Arbeitsblatt 3 29.10.2024

Mathematischer Formalismus I

Anders als in der klassischen Mechanik, die sich auf Funktionen im Phasenraum beschränken, ist die Quantenmechanik über Hilberträume und linearen Abbildungen (Operatoren) auf diesen definiert. In diesem Blatt berechnen Sie einige Eigenschaften der Hilbertraumelemente sowie der Operatoren.

Aufgabe 1: Braket Schreibweise. (11 Punkte)

Die Bra, Ket Schreibweise (kurz Braket) ist eine nützliche Darstellung der Elemente eines Hilbertraumes $\mathcal{H}$ sowie darauf definierter linearer Abbildungen. Für endliche Hilberträume und Wahl einer Basis ist alternativ die Darstellung mittels symmetrischer und asymmetrischer Matrizen hilfreich.

Gegeben sei ein zweidimensionaler, komplexer Hilbertraum $\mathcal{H}$, der durch die folgende Orthonormalbasis $\{|a_1\rangle, |a_2\rangle\}$, $|a_i\rangle \in \mathbb{C}^2$ und dem dazugehörigen Standardskalarprodukt definiert ist. Das Skalarprodukt wird häufig verkürzt mit Hilfe der Braketnotation geschrieben als $\langle a_i, a_j\rangle = \langle a_i|a_j\rangle$, wobei $|a_j\rangle \in \mathcal{H}$ und $\langle a_i| = \langle a_i, .\rangle \in \mathcal{H}^*$ ein Element des Dualraums von $\mathcal{H}$.
Im Folgenden soll die Braket Notation mit der Matrixnotation verglichen werden.

(a) Zeigen Sie, dass die Vektoren $\{|b_1\rangle, |b_2\rangle\}$ ebenfalls eine Orthonormalbasis bilden.

$$|b_{1/2}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|a_1\rangle \pm \mathrm{i}|a_2\rangle) \tag{1}$$

(b) Bestimmen Sie die Matrixform der Ketvektoren $|a_i\rangle,\ |b_i\rangle$ in der $|a_i\rangle$ Basis, sowie der Bravektoren $\langle a_i|,\ \langle b_i|$. Berechnen Sie die Skalarprodukte $\langle b_i|b_j\rangle$, für $i, j \in \{1, 2\}$ sowohl mittels Braket Notation als auch via Matrixschreibweise.

(c) Bestimmen Sie die Ket-Vektoren $|a_i\rangle$ in der Basis der $|b_i\rangle$ sowohl als Matrixform als auch in Ket-Schreibweise.

Betrachten Sie nun einen allgemeinen Operator $\hat{A}$ auf dem zweidimensionalen Hilbertraum. Ein Operator ist eine lineare Abbildung $\hat{A} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ eines Elementes des Hilbertraumes in ein anderes. In der obigen Matrixschreibweise entspricht ein solcher Operator einer 2×2 Matrix. Im Allgemeinen für die Basis $|a_i\rangle$ kann also geschrieben werden

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}, \tag{2}$$

mit $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}$.

(d) Bestimmen Sie die allgemeine Form des Operators $\hat{A}$ in Braketnotation unter Benutzung der Basisvektoren $|a_i\rangle$. Welche Bedingungen müssen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ erfüllen, damit $\hat{A}$ hermitesch ist? Zeigen Sie, dass der Operator $\mathbb{1} = \sum_i |c_i\rangle\langle c_i|$ der Identitätsabbildung entspricht, wobei $|c_i\rangle$ eine beliebige Basis des Hilbertraumes ist.

(e) Bestimmen Sie den Operator $\hat{A}$ in Abhängigkeit der Basis $|b_i\rangle$ jeweils unter Benutzung der Matrixschreibweise und Braketnotation. In Braketnotation kann die neue Basis durch Multiplikation mit $\mathbb{1}$ erhalten werden, $\hat{A} = \mathbb{1}\hat{A}\mathbb{1} = \sum_{i,j} |b_i\rangle\langle b_i|\hat{A}|b_j\rangle\langle b_j|$.

Aufgabe 2: Differentialrechnung mit Operatoren (8 Punkte)

In Aufgabe 1 wurde der Fokus auf Darstellungen des Hilbertraumes gelegt, insbesondere wurden Operatoren mittels Basen definiert. Operatoren können jedoch auch basisunabhängig betrachtet werden, dies it häufig hilfreich um allgemeine Eigenschaften von Quantensystem zu beschreiben. In dieser Aufgabe werden nun einige Differentialrechnungseigenschaften hergeleitet.
Betrachten Sie stetige Operatoren $\hat{A}(\lambda), \hat{B}(\lambda), \lambda \in \mathbb{R}$, sowie $\hat{C} \neq \hat{C}(\lambda)$. Deren Ableitung am Punkt 0 ist definiert durch

$$\frac{\mathrm{d}\hat{A}}{\mathrm{d}\lambda} := \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\hat{A}(\lambda + \varepsilon) - \hat{A}(\lambda)}{\varepsilon} \tag{3}$$

Die folgenden Identitäten gelten

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}(\hat{A}\hat{B}) &= \frac{\mathrm{d}\hat{A}}{\mathrm{d}\lambda}\hat{B} + \hat{A}\frac{\mathrm{d}\hat{B}}{\mathrm{d}\lambda} \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\hat{A}^{-1} &= -\hat{A}^{-1}\frac{\mathrm{d}\hat{A}}{\mathrm{d}\lambda}\hat{A}^{-1} \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}e^{\lambda\hat{C}} &= \hat{C}e^{\lambda\hat{C}} \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\hat{A}^n &= \sum_{\ell=1}^{n} \hat{A}^{\ell-1}\frac{\mathrm{d}\hat{A}}{\mathrm{d}\lambda}\hat{A}^{n-\ell} \end{aligned} \tag{4}$$

(a) Beweisen Sie obige Identitäten.
Hinweis: es kann hilfreich sein $d/d\lambda\mathbb{1} = d/d\lambda(\hat{A}\hat{A}^{-1})$ zu betrachten.

(b) Berechnen Sie desweiteren die folgenden Ableitungen, wobei sie $\hat{A} \neq \hat{A}(\lambda), \hat{B} \neq \hat{B}(\lambda)$ annehmen können,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\left(e^{\lambda\hat{B}}\hat{A}e^{-\lambda\hat{B}}\right), \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}e^{\lambda\hat{A}}e^{\lambda\hat{B}}. \tag{5}$$

Aufgabe 3: Glauber Identität (11 Punkte)

Die Glauber Identität ist eine sehr nützliche Aussage über die Separierbarkeit der Exponentialfunktion von Operatoren. Seien $\hat{A}$ und $\hat{B}$ zwei Operatoren, die mit ihrem Kommutator kommutieren

$$\left[\hat{A}, \hat{B}\right] = \hat{C}, \quad \left[\hat{A}, \hat{C}\right] = 0, \quad \left[\hat{B}, \hat{C}\right] = 0$$

Dann gilt für diese die Glauber Identität

$$e^{\hat{A}+\hat{B}} = e^{\hat{A}} e^{\hat{B}} e^{-\frac{1}{2}\left[\hat{A}, \hat{B}\right]}$$

Wir wollen diese nun Schritt für Schritt beweisen.

(a) Wir definieren dazu einen Operator

$$\hat{F}(z) = e^{z\hat{A}} e^{z\hat{B}}$$

Geben Sie die zugehörige Differentialgleichungen an, die von $\hat{F}(z)$ erfüllt wird indem Sie seine erste Ableitung bilden $\hat{F}'(z) = \frac{d}{dz}\hat{F}(z)$

(b) Ermitteln Sie den Kommutator $\left[\hat{B}, \hat{A}^n\right]$ und nutzen Sie dieses Ergebniss um den Kommutator $\left[\hat{B}, e^{-z\hat{A}}\right]$ und schließlich $e^{z\hat{A}}\hat{B}e^{-z\hat{A}}$ zu bestimmen.

(c) Nutzen Sie die Ergebnisse aus Teilaufgabe (a) und (b) um die alternative Form der Differentialgleichung, gegeben durch,

$$\hat{F}'(z) = \left(\hat{A} + \hat{B} + \hat{C}z\right)\hat{F}(z)$$

herzuleiten. Bestimmen Sie anschließend die Lösung dieser Differentialgleichung.
Hinweis: Wie verhalten sich Operatoren, die miteinander kommutieren?

(d) Vergleichen Sie dieses Ergebniss mit der ursprünglichen Definition von $\hat{F}(z)$ und zeigen Sie damit die Glauber-Identität. Welche Operatoren kennen Sie bereits, welche diese Identität erfüllen?

(e) Gehen Sie davon aus, dass ein Operator $\hat{A}$ und seine Ableitung $\frac{d\hat{A}(t)}{dt}$ die Glauber-Identität erfüllen und nutzen Sie dies um einen allgemeinen Ausdrück für die Ableitung seiner Exponentialfunktion $\frac{d}{dt}e^{\hat{A}(t)}$ zu finden.

(f) Wenden Sie das Ergebnis aus Teilaufgabe (e) auf einen Operator $\hat{A}(t)$ der Form

$$\hat{A}(t) = f(t)\hat{p} + g(t)\hat{q}, \text{ mit } \quad [\hat{q}, \hat{p}] = i\hbar\mathbb{1}$$

an. Wobei $f(t)$ und $g(t)$ zwei beliebige analytische Funktionen von Zahlen sind.

Moderne Forschung: Wellen-Teilchen Dualismus

(a) *Demonstration of single electron buildup of an interference pattern*
A. Tonomura, J. Endo, T. Matsuda, T. Kawasaki, and H. Ezawa,
American Journal of Physics **57**, 117 (1989)
(b) *The wave-particle duality of light: A demonstration experiment*
T. L. Dimitrova and A. Weis
American Journal of Physics **76**, 137 (2008)