der Quantenmechanik. In den Aufgaben soll der Umgang mit Projektoren in der Dirac-Notation geübt werden.

Aufgabe 1: Transferoperator (10 Punkte)

Wir nennen $|\varphi_n\rangle$ die Eigenzustände eines hermiteschen Operators H (H ist z. B. der Hamiltonian eines beliebigen physikalischen Systems). Wir nehmen an, dass die $|\varphi_n\rangle$ Zustände eine diskrete Orthonormalbasis bilden. Der Operator $U(m,n)$ ist definiert durch:

$$U(m,n) = |\varphi_m\rangle\langle\varphi_n| \,. \tag{1}$$

(a) Berechnen Sie den adjungierten Operator $U^\dagger(m,n)$ zu $U(m,n)$.

(b) Berechnen Sie den Kommutator $[H, U(m,n)]$.

(c) Beweisen Sie die Relation:

$$U(m,n)U^\dagger(p,q) = \delta_{nq} U(m,p). \tag{2}$$

(d) Berechnen Sie die Spur $\mathrm{tr}[U(m,n)]$

(e) Es sei A ein Operator mit Matrixelementen $A_{mn} = \langle\varphi_m| A |\varphi_n\rangle$. Zeigen Sie, dass

$$A = \sum_{m,n} A_{mn} U(m,n). \tag{3}$$

(f) Zeigen Sie, dass $A_{pq} = \mathrm{tr}\left[AU^\dagger(p,q)\right]$.

Aufgabe 2: Eigenräume einfacher Matrizen (10 Punkte)

Auf einem zwei-dimensionalen komplexen Vektorraum sei die Matrixdarstellung eines Operators in der orthonormalen Basis $\{|1\rangle, |2\rangle\}$ gegeben durch

$$\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

(a) Prüfen Sie ob der Operator σ_y hermitesch ist. Berechnen Sie dann die Eigenwerte und normierten Eigenvektoren des Operators σ_y.

(b) Berechnen Sie die Matrizen der Projektoren auf die Eigenräume. Zeigen Sie, dass die Projektoren orthogonal zueinander sind und die Vollständigkeitsrelation erfüllen.

(c) Berechnen Sie die Aufgaben (a) und (b) für die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 2 & i\sqrt{2} \\ -i\sqrt{2} & 3 \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Aufgabe 3: Projektor Relationen (10 Punkte)

Sei K ein Operator definiert durch $K = |\varphi\rangle\langle\psi|$, wobei $|\varphi\rangle$ und $|\psi\rangle$ Zustandsvektoren sind.

(a) Unter welcher Bedingung ist K hermitesch? Berechnen Sie K^2. Unter welcher Bedingung ist K ein Projektor?

(b) Zeigen Sie, unter welcher Voraussetzung K geschrieben werden kann als $K = \lambda P_1 P_2$, wobei $\lambda \in \mathbb{C}$ eine komplexe Zahl ist und P_1, P_2 Projektoren sind.

(c) Sei P_1 ein Projektor auf den Unterraum $\mathcal{V}_1$ und P_2 ein Projektor auf den Unterraum $\mathcal{V}_2$. Zeigen Sie, dass das Produkt $P_1 P_2$ ebenfalls ein Projektor ist genau dann wenn P_1 und P_2 kommutieren. Wie sieht in diesem Fall der Unterraum aus auf den $P_1 P_2$ projiziert?

Moderne Forschung: Ist die Quantenmechanik wirklich komplex?

a) *Ruling Out Real-Valued Standard Formalism of Quantum Theory*
Ming-Cheng Chen *et al.*
Physical Review Letters **128**, 040403 (2022).
b) *Testing Real Quantum Theory in an Optical Quantum Network*
Zheng-Da Li *et al.*
Physical Review Letters **128**, 040402 (2022).