Arbeitsblatt 11

28/29.01.2021

Dieses Blatt behandelt exakte und inexakte Differentiale von Funktionen mehrerer Veränderlicher. Ebenfalls werden einige Rechenübungen komplexer Zahlen betrachtet.

Aufgabe 1: Differentiale und Integrabilitätsbedingung (10 Punkte)

(a) Bestimmen Sie das totale Differential von $f(x, y) = y \exp(x + y)$. Nehmen Sie an, dass die Variablen x, y unabhängig sind und bestimmen Sie $\mathrm{d}f/\mathrm{d}x$. Nehmen Sie an, dass die Variablen abhängig voneinander sind mit $y = x^2$ und bestimmen Sie $\mathrm{d}f/\mathrm{d}x$ mittels des totalen Differentials und via vorherigen Einsetzens von y in $f(x, y) = f(x)$.

(b) Bestimmen Sie die totalen Differentiale

(i) $x^2 y$, (ii) $x^2 + y^2 + 4$, (iii) $\sin(x/y)$, (iv) $\tan^{-1}(y/x)$,

(v) $(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$.

(c) Bestimmen Sie alle partiellen Ableitungen zweiter Ordnung von (i), (ii) und (v).

(d) Zeigen Sie für (iv), dass $\partial^2 f/\partial x \partial y = \partial^2 f/\partial y \partial x$.

Aufgabe 2: Exakte und inexakte Differentiale (schriftlich) (10 Punkte)

(a) Bestimmen Sie welches der nachfolgenden Differentiale exakt ist.

(i) $(3x + 2)y \,\mathrm{d}x + x(x + 1) \,\mathrm{d}y$,

(ii) $y \tan x \,\mathrm{d}x + x \tan y \,\mathrm{d}y$,

(iii) $y^2(\ln x + 1) \,\mathrm{d}x + 2xy \ln x \,\mathrm{d}y$,

(iv) $y^2(\ln x + 1) \,\mathrm{d}y + 2xy \ln x \,\mathrm{d}x$,

(v) $[x/(x^2 + y^2)] \,\mathrm{d}y - [y/(x^2 + y^2)] \,\mathrm{d}x$.

(b) Zeigen Sie, dass $df = x^2 \,\mathrm{d}y - (y^2 + xy) \,\mathrm{d}x$ kein exaktes Differential ist, aber $\mathrm{d}g = (xy^2)^{-1} \,\mathrm{d}f$ exakt ist.

(c) Zeigen Sie, dass $df = y(1 + x - x^2) \,\mathrm{d}x + x(x + 1) \,\mathrm{d}y$ kein exaktes Differential ist. Bestimmen Sie die Differentialgleichung, die eine Funktion $g(x)$ erfüllen muss, damit $\mathrm{d}\Phi = g(x) \,\mathrm{d}f$ ein totales Differential ist. Verifizieren Sie, dass $g(x) = e^{-x}$ eine Lösung dieser Gleichung ist und bestimmen Sie die Form von $\Phi(x, y)$.

(d) Im Allgemeinen ist der integrierende Faktor $g(x, y)$ eine Funktion aller unabhängigen Variablen. Obige Vereinfachung gilt nur, wenn $m = (p_y - q_x)/q = m(x)$ ist, wobei $\mathrm{d}f = p \,\mathrm{d}x + q \,\mathrm{d}y$. In diesem Fall kann der integrierende Faktor direkt bestimmt werden via $g(x) = \exp(\int m(x)\mathrm{d}x)$. Testen Sie, ob diese Eigenschaft für (i) gilt und bestimmen Sie gegebenenfalls den integrierenden Faktor. Hinweis: $p_x = \partial p/\partial x$.

Aufgabe 3: Komplexe Zahlen (10 Punkte)

(a) Schreiben Sie die folgenden Zahlen in der Form $a + ib$:

(i) $z = \frac{2-i}{3+i}$,

(ii) $z = e^{i\pi/3}$.

(b) Schreiben Sie die folgenden Zahlen in Polarform:

(i) $z = -2 - 2i$,

(ii) $z = -\sqrt{3} + 3i$.

(c) Finden Sie (mit De Moivre's Theorem) alle z, für die gilt:

(i) $z^3 = 4\sqrt{2}(1 - i)$,

(ii) $z^2 = -i$.

(d) Berechnen Sie $z_1 z_2$ und z_1^2:

(i) $z_1 = e^{i\pi/6},\ z_2 = e^{i\pi/3}$

(e) Berechnen Sie $w_1 = z_1 - z_2,\ w_2 = z_1 + z_2$, sowie die komplexen Konjugationen w_1^*, w_2^* der für folgende Paare komplexer Zahlen:

(i) $z_1 = 2+3i,\ z_2 = 4+5i$, (ii) $z_1 = -7i,\ z_2 = 3+7i$, (iii) $z_1 = 1/2+i/3,\ z_2 = -1/4+(1/2)i$.

(f) Berechnen Sie das Skalarprodukt zwischen z_1 und z_2, $z_1^* z_2$ jeweils für

(i) $z_1 = 2 + 3i,\ z_2 = 4 + 5i$, (ii) $z_1 = 0.5 + 3i,\ z_2 = 8 - 10i$, (iii) $z_1 = i,\ z_2 = -2 - 3i$.

(g) Berechnen Sie die Quotienten z_1/z_2 und z_2/z_1 jeweils für

(i) $z_1 = 4 + 4i,\ z_2 = 12 + 12i$, (ii) $z_1 = -3 + 4i,\ z_2 = 5 + 7i$, (iii) $z_1 = 10i,\ z_2 = 10 + 5i$.