Diplomarbeit

Zur Messtheorie: Interferenz-Muster, Welcher-Weg-Information und Quanten-Radierer in höherdimensionalen Räumen

Thomas Wahl

22. Juni 2001

Hauptberichter: Prof.Dr.G.Mahler
Mitberichter: PD Dr.O.Hess

Institut für Theoretische Physik
Teilinstitut I
Universität Stuttgart
Pfaffenwaldring 57
D-70550 Stuttgart

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung **7**

2 Der 'klassische' Radierer **9**

2.1 Die Szilard-Maschine 9

2.2 'Radieren' von klassischer Information 10

3 Grundlagen der Gitter-Interferenz **13**

3.1 Geometrie 13

3.2 Quantenmechanische Beschreibung 14

3.2.1 Input/Output-Analyse 14

3.2.2 1-Teilchen-Fock-Raum 15

3.2.3 Beispiele für Interferenzmuster 17

3.3 'Randeffekte' 20

3.4 Inhomogener Inputzustand 22

4 Markierungen **27**

4.1 Beschreibung des 'markierten' Zustands 28

4.2 Markierungstypen 28

4.2.1 Eindeutige Markierungen 29

4.2.2 Mehrdeutige Markierung 29

4.2.3 Spezielle Clusterbildung 31

4.3 Eigenschaften des Interferenzmusters 33
4.3.1 Dichtematrix und reduzierte Dichtematrix 33
4.3.2 Interferenzmuster 33
4.3.3 Zerlegung in Subensemble-Muster 35
4.3.4 Simulationen 35
4.4 Beispiele 37
4.4.1 Interferenzmuster für 5 Spalte mit Marker 37
4.4.2 Interferenzmuster für 10 Spalte 39
4.4.3 Subensemble-Muster für 4 Spalte: 41
4.4.4 Simulationen mit Doppelspalt-Charakter 43
4.4.5 Simulation mit 4-Spalt-Charakter 45
4.5 Zusammenfassung 45

5 Der Quantenradierer 47
5.1 Interferenz 47
5.2 Welcher-Weg-Messung 48
5.3 Die Idee des Quantenradierers 49
5.4 Der Quantenradierer am Gitter 51
5.4.1 Vollständiger Quantenradierer 51
5.4.2 Partieller Quantenradierer 54
5.5 Zusammenfassung 57

6 Zusammenhang von Interferenzmuster und Welcher-Weg-Information 59
6.1 Doppelspalt 59
6.1.1 Vorhersagbarkeitsmaß nach Greenberger und Yasin 59
6.1.2 Unterscheidbarkeitsmaß nach Englert 61
6.2 Erweiterung dieser Komplementaritätsbetrachtung auf n Spalte . . . 61

6.2.1 Charakterisierung des Interferenzmusters 61
6.2.2 Charakterisierung der Welcher-Weg-Information 63
6.2.3 Allgemeine Kreisgleichung 65
6.3 Numerische Ergebnisse 66
6.3.1 V2(E)-Diagramme 66
6.3.2 V(E)-Diagramme 72
6.3.3 V1(E)-Diagramme 74
6.4 Zusammenfassung 77

Literaturverzeichnis **79**

Kapitel 1

Einleitung

Ein wesentlicher Teil der heutigen physikalischen Beschreibung der Welt basiert letztlich auf der Quantenmechanik. Entwickelt wurde sie zu Beginn des 20.Jahrhunderts um die, mit der klassischen Physik nicht erklärbaren, experimentellen Ergebnisse der Atomphysik zu verstehen. Es war aus diesen Experimenten jedoch nicht ableitbar, wie diese neue Theorie beschaffen sein muss. Um so erstaunlicher ist es, dass die von Schrödinger und Heisenberg geschaffenen Theorien, welche sich dann auch noch als äquivalente Darstellungen ein und der selben Theorie erwiesen, weit über die Grenzen der damaligen Atomphysik hinaus so erfolgreich sind. Und dies, obwohl die anschauliche Grundlage, die Interpretation, nach wie vor nicht eindeutig ist und zu zahlreichen Diskussionen führte und auch heute noch führt. Im Nachhinein zeigte sich jedoch auch, dass gerade diese Diskussionen, insbesondere die, die zwischen den Ur-Vätern der Quantenmechanik geführt wurden, als wohl wichtigste Diskussion sei hier an den legendären Briefwechsel zwischen Albert Einstein und Nils Bohr erinnert, zu relevanten Weiterentwicklungen und auf elementare Probleme der Quantenmechanik geführt haben(EPR-Paradoxon, Doppelspaltexperimente die auch mit Elementar-TEILCHEN möglich sind, Komplementarität wie z.B. zwischen Welcher-Weg-Information und Interferenzen beim Doppelspalt,etc.).
Der Begriff Komplementarität wurde erstmals von Nils Bohr auf einem Vortrag verwendet, ohne den Begriff jedoch tiefergehend zu erklären. Er beschrieb damit den Welle-Teilchen-Dualismus, der sich erstmals bei Experimenten mit einem Doppelspalt, also der einfachsten Form eines Gitters, zeigte. Bei diesen Experimenten stellt man fest, dass alleine der Versuch, Teilcheneigenschaften zu beobachten, in der Natur 'strafbar' ist und das Interferenzmuster zerstört.
Allgemein bezeichnet man mit dem Begriff Komplementarität die Eigenschaft der Natur nicht alle Grössen beliebig genau preiszugeben. Heutzutage verwendet man den Begriff Komplementarität auch zur Charakterisierung nicht-physikalischer

Grössen. So wird zum Beispiel oft die 'einfache Geldverteilung'(d.h. die Verteilung nach einem einfachen Schlüssel) einer Institution an untergeordnete Abteilungen und die 'gerechte Geldverteilung' aufgrund zahlreicher erfolgloser Versuche beides zu erreichen als komplementär bezeichnet. Komplemenäre Grössen müssen nicht zueinander im Gegensatz stehen wie z.B. Wahrheit und Lüge. Oftmals werden jedoch Grössen gerade wegen ihrer Komplementarität als gegensätzlich betrachtet.
In dieser Arbeit geht es gerade um die Komplementarität bei Interferenz-Experimenten. Untersucht wird der Zusammenhang zwischen Welcher-Weg-Information und Interferenzmuster am Gitter. Betrachtet werden dabei auch verschiedene Kombinationsmöglichkeiten der Welcher-Weg-Detektoren (auch Marker genannt), sowie die sogenannten Quantenradierer-Szenarien, bei denen die Art der Welcher-Weg-Detektoren zu einer Mess-Basis führt, die keinerlei Welcher-Weg-Information mehr enthält, dafür aber durch das Verwenden von Messergebnissen wieder zu Interferenzmustern führt. Ebenso wird auf quantitative Zusammenhänge zwischen Welcher-Weg-Information und Interferenzmuster am Doppelspalt und die Schwierigkeiten beim Erweitern dieser Zusammenhänge auf das Gitter eingegangen. Da Interferenzversuche am Gitter sowohl mit Photonen als auch mit anderen Teilchen gemacht werden wird in dieser Arbeit auch häufig der Begriff Quanton, der die Begriffe 'Welle' oder 'Teilchen' vermeidet, dafür verwendet. Er geht auf M.Bunge zurück.

Kapitel 2

Der 'klassische' Radierer

2.1 Die Szilard-Maschine

In diesem Abschnitt wird eine von L.Szilard im Jahre 1929 , siehe [16], vorgeschlagene Version des Maxwellschen Dämons betrachtet.

Die Szilard-Maschine ist eine Box des Volumens V mit einem darin eingeschlossenen Molekül. Die Box ist im thermischen Gleichgewicht mit der Umgebung. Die Arbeitsschritte der Maschine sind in den 5 Bildern der Abbildung (2.1) beschrieben:

- Bild 1:
  Die Aussgangssituation: Das Molekül befindet sich an einem beliebigen Ort innerhalb der Box

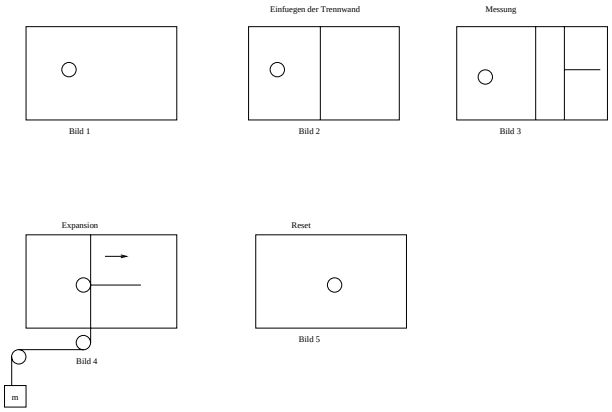

Abb. 2.1: Arbeitsweise der Szilar-Maschine

- Bild 2:
  Eine Trennwand wird in der Mitte eingefügt, so dass die Box jetzt in 2 Hälften mit den Volumen $V_1 = V_2 = \frac{V}{2}$ geteilt ist.

- Bild 3:
  Die Position des Moleküls, das heisst: befindet sich das Molekül in dem linken oder dem rechten Teil der Box, wird gemessen. Wie unter anderem von Fahn gezeigt wird, ändert sich bei dieser Messung die Entropie nicht. Von der Seite, auf der sich das Molekül nicht befindet wird gegen das Vakuum, das heisst ohne Energie-Aufwand, ein Stempel bis zur Trennwand eingeführt.

- Bild 4:
  Die Trennwand wird entfernt und das Molekül leistet über den Stempel gegen eine Kraft auf der Aussenseite Arbeit.

- Bild 5:
  Der Stempel ist bis ganz nach aussen gedrückt; dem Molekül steht jetzt wieder das ganze Volumen V zur Verfügung. Die vom Molekül nach aussen abgegebene Arbeit wird durch T ausgeglichen. Der Arbeitsprozess kann nun von vorne beginnen.

Betrachtet man diesen Vorgang aus der rein thermodynamischen Sicht, so scheint eine Verletzung des 2.Hauptsatzes vorzuliegen:
Eine Entropieänderung tritt nur bei der vom Molekül betriebenen Expansion ein; sie beträgt:

$$\Delta S = -kT \ln \frac{V}{V_1} = -kT \ln 2 < 0 \tag{2.1}$$

Das heisst diese zyklisch arbeitende Maschine verringert die Entropie!

2.2 'Radieren' von klassischer Information

Charles Bennett gelang es im Jahre 1982 als Erstem eine befriedigende Lösung des Problems zu finden [15]:
Der zyklische Vorgang ist erst beendet, nachdem auch die gespeicherte Information über den Ort des Moleküls, welche nach dem Expansionsprozess falsch ist, radiert, das heisst gelöscht wird. Dieses Ausradieren der Information ändert jedoch die Entropie:

$$\Delta S = kT \ln 2 \tag{2.2}$$

Somit beträgt die gesamte Entropieänderung $\Delta S = 0$ (Vgl. auch: F.Schlögl,Probability and Heat,Vieweg 1989)

Eine weitere interessante Betrachtungsweise der Szilard-Maschine im 2-dimensionalen Phasenraum aus dem Ort des Moleküls und dem Speicher der Maschine wurde 1994 von Paul Fahn [14] entwickelt. Dabei zeigt sich direkt, dass das Löschen des Speichers für den Entropieerhalt verantwortlich ist.

Es ist also gerade das Radieren der Information, das den Arbeitsprozess der Szilard-Maschine ermöglicht - und so den 2.Hauptsatz der Thermodynamik erfüllt.
Somit ist auch schon in der klassischen Physik das Radieren von Information ein Vorgang, der konzeptionell von Bedeutung ist.

Kapitel 3

Grundlagen der Gitter-Interferenz

3.1 Geometrie

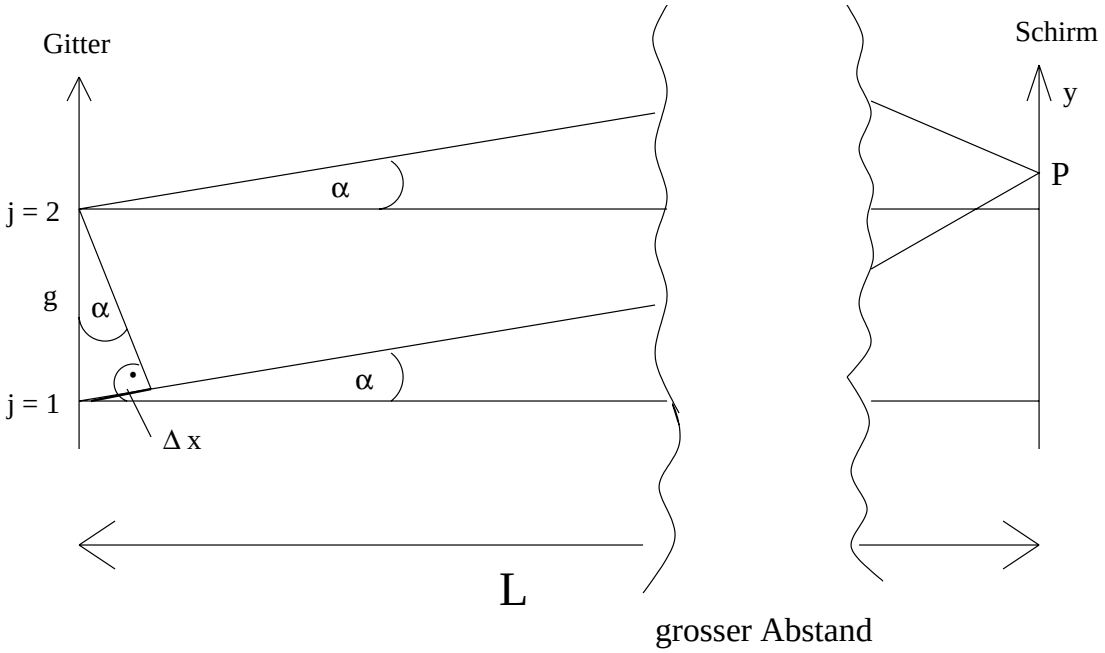

Abb. 3.1: Interferenz am Gitter (g=Spaltabstand)

Aufgrund der Geometrie werden alle im Punkt P (auf dem Schirm) interferierenden Strahlen j(j=1,2,...,n) als parallel angenommen, das heisst für jeden Strahl gilt der gleiche Beugungswinkel α.

Für die relative Phasenverschiebung zwischen benachbarten Strahlen ergibt sich damit:

$$\Delta x = g \cdot sin(x) \tag{3.1}$$

Ebenso erhält man aus der Geometrie:

$$y = L \cdot \tan(\alpha) \tag{3.2}$$
$$= L \cdot \frac{\Delta x}{g \cdot \cos(\alpha)} \tag{3.3}$$

Im folgenden wird nicht mit y sondern mit Δ x als Ortsvariable gerechnet(diese unterscheiden sich für kleine Winkel α nur um den konstanten Faktor $\frac{L}{g}$).

3.2 Quantenmechanische Beschreibung

3.2.1 Input/Output-Analyse

Die Beschreibung des in der Abbildung 3.1 dargestellten Interferenz-Effekts geschieht mit Hilfe der selektierten Moden(j). Moden sind Eigenschwingungen des Felds. Dargestellt werden die Input-Moden mit Hilfe von Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren ($\hat{a}_j^+ bzw. \hat{a}_j$).
Auch das gesamte Geschehen auf dem Schirm lässt sich durch 'Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren' beschreiben:

- Kollektiver Erzeugungsoperator (Output-Mode am Schirm;n Spalte)

$$\hat{\Psi}^+(\Delta x) = \sum_{j=0}^{n-1} \hat{a}_j^+ e^{-i\frac{2\pi}{\lambda} j \cdot \Delta x} \tag{3.4}$$

  (Anmerkung: Für den Wellenvektor $\vec{k}$ gilt: $|\vec{k}| = \frac{2\pi}{\lambda}$ für jedes j.
  In dieser Beschreibung erzeugt jeder Gitterspalt j eine Mode a_j^+ in Richtung α. Da die Phasenverschiebung zwischen Nachbarstrahlen Δ x beträgt ist die Phasenverschiebung zwischen der Mode j und j=0 damit $j \cdot \Delta x$)

- Kollektiver Vernichtungsoperator

$$\hat{\Psi}(\Delta x) = \sum_{j=0}^{n-1} \hat{a}_j \cdot e^{i\frac{2\pi}{\lambda} j \cdot \Delta x} \tag{3.5}$$

Die Interferenz am Schirm ergibt sich durch die Überlagerung der Input-Moden miteinander. Die Intensität ist proportional dem 'Gesamtanzahloperator':

- Gesamtanzahloperator

$$\hat{N}(\Delta x) = \hat{\Psi}^{+}\hat{\Psi} \overset{(3.4)+(3.5)}{=} \sum_{j}\sum_{j'} \hat{a}_j^{+}\hat{a}_{j'} \cdot e^{i\frac{2\pi}{\lambda}(j'-j)\cdot\Delta x} \tag{3.6}$$

3.2.2 1-Teilchen-Fock-Raum

Da es sich bei dieser Interferenz um eine 1 - Quantonen - Interferenz handelt, bei der lediglich die Moden gezählt werden, ist der zugehörige Zustandsraum ein 1 - Quanton - Fock - Raum: $\hat{a}_m^{+}|0>=|m>$. Damit lässt sich der 'homogene' Input-Zustand darstellen als:

$$|\ \psi_0 >= \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{m=0}^{n-1}\hat{a}_m^{+}\ |\ 0 >= \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{m=0}^{n-1}|\ m > \tag{3.7}$$

Dieser Zustand entspricht der Vorstellung, dass an jedem Spalt gleiche Phase und Amplitude vorherrscht.

Der Gesamtanzahloperator lässt sich in diesem Raum schreiben als:

$$\hat{N}(\Delta x) = \sum_{j=0}^{n-1}\sum_{j'=0}^{n-1} e^{i\cdot\frac{2\pi}{\lambda}\cdot\Delta x\cdot(j'-j)}\ |\ j >< j'\ | \tag{3.8}$$

$$\text{mit } z = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta x \tag{3.9}$$

Als Erwartungswert bezüglich $|\psi_0>$ erhält man damit das Interferenzmuster:

$$P(z) =< \psi_0|\hat{N}|\psi_0 > \ = \ \frac{1}{n}\sum_{j,j',m,m'=0}^{n-1}\underbrace{< m|j >}_{\delta_{m,j}}\underbrace{< j'|m' >}_{\delta_{m',j'}}\cdot e^{iz(j'-j)} \tag{3.10}$$

$$= \ \frac{1}{n}\sum_{j,j'}^{n-1} e^{iz(j'-j)} \tag{3.11}$$

$$= \ \frac{1}{n}\left|\sum_{j}^{n-1} e^{izj}\right|^2 \tag{3.12}$$

Daraus ergeben sich insbesondere folgende Grössen:

- Interferenz-Maxima
  Maximale Intensität erhält man für $\Delta x = z' \cdot \lambda, z' \in \mathbb{N}$

$$
\begin{aligned}
< \psi|\hat{N}|\psi > &= \frac{1}{n}\left|\sum_{j=0}^{n-1} e^{iz'\lambda\frac{2\pi}{\lambda}}\right|^2 = \frac{1}{n}\left|\sum_{j=0}^{n-1} e^{i2\pi z' j}\right|^2 && (3.13)\\
&= \frac{1}{n}\left|\sum_{j=0}^{n-1} 1^j\right|^2 && (3.14)\\
&= \frac{1}{n}\left|\underbrace{1 + 1^2 + 1^3 + ... + 1^{(n-1)}}_{n}\right|^2 && (3.15)\\
&= n && (3.16)
\end{aligned}
$$

  Das heisst in dieser Beschreibungsweise ist das Maximum gleich der Anzahl der Gitter-Moden und damit gleich der Anzahl n der Spalte.

- Interferenz-Minima
  Minimale Intensität ergibt sich für
  $\Delta x = (2z' + 1)\frac{\lambda}{2}, z' \in \mathbb{N}$:

$$
\begin{aligned}
< \psi|\hat{N}|\psi > &= \frac{1}{n}\left|\sum_{j=0}^{n-1} e^{i\frac{2\pi}{\lambda}j(2z'+1)\frac{\lambda}{2}}\right|^2 && (3.17)\\
&= \frac{1}{n}\left|\sum_{j=0}^{n-1} e^{i\pi j(2z'+1)}\right|^2 && (3.18)\\
&= \frac{1}{n}\left|\sum_{j} -1^{j\underbrace{(2z'+1)}_{ungerade}}\right|^2 && (3.19)\\
&= \frac{1}{n}\left|\sum_{j=0} (-1)^j\right|^2 && (3.20)\\
&= \begin{cases} 0 & : \text{ falls n gerade} \\ \frac{1}{n} & : \text{ falls n ungerade} \end{cases} && (3.21)
\end{aligned}
$$

  Bei gerader Anzahl n an Spalten erhält man das absolute Minimum 0, bei ungerader Spaltanzahl ist die Intensität umgekehrt proportional zu n.

3.2.3 Beispiele für Interferenzmuster

Das aus dem Experiment in Abb. 3.1 entstehende Interferenzmuster entspricht dem Erwartungswert (3.11). Somit ergibt sich dafür:

$$P = <\psi|\hat{N}|\psi> = \frac{1}{n}\sum_{j,j'=0}^{n-1} e^{iz(j'-j)} \tag{3.22}$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{j,j'=0}^{n-1}\left(\cos\left(z(j'-j)\right) + \underbrace{i\cdot\sin\left(z(j'-j)\right)}_{\sum=0,\text{da } \sin(z(j'-j))=-\sin(z(j-j'))}\right) \tag{3.23}$$

$$= 1 + \frac{2}{n}\sum_{\kappa=1}^{n-1}(n-\kappa)\cdot\cos(\kappa z) \tag{3.24}$$

$$\boxed{P = <\psi|\hat{N}|\psi> = \frac{\cos(n\cdot z)}{n(\cos(z)-1)}} \tag{3.25}$$

Insbesondere ergeben sich folgende Spezialfälle:

- Einfachspalt n=1

$$P(z) = \frac{\cos(z) - 1}{cos(z) - 1} = 1 = const. \tag{3.26}$$

  Dieses Ergebnis entspricht dem Egebnis der direkten Berechnung für den Einzelspalt

- Doppelspalt(n=2)
  Man erhält aus (3.25) und einigen weiteren Umformungen:

$$\begin{aligned} P(z) &= \frac{\cos(2z) - 1}{2(\cos(z) - 1)} && (3.27)\\ &= \frac{\cos(z)^2 - \sin(z)^2 - (\sin(z)^2 + \cos(z)^2)}{2(\cos(z) - 1)} && (3.28)\\ &= \frac{-2\sin(z)^2}{2(\cos(z) - 1)} = \frac{\cos(z)^2 - 1}{\cos(z) - 1} && (3.29)\\ &= \cos(z) + 1 && (3.30)\\ &= \cos(\frac{z}{2})^2 && (3.31) \end{aligned}$$

  Für den Doppelspalt ergibt sich somit folgendes Muster:

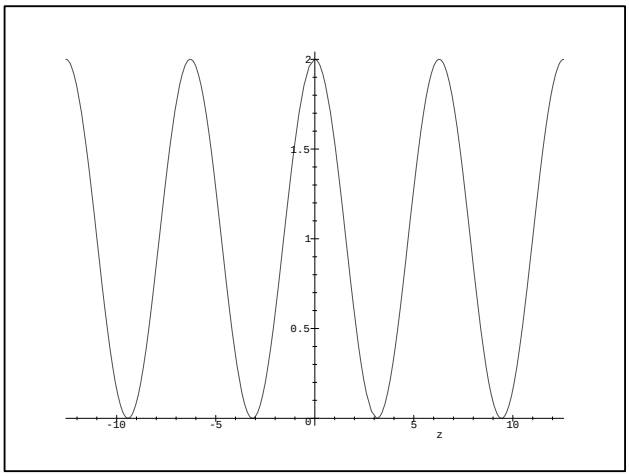

Abb. 3.2: Interferenzmuster am Doppelspalt(n=2)

- Trippelspalt (n=3):

$$P(z) = \frac{\cos(3z) - 1}{3(\cos(z) - 1)}$$

Dies ist ein Interferenzmuster folgender Form:

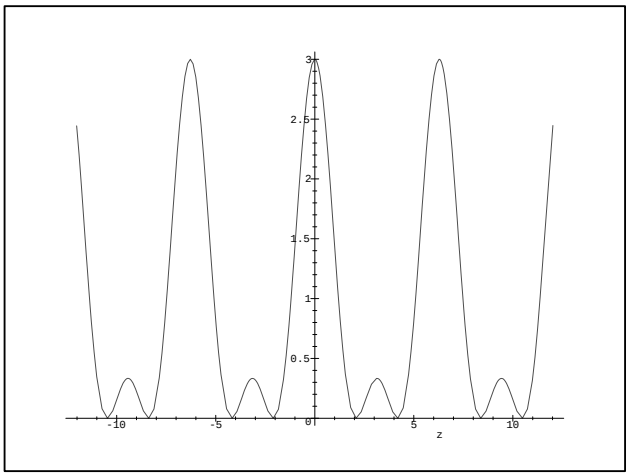

Abb. 3.3: Interferenzmuster am Trippelspalt(n=3)

- Gitter mit 8 Spalten(n=8):
  Hier ergibt sich:

$$P = \frac{\cos(8x) - 1}{8(\cos(x) - 1)}$$

Als zugehöriges Interferenzmuster erhält man:

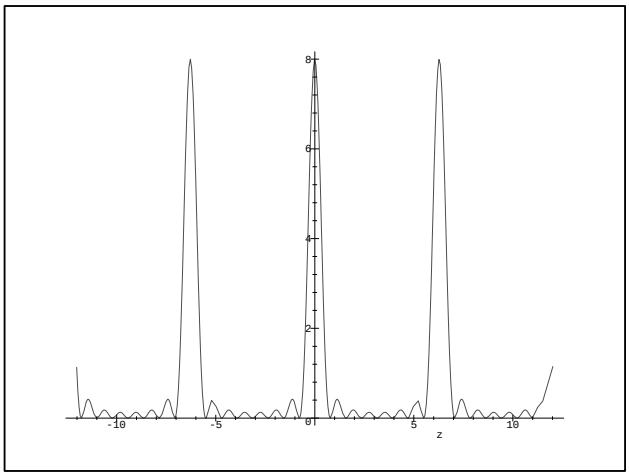

Abb. 3.4: Interferenzmuster am Gitter mit 8 Spalten

3.3 'Randeffekte'

Als Randeffekt wird der Einfluss der endlichen Spaltbreite diskutiert.

In dem für den Schirm relevanten Fernfeld lässt sich das Interferenzmuster als Produkt aus Gitterbeugungsfunktion und Spaltbeugungsfunktion beschreiben.

- Bestimmung der Spaltbeugungsfunktion

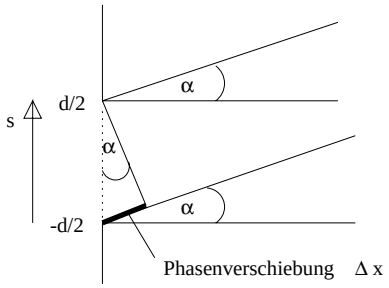

Abb. 3.5: Geometrie des einzelnen Spalts

Zur Herleitung der Spaltbeugungsfunktion betrachte man Abb.(3.5). Hier nimmt man an, dass von jedem Punkt des Spaltes der Breite d eine Mode ausgeht. Beschreibt s den Weg entlang des Spaltes, so betrg̈t die Phasenverschiebung der jeweiligen Mode:

$$\Delta x = s \cdot \sin(\alpha)$$

Die Spaltbeugungsfunktion beschreibt die Intensitätsverteilung und ergibt sich somit aus dem Quadrat der aufsummierten Moden:

$$f(\alpha) = \left(\frac{1}{d} \int_{\frac{-d}{2}}^{\frac{d}{2}} e^{-i\frac{2\pi}{\lambda} s \cdot \sin(\alpha)} ds \right)^2 = \left(\frac{\sin\left(\frac{\pi d}{\lambda} \sin(\alpha)\right)}{\frac{\pi d}{\lambda} \sin(\alpha)} \right)^2 \tag{3.32}$$

Mit der Abkürzung $z' = \frac{\pi}{\lambda} d \sin(\alpha)$ ergibt sich die Spaltbeugungsfunktion zu:

$$h(z') = \left(\frac{\sin(z')}{z'} \right)^2 \tag{3.33}$$

- Einfluss der Spaltbeugungsfunktion
  Vergleicht man das Argument $z = \frac{2\pi}{\lambda} g \cdot \sin(\alpha)$ der Gitterbeugungsfunktion mit dem Argument $z' = \frac{2\pi}{\lambda} d \cdot sin(\alpha)$, so erkennt man, dass aufgrund des Unterschiedes zwischen der Gitterkonstanten g und der Spaltbreite d die beiden Beugungsfunktionen unterschiedliche Frequenzen besitzen. Da $d < g$ ist, besitzt die Spaltbeugungsfunktion die kleinere Frequenz und wirkt somit als Einhüllende. Das bedeutet, das eigentliche Muster wird durch die Gitterbeugungsfunktion beschrieben.

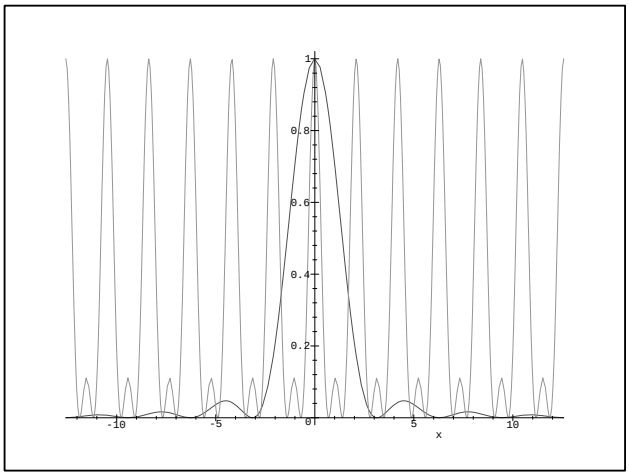

Abb. 3.6: Vergleich von Spalt- und Gitterbeugungsfunktion für g = 3d,n=3

Aus diesem Grund und aufgrund der Tatsache, dass die entsprechenden Werte der Spaltbeugungsfunktion im nach hinein als Korrekturfaktoren berechnet werden können, wird die Spaltbeugungsfunktion im Folgenden nicht berücksichtigt. Der wesentlichste Grund zur Vernachlässigung der Spaltbeugungsfunktion ist jedoch die Tatsache, dass der Doppelspalt, beziehungsweise das

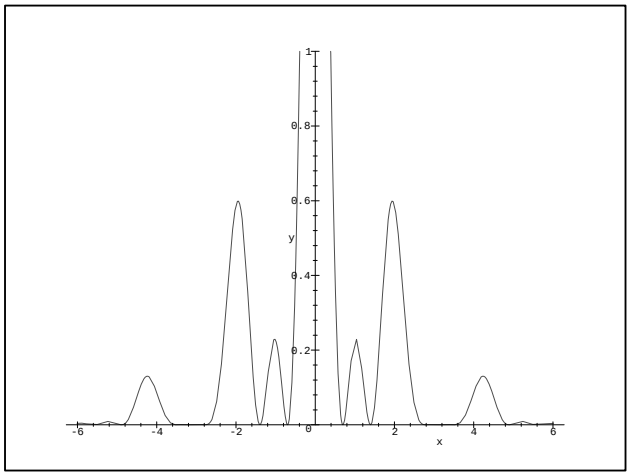

Abb. 3.7: Tatsächliches Interferenzmuster für n = 3 Spalte,g=3d

Gitter, beschrieben durch die Gitterbeugungsfunktion, Komplementaritätseigenschaften des Quantons zu Tage treten lässt und die Spaltbeugungsfunktion dabei lediglich ein experimentell relevanter Korrekturfaktor ist.

3.4 Inhomogener Inputzustand

Bisher wurde lediglich der Fall betrachtet, in dem die Moden aller Spalte gleich gewichtet waren('homogen',Gl.(3.7)). Im Folgenden wird untersucht, wie sich das Interferenzmuster ändert, wenn diese Moden unterschiedlich gewichtet sind. Der Zustandsvektor schreibt sich in allgemeiner Form als:

$$|\psi >= \sum_{m=0}^{n-1} \alpha_m |m > \quad (\text{mit der Normierung} \sum_{m=0}^{n-1} |\alpha_m|^2 = 1) \tag{3.34}$$

Das allgemeine Interferenzmuster berechnet sich damit zu:

$$
\begin{aligned}
P(z) =< \psi|\hat{N}|\psi > &= \sum_{m,m'}\sum_{j,j'} \alpha^*_{m'}\alpha_m \underbrace{< m'|j >}_{\delta_{m',j}}\underbrace{< j'|m >}_{\delta_{m,j'}} e^{iz(j'-j)} && (3.35)\\
&= \sum_{m,m'} \alpha^*_{m'}\alpha_m e^{iz(m-m')} && (3.36)\\
&= \underbrace{|\alpha_0|^2 + |\alpha_1|^2 + \cdots + |\alpha_{n-1}|^2}_{\overset{Normierung}{=}1}\\
&\quad + \left\{ \underbrace{\begin{matrix}(\alpha^*_0\alpha_1 + \alpha^*_1\alpha_2 + \cdots + \alpha^*_{n-2}\alpha_{n-1})e^{iz}\\ +(\alpha^*_1\alpha_0 + \alpha^*_2\alpha_1 + \cdots + \alpha^*_{n-1}\alpha_{n-2})e^{-iz}\end{matrix}}_{=2\cdot\Re\{\sum_a \alpha_a\alpha^*_{a-1}e^{-iz}\}} \right\}\\
&\quad + \left\{ \underbrace{\begin{matrix}(\alpha^*_0\alpha_2 + \alpha^*_1\alpha_3 + \cdots + \alpha^*_{n-3}\alpha_{n-1})e^{2iz}\\ +(\alpha^*_2\alpha_0 + \alpha^*_3\alpha_1 + \cdots + \alpha^*_{n-1}\alpha_{n-3})e^{-2iz}\end{matrix}}_{=2\cdot\Re\{\sum_a \alpha_a\alpha^*_{a-2}e^{-2iz}\}} \right\}\\
&\quad + \ldots\\
&= 1 + 2\cdot\Re\left\{\sum_{a=0}^{n-1}\sum_{l=1}^{n-1-a} \alpha_a \cdot \alpha^*_{a+l}e^{-i\cdot l\cdot z}\right\} && (3.37)
\end{aligned}
$$

Stellt man die im Allgemeinen komplexen Koeffizienten α_j in der Euler-Form $\alpha_j = r_j e^{i\varphi_j}(r_j = |\alpha_j|)$ dar, so erhält man letztendlich:

$$
\boxed{P = 1 + 2\sum_{a=0}^{n-1}\sum_{l=1}^{n-1-a} r_a r_{a+l}\cdot\cos\left(\varphi_a - \varphi_{a+l} - l\cdot z\right)} \qquad (3.38)
$$

Beispiele:

- 4 Spalte:
  Gewählter Zustandsvektor:

$$
|\psi >= \frac{e^{i\frac{27}{180}\pi}}{2}|0 > + \frac{e^{i\frac{134}{180}\pi}}{2}|1 > + \frac{e^{i\frac{278}{180}\pi}}{2}|2 > + \sqrt{\frac{7}{18}}e^{i\frac{183}{180}\pi}|3 > \qquad (3.39)
$$

  Mit dieser Gewichtung ergibt sich folgendes Interferenzmuster:

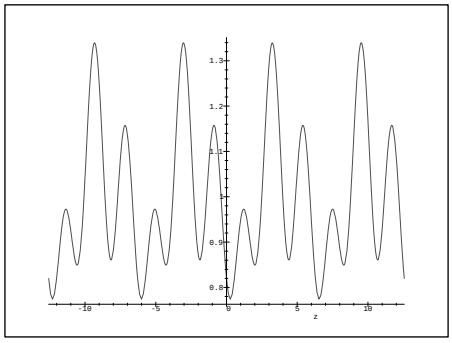

Abb. 3.8: Beispiel für 4 Spalte

- 10 Spalte:
  Gewählter Zustandsvektor:

$$
\begin{aligned}
|\psi> \;=\; & \frac{e^{i\frac{12}{180}\pi}}{\sqrt{5}}|0> + \frac{e^{i\frac{27}{180}\pi}}{\sqrt{3}}|1> + \frac{e^{i\frac{48}{180}\pi}}{\sqrt{10}}|2> + \frac{e^{i\frac{79}{180}\pi}}{\sqrt{30}}|3> + \frac{e^{i\frac{96}{180}\pi}}{\sqrt{60}}|4> \\
& + \frac{e^{i\frac{147}{180}\pi}}{\sqrt{60}}|5> + \frac{e^{i\frac{188}{180}\pi}}{\sqrt{15}}|6> + \frac{\sqrt{2}e^{i\frac{217}{180}\pi}}{\sqrt{15}}|7> + \frac{e^{i\frac{283}{180}\pi}}{\sqrt{15}}|8> \\
& + \frac{e^{i\frac{357}{180}\pi}}{\sqrt{30}}|9>
\end{aligned}
\tag{3.40}
$$

Das zugehörige Interferenzmuster besitzt die Form:

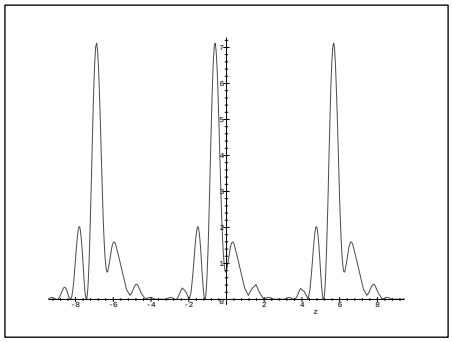

Abb. 3.9: Beispiel für 10 Spalte

Zum Vergleich: Das Interferenzmuster zum Zustandsvektor (3.40) unter

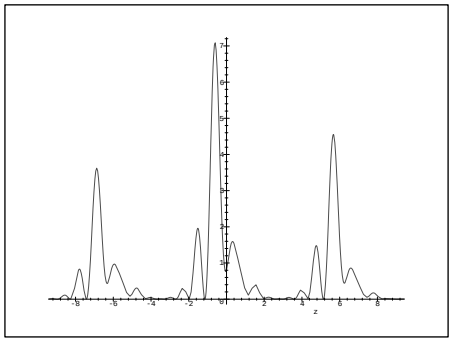

Abb. 3.10: Obiges Beispiel mit Spaltbeugung

Berücksichtigung der Spaltbeugung (hier mit g = 5d) ist in Abb.(3.10) dargestellt

Kapitel 4

Markierungen

Ein Paradebeispiel für die Diskussion zueinander komplementärer Grössen ist der Doppelspalt. Hier kann man die beiden Spalte mit Detektoren bestücken, welche die Information über den vom Photon genommenen Weg liefern, ohne direkt mit dem Quanton zu wechselwirken oder dieses gar bei der Messung zu zerstören.
Experimentell lässt sich dies zum Beispiel mit Hilfe von Weg-selektiven Resonatoren verwirklichen([8]). Die detaillierte Erklärung dieses Messvorgangs soll hier nicht genauer betrachtet werden. Letztlich erhält man, über das Resonator-Photon, das seinerseits destruktiv detektiert wird, die Welcher-Weg-Information.
Der 'Preis', den man für die Beschaffung dieser Information zu bezahlen hat, ist das Verschwinden des Interferenzmusters('Komplementaität').

Bei geeigneten Detektoren kann man jedoch auch den Messvorgang so variieren, dass in einer anderen Basis gemessen wird. Dies ist zum Beispiel der Fall, wenn die Photonen-Detektoren so geschaltet sind, dass man das detektierte Photon nicht mehr eindeutig einem der beiden Resonatoren zuordnen kann(Hier sei angemerkt, dass es auch für diesen Fall noch zwei unterscheidbare Detektorzustände gibt). In diesem Fall ist keine Welcher-Weg-Information mehr vorhanden, und das Interferenzmuster lässt sich unter Verwendung der Messwerte wieder rekonstruieren('Quantenradierer').
Nun ist es das Ziel, dieses Konzept auf ein Gitter, das heisst ein Beugungsobjekt mit mehr als zwei Spalten, zu übertragen.

4.1 Beschreibung des 'markierten' Zustands

Durch die Welcher-Weg-Messung wird der Zustandsvektor des Quantons, System(1), mit dem Zustandsvektor des Markers, System(2), verschränkt, das heisst, der gemeinsame Zustandsvektor ergibt sich nicht mehr aus dem Produkt der beiden einzelnen Zustandsvektoren, sondern als Summe von Produkten von 'Zustandsteilen' der einzelnen Zustandsvektoren. Der neue Gesamt-Zustandsvektor lässt sich also beschreiben als:

$$|\phi>=\sum_{a,b} c_{a,b}|a,b> \qquad \text{mit:} \quad |a,b>=|a>_{Quanton}\otimes|b>_{Marker} \qquad (4.1)$$
$$\text{und} \quad a,b=0,1,...n-1$$

Dieser - im Allgemeinen verschränkte - Zustandsvektor beschreibt das **maximal mögliche** Wissen(Siehe Kapitel 4.1 und 4.2).
Der Marker-Zustand, $|b>$, kann auch durch eine Reihe von n 2-Niveau-Systemen dargestellt werden, welche den n Spalten lokal zugeordnet werden können:

$$\begin{aligned} |b> &: \\ |1> &= |1>\otimes|0>\otimes|0>\cdots|0> \\ |2> &= |0>\otimes|1>\otimes|0>\cdots|0> \\ &\vdots \\ |n-1> &= |0>\otimes|0>\otimes|0>\cdots|1> \end{aligned} \qquad (4.2)$$

Falls **alle** $c_{a,b}$ gleich sind, ist die Markierung **unwirksam**, da dann gilt:

$$|\phi>=|\psi(1)>\otimes|\psi(2)> \text{(unkorreliert)} \qquad (4.3)$$

Aus der Kombinationen von beliebigen Koeffizienten, welche die Normierungsbedingung erfüllen, lassen sich nun bestimmte Markierungstypen definieren:

4.2 Markierungstypen

Bemerkung:
Sind die Koeffiziznten aller vorkommenden Markerverknüpfungen (das sind die Koeffizienten ungleich Null) gleich und gibt # die Anzahl der Verknüpfungen an, so gilt:

$$c_{a,b}=\frac{1}{\sqrt{\#\cdot n}} \qquad (4.4)$$

4.2.1 Eindeutige Markierungen

Gibt es zu jeder Quantonmode nur einen zugeordneten Marker der diese Mode detektiert so ist die Markierung **eindeutig**. Diese Zuordnung muss nicht 'direkt' sein , das heisst wird zum Beispiel ein Quanton in Spalt 4 detektiert, so kann dies durch das 'blinken' des Markers von Spalt 8 angezeigt werden, während ein in Spalt 8 detektiertes Quanton zum Blinken des Markers von Spalt 12 führt etc. .
Schematische Darstellung:

Direkte Korrelation: $c_{a,b} = c_{a,a} \cdot \delta_{b,a}$

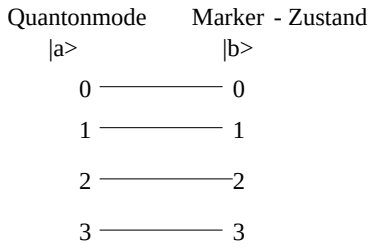

Abb. 4.1: Direkte Korrelation

Zyklische Korrelation: $c_{a,b} = c_{a,a+1} \cdot \delta_{b,a+1}$

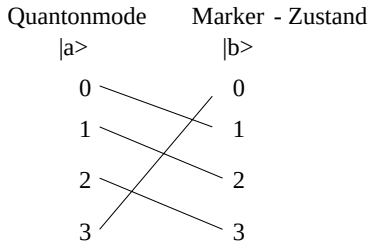

Abb. 4.2: Zyklische Korrelation

4.2.2 Mehrdeutige Markierung

Sind die Marker so miteinander verschaltet, beziehungsweise gebaut, dass die Marker mehrerer Spalte die Detektion in einem bestimmten Spalt anzeigen können, so ist keine eindeutige Welcher-Weg-Information vorhanden; andererseits bedeutet diese Markerkombination auch, dass bestimmte Spalte als mögliche Pfade ausgeschlossen werden können. Somit ist in diesem Fall eine Teilinformation vorhanden. Der Einfluss dieses Teil-Wissens auf das Interferenzmuster soll in diesem Kapitel analysiert werden. Mögliche Quantifizierungsmethoden der Teilinformation werden in einem

späteren Kapitel untersucht.
Schematische Darstellung der Markerkombinationen:

Beispiel a)

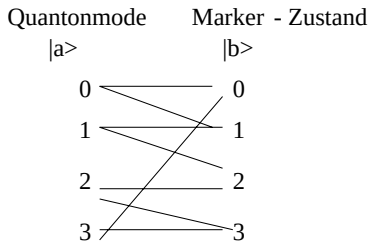

Abb. 4.3: Beispiel a)

Dieses Beispiel einer Markerkombination entspricht dem Zustand:

$$\begin{aligned} |\psi> \;=\; & c_{00}|00> + c_{01}|01> + c_{11}|11> + c_{12}|12> + \cdots + \\ & + c_{n-1,n-1}|n-1, n-1> + c_{n-1,0}|n-1, 0> \end{aligned} \tag{4.5}$$

Beispiel b)

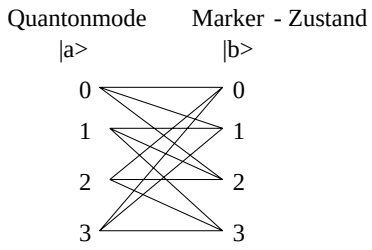

Abb. 4.4: Beispiel b)

Diese Kombination von Markern entspricht dem Zustand:

$$\begin{aligned} |\psi> \;=\; & c_{00}|00> + c_{01}|01> + c_{02}|02> + c_{11}|11> + c_{12}|12> + \\ & + c_{13}|13> + \cdots + c_{n-2,n-2}|n-2, n-2> + \\ & + c_{n-1,0}|n-1, 0> + c_{n-1,n-1}|n-1, n-1> + \\ & + c_{n-2,n-1}|n-2, n-1> + c_{n-1,0}|n-1, 0> + c_{n-1,1}|n-1, 1> \end{aligned} \tag{4.6}$$

4.2.3 Spezielle Clusterbildung

- Der Koeffizientenindex soll den 'Abstand' beschreiben:
  Hängt die Wahrscheinlichkeit für das 'Blinken' von Marker b bei der Detektion im Spalt a vom 'Abstand' zwischen a und b ab, so haben alle Komponenten

des Zustandsvektors mit gleichem Abstand d = b - a denselben Koeffizienten: c_{b-a}.
Beispiel:

$$
\begin{aligned}
|\phi> \;=\; & c_0 \underbrace{(|00> + |11> + \cdots + |n-1, n-1>)}_{Abstand\, d=0} + \\
& + c_1 \underbrace{(|01> + |12> + \cdots + |n-1, 0>)}_{Abstand\, d=1} \\
& + \cdots \\
& + c_{n-1}(|0, n-1> + |1, 0> + |2, 1> + \cdots \\
& \qquad + |n-1, n-2>)
\end{aligned} \tag{4.7}
$$

- Sind die Wahrscheinlichkeiten für das 'Blinken' eines Markers b alle gleich (unabhängig vom Detektionsspalt a),so haben alle Komponenten des Zustandsvektors mit gleichem Spaltindex a denselben Koeffizienten: c_a. Dessen Betragsquadrat gibt dann die Wahrscheinlichkeit an, das Quanton in diesem Spalt zu messen.
  Beispiel:

$$
\begin{aligned}
|\phi> \;=\; & c_0(|00> + |01> + \cdots + |0, n-1>) \\
& c_1(|10> + |11> + \cdots + |1, n-1>) \\
& \cdots \\
& c_{n-1}(|n-1, 0> + |n-1, 1> + \cdots + |n-1, n-1>)
\end{aligned} \tag{4.8}
$$

- Sind die Wahrscheinlichkeiten für die Detektion eines Quantons im Spalt a alle gleich, so haben alle Komponenten des Zustandsvektors mit gleichem Markerindex b denselben Koeffizienten: c_b. Dessen Betragsquadrat gibt dann die Wahrscheinlichkeit für das 'Blinken' des Markers an.
  Beispiel:

$$
\begin{aligned}
|\phi> \;=\; & c_0(|00> + |10> + \cdots + |n-1, 0>) \\
& c_1(|01> + |11> + \cdots + |n-1, 1>) \\
& \cdots \\
& c_{n-1}(|0, n-1> + |1, n-1> \cdots + |n-1, n-1>)
\end{aligned} \tag{4.9}
$$

4.3 Eigenschaften des Interferenzmusters

4.3.1 Dichtematrix und reduzierte Dichtematrix

a) Gesamt-Dichtematrix:

$$\hat{\rho} = \sum_{m,\sigma,m',\sigma'} c_{m,\sigma} \cdot c^*_{m',\sigma'} |m,\sigma >< m',\sigma'| \tag{4.10}$$

b) reduzierte Dichtematrix:
Die reduzierte Dichtematrix im Quantonsubraum(1) ergibt sich durch Spurbildung der Dichtematrix über den Marker(2):$\hat{\rho}_{red} = tr_2\{\hat{\rho}\}$.
Die Elemente der reduzierten Dichtematrix berechnen sich damit zu:

$$\begin{aligned} \rho^{red}_{i,j} &= \sum_{b=0}^{n-1} \sum_{m,\sigma,m',\sigma'=0}^{n-1} c_{m,\sigma} \cdot c^*_{m',\sigma'} \underbrace{< i,b|m,\sigma >}_{\delta_{i,m}\delta_{b,\sigma}} \underbrace{< m',\sigma'|j,b >}_{\delta_{j,m'}\delta_{b,\sigma'}} \\ &= \sum_{b} c_{i,b} \cdot c^*_{j,b} \end{aligned} \tag{4.11}$$

Die reduzierte Dichtematrix schreibt sich damit als:

$$\hat{\rho}_{red} = \sum_{i,j=0}^{n-1} \sum_{b=0}^{n-1} c_{i,b} \cdot c^*_{j,b} |i >< j| \tag{4.12}$$

4.3.2 Interferenzmuster

Die Verwendung der Welcher-Weg-Detektoren und die verschiedenen Verschaltungsmöglichkeiten dieser Detektoren ermöglichen unterschiedlich grosse Welcher-Weg-Information. Analog zu den entsprechenden Szenarien am Doppelspalt wirkt sich die Beschaffung dieser Information auch auf das Interferenzmuster aus. Dieses lässt sich aus dem Zustandsvektor allgemein berechnen als Erwartungswert des Gesamtzahloperators:

$$P =< \psi|\hat{N}(1) \otimes \hat{1}(2)|\psi >= tr\left\{\hat{\rho}_{red} \cdot \hat{N}(1)\right\} \tag{4.13}$$

Mit Gl.(4.12) und Gl.(3.9) ergibt sich für das Interferenzmuster:

$$\begin{aligned} P(z) &= tr\{\hat{\rho}\hat{N}\} \\ &= \sum_{a}\sum_{j,j'}\sum_{k,l',b} c_{k,b}c^*_{l',b} < a|j >< j'|k >< l'|a > \cdot e^{iz(j'-j)} \end{aligned} \tag{4.14}$$

und daraus analog zu Gl.(3.37):

$$\boxed{P = \sum_{j,j',b} c_{j',b} \cdot c^*_{j,b} e^{iz(j'-j)} = 1 + 2\Re(\sum_{a,b=0}^{n-1}\sum_{l=1}^{n-1-a} c_{a,b} \cdot c_{a+l,b} \cdot e^{-ilz})} \tag{4.15}$$

Stellt man die Koeffizienten $c_{a,b}$ in der Euler-Form $c_{a,b} = r_{a,b}e^{i\varphi_{a,b}}$ dar, so erhält man für das Interferenzmuster:

$$P = 1 + 2\sum_{a,b=0}^{n-1}\sum_{l=1}^{n-1-a} r_{a,b} \cdot r_{a+l,b} \cos\left(\varphi_{a,b} - \varphi_{a+l,b} - l \cdot z\right) \tag{4.16}$$

- Spezialfall:
  Ist die Markierung eindeutig, das heisst liegt die Welcher-Weg-Information vollständig vor, so hat der Zustandsvektor die Form:

  $$|\phi >= c_{0a}|0a > + c_{1b}|1b > + \cdots \tag{4.17}$$

  Das heisst, zu jedem Markerindex(a,b,c,...) gibt es nur einen Spaltindex (1,2,3...) (vgl. Kap.3.2.1). Mit Gl.(4.16) ergibt sich damit für das Interferenzmuster:

  $$P(z) = \sum_{j,j',b} c_{j',b} \cdot c^*_{j,b} \cdot e^{iz(j'-j)} \tag{4.18}$$

  $$\overset{\text{Beiträge nur für j'=j}}{=} \sum_{j,b} |c_{j,b}|^2 = 1 \tag{4.19}$$

  Wie erwartet, zeigen sich in diesem Fall keine Muster(P(z)=const.).

4.3.3 Zerlegung in Subensemble-Muster

Gleichung(4.15) des Interferenzmusters lässt sich wie folgt zerlegen:

$$\begin{aligned} P(z) &= \sum_b \underbrace{\sum_{j,j'} c_{j'b} \cdot c^*_{j,b} \cdot e^{iz(j'-j)}}_{P_b} \\ &= \sum_b P_b(z) \end{aligned} \tag{4.20}$$

Wobei mit reellen Koeffizienten für P_b gilt(vgl. Gleichung (4.16)):

$$\boxed{P_b = \sum_a c^2_{ab} + 2\sum_{a=0}^{n-1}\sum_{l=1}^{n-1-a} c_{a,b}c_{a+l,b} \cdot \cos(lz)} \tag{4.21}$$

Es zeigt sich also, dass das erscheinende Interferenzmuster als Überlagerung einzelner Untermuster P_b aufgefasst werden kann. Jedes dieser Untermuster lässt sich einem Markerzustand(b) zuordnen. Das heisst, man erhält diese Zerlegung in Untermuster, wenn man Quanton-Subensemble zu festem Markerzustand b bildet. (vgl.:Fringes und Antifringes beim Quantenradierer). (Siehe Beispiel 4.4.3))

4.3.4 Simulationen

Je nach Art und Anzahl der Markerkombinationen lassen sich auch Interferenzmuster erzeugen, die den Mustern verschiedener Gittertypen ohne Marker sehr ähnlich sind. Es ist jedoch nicht möglich vollständige Identität zu bekommen(siehe unten). Das Interferenzmuster des Doppelspalts besitzt zum Beispiel die Form 1+cos(z); das heisst es enthält neben dem konstanten Wert 1 nur noch die Funktion cos(z). Mit einem Gitter der Spaltzahl n lässt sich ein ähnliches Interferenzmuster erzeugen: Wie aus Gleichung(4.16)hervorgeht, müssen dazu lediglich die geeigneten Koeffizienten ungleich null sein, das heisst die Marker müssen entsprechend kombiniert werden.
Für den typischen Doppelspaltterm cos(z) muss nach Gleichung (4.16) mindestens ein Koeffizientenpaar der Form $c_{a,b}, c_{a+1,b}$ existieren.
Beispiel:
Der Zustand $|\psi >= c_{00}|00 > +c_{11}|11 > + \cdots + c_{88}|88 > +c_{78}|78 >$ hat somit das Interferenzmuster: $P = 1 + 2c_{78}c_{88} \cdot \cos(z)$. Aufgrund der Normierungsbedingung

gilt jedoch:

$$\begin{aligned} c_{78} &= \sqrt{1-(c_{00}^2+...+c_{88}^2)} \\ \text{somit gilt} & \\ c_{78}c_{88} &= \underbrace{\sqrt{1-(c_{00}^2+...+c_{88}^2)}}_{<1} \underbrace{\cdot c_{88}}_{<1} < 1 \qquad (4.22) \\ & \text{(aber nicht notwendigerweise } = \frac{1}{2}\text{)} \end{aligned}$$

Das heisst, das hiermit erzeugte Interferenzmuster gleicht nicht exakt dem eines Doppelspalts. (Weitere Beispiel ab 4.4.4)

Allgemein kann man bei einem Gitter mit n Spalten Interferenzmuster, die den Interferenzmustern von Gittern mit einer Spaltanzahl $\tilde{n} < n$ in ihrer Wellenform sehr ähnlich sehen, erzeugen:
Eine mögliche Methode ist die Folgende:
Man verknüpft jeden Detektor a=k mit 'seinem' Marker b=k. Zusätzlich wird der Detektor a=0 noch mit den Markern $b = 1, 2, ..., \tilde{n} - 1$ verknüpft. Wählt man die zugehörigen Koeffizienten $c_{01} = \frac{\alpha_1}{c_{11}}, c_{02} = \frac{\alpha_2}{c_{22}}, ..., c_{0\tilde{n}-1} = \frac{\alpha_{\tilde{n}-1}}{c_{\tilde{n}-1,\tilde{n}-1}}$, so bekommt man, das Interferenzmuster:

$$P(z) = 1 + \alpha_1 \cos(z) + \alpha_2 \cos(2z) + ... + \alpha_{\tilde{n}-1} \cos((\tilde{n}-1)z) \qquad (4.23)$$

Anmerkung: Die genaue Bestimmung der Koeffizienten erweist sich jedoch bei vorgegebenem Muster als schwierig.
Könnte man die Koeffizienten α_i entsprechend den Koeffizienten aus Gleichung(3.24) wählen, so würde man exakt das Interferenzmuster eines Gitters mit $\tilde{n}$ Spalten erhalten. Die Grösse der Koeffizienten ist jedoch durch die Normierungsbedingung $\sum_{a,b=0}^{n-1} |c_{a,b}|^2 = 1$ so eingeschränkt, dass eine derartige Wahl der Koeffizienten nicht möglich ist:
In die Kosinus-Terme des Interferenzmusters des Gitters mit $\tilde{n}$ Spalten gehen alle Koeffizienten c_{ab} als Vorfaktoren (A) ein. Für ein Gitter mit $n > \tilde{n}$ Spalten gibt es jedoch immer mindestens einen Koeffizienten c_{ab} mehr, der nicht in die Vorfaktoren (B) der Kosinus-Terme dieses Musters eingeht, aber dennoch in der Normierung auftaucht. Somit können in diesem Fall die Vorfaktoren (B) nicht alle den Vorfaktoren (A) des Originalmusters gleich sein. Die Muster enthalten zwar dieselben Kosinus-Terme, aber nicht in der gleichen Gewichtung → Die Muster sind sich ähnlich, aber nicht gleich.

4.4 Beispiele

4.4.1 Interferenzmuster für 5 Spalte mit Marker

Die Koeffizienten seien wie folgt gewählt:

$$c_{00} = \sqrt{\frac{9}{50}}, c_{10} = \sqrt{\frac{1}{50}}, c_{20} = \sqrt{\frac{6}{50}}, c_{30} = \sqrt{\frac{2}{50}}, c_{40} = \sqrt{\frac{6}{50}},$$
$$c_{01} = \sqrt{\frac{6}{50}}, c_{11} = \sqrt{\frac{3}{50}}, c_{21} = \sqrt{\frac{5}{50}}, c_{31} = \sqrt{\frac{8}{50}}, c_{41} = \sqrt{\frac{4}{50}}$$

Das heisst, es gibt nur 2 Markerzustände, 0 und 1, und diese sind jeweils mit allen Spalten verknüpft. Somit lässt sich aus dieser Kombination keine Welcher-Weg-Information bestimmen. Dementsprechend sieht das Interferenzmuster dem Muster eines 5-Spalt-Gitters ohne Marker ähnlich:

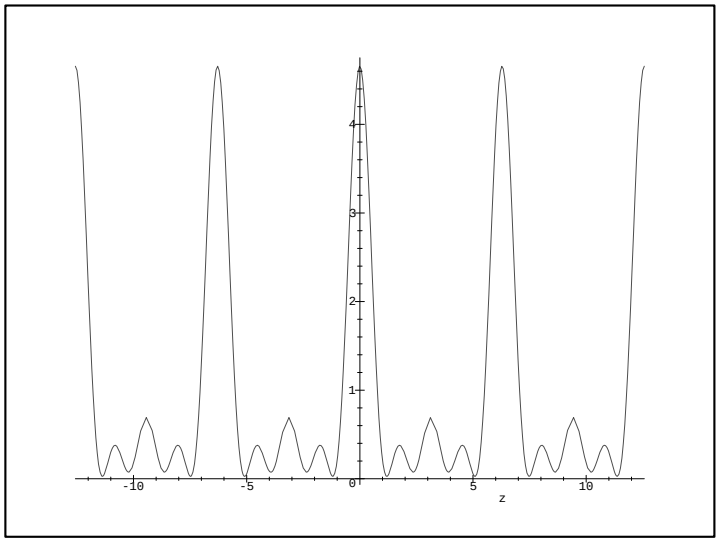

Abb. 4.5: Muster für 5 Spalte

In einem 2.Beispiel seien die Marker so kombiniert, dass bei Detektion im Spalt a die Marker von a und a+1 'blinken' können; man bekommt durch die Messung also ein Teil der Welcher-Weg-Information. Als Koeffizienten wurden gewählt:

$$c_{00} = \sqrt{\frac{9}{50}}, c_{11} = \sqrt{\frac{1}{50}}, c_{22} = \sqrt{\frac{6}{50}}, c_{33} = \sqrt{\frac{2}{50}}, c_{44} = \sqrt{\frac{6}{50}},$$
$$c_{01} = \sqrt{\frac{6}{50}}, c_{12} = \sqrt{\frac{3}{50}}, c_{23} = \sqrt{\frac{5}{50}}, c_{34} = \sqrt{\frac{8}{50}}, c_{40} = \sqrt{\frac{4}{50}}$$

Als Interferenzmuster ergibt sich:

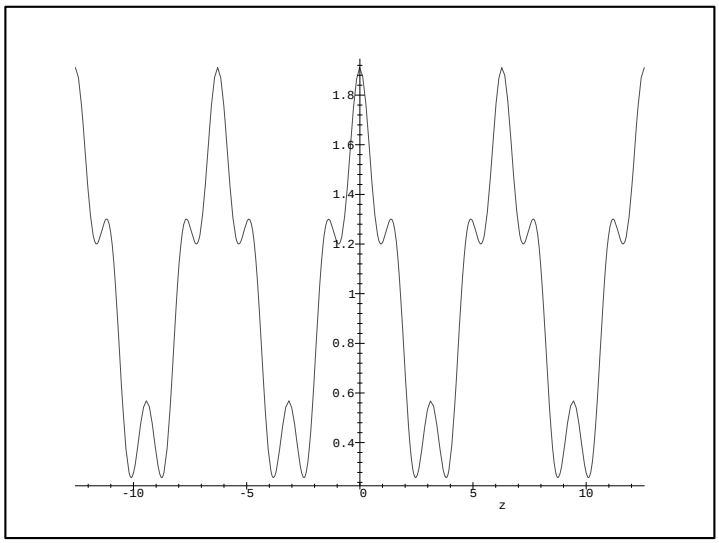

Abb. 4.6: Muster für 5 Spalte

4.4.2 Interferenzmuster für 10 Spalte

Im ersten Beispiel sei die Anzahl der Verknüpfungen $\# = 3$ und alle Koeffizienten seien gleich gross. Gemäss Gleichung(4.4) gilt somit:

$c_{aa} = c_{a+1} = c_{a+2} = \frac{1}{\sqrt{30}}$

Damit ergibt sich dieses Muster:

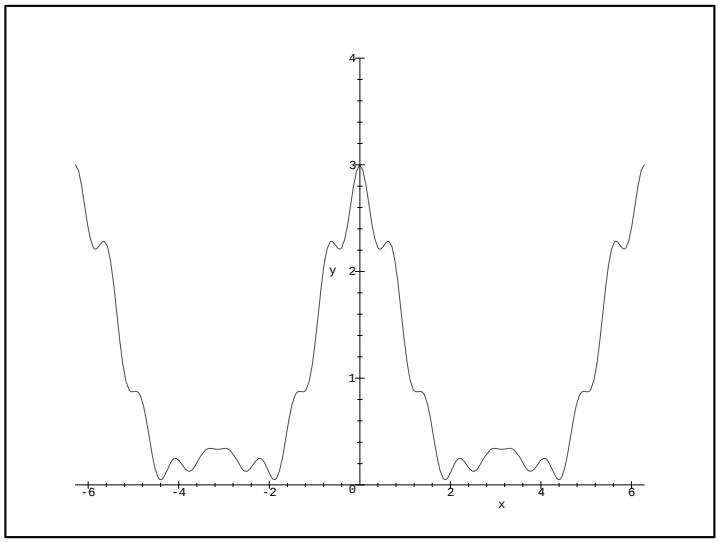

Abb. 4.7: Muster für 10 Spalte

Wie im vorigen Beispiel ist die Anzahl der Verküpfungen $\# = 3$. Nun wird jedoch eine andere Gewichtung der Koeffizienten gewählt:

$c_{aa} = \sqrt{\frac{10}{(3+9)\cdot 10}}, c_{a,a+1} = c_{a,a+2} = \sqrt{\frac{1}{(3+9)\cdot 10}}$

Man erhält damit das folgende Muster:

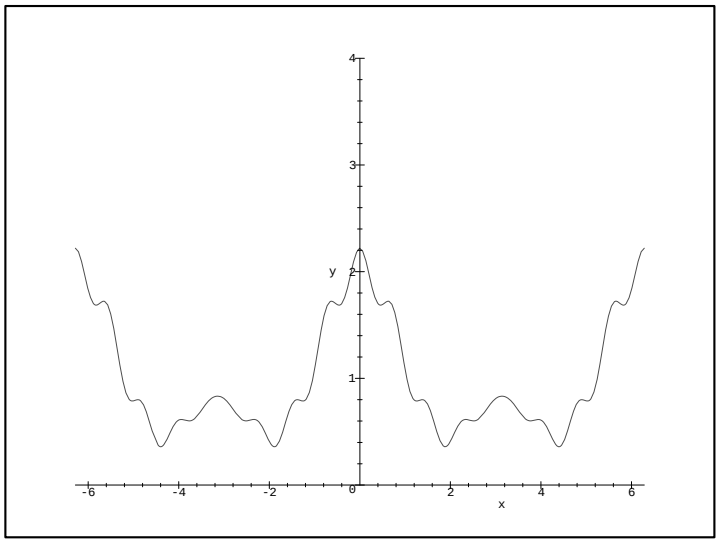

Abb. 4.8: Muster für 10 Spalte

4.4.3 Subensemble-Muster für 4 Spalte:

Betrachtet werden 4 Spalte mit folgenden Markerkombinationen:

$c_{a,a} = c_{00} = c_{11} = c_{22} = c_{33} = \sqrt{\frac{10}{16 \cdot 4}}$
$c_{a,a+1} = c_{01} = c_{12} = c_{23} = c_{30} = \sqrt{\frac{5}{16 \cdot 4}}$
$c_{a,a+2} = c_{02} = c_{13} = c_{20} = c_{31} = \sqrt{\frac{1}{16 \cdot 4}}$

Die zugehörigen Untermuster zu festem b haben gemäss Gleichung(4.21) die Form:

$$\begin{aligned}
P_0 &= c_{00}^2 + c_{20}^2 + c_{30}^2 + c_{20}c_{30} \cdot \cos(z) + c_{00}c_{20} \cdot \cos(2z) + c_{00}c_{30} \cdot \cos(3z) \\
&= \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{5}}{64} \cdot \cos(z) + \frac{\sqrt{10}}{64} \cdot \cos(2z) + \frac{\sqrt{50}}{64} \cdot \cos(3z) && (4.24) \\
P_1 &= c_{01}^2 + c_{11}^2 + c_{31}^2 + c_{01}c_{11} \cdot \cos(z) + c_{11}c_{31} \cdot \cos(2z) + c_{01}c_{31} \cdot \cos(3z) \\
&= \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{50}}{64} \cdot \cos(z) + \frac{\sqrt{5}}{64} \cdot \cos(2z) + \frac{\sqrt{10}}{64} \cdot \cos(3z) && (4.25) \\
P_2 &= c_{02}^2 + c_{12}^2 + c_{22}^2(c_{02}c_{12} + c_{12}c_{22}) \cdot \cos(z) + c_{02}c_{22} \cdot \cos(2z) \\
&= \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{5} + \sqrt{50}}{64} \cdot \cos(z) + \frac{\sqrt{10}}{64} \cdot \cos(2z) && (4.26) \\
P_3 &= c_{13}^2 + c_{23}^2 + c_{33}^2 + (c_{23}c_{33} + c_{13}c_{23}) \cdot \cos(z) + c_{13}c_{33} \cdot \cos(2z) \\
&= \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{5} + \sqrt{50}}{64} \cdot \cos(z) + \frac{\sqrt{10}}{64} \cdot \cos(2z) && (4.27)
\end{aligned}$$

Offensichtlich ist: $P_2 = P_3$.
Das Gesamtmuster und seine Untermuster sehen so aus:

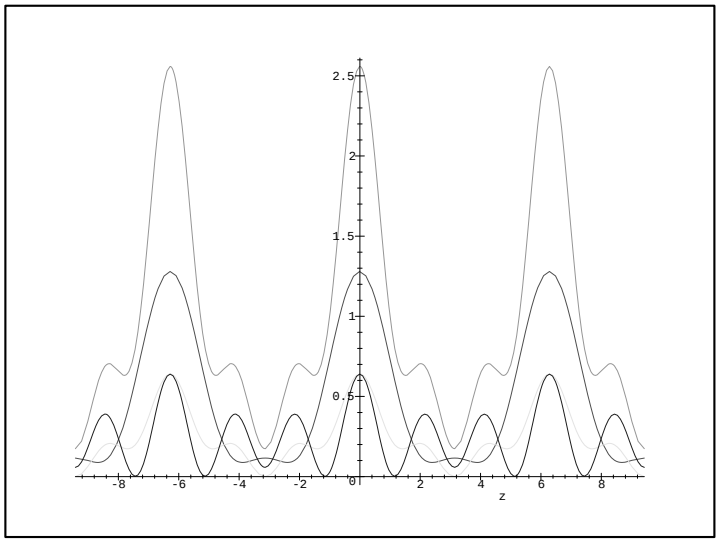

Abb. 4.9: Muster und 3 Untermuster für 4 Spalte

4.4.4 Simulationen mit Doppelspalt-Charakter

Um ein dem Doppelspalt-Interferenzmuster ähnliches Muster an einem Gitter mit $n > 2$ Spalten zu bekommen gibt es mehrere mögliche Markerkombinationen. In diesem und dem nächsten Beispiel wird dies für ein Gitter mit n=5 Spalten und geeigneter Markerkombination gezeigt.
Wie bereits erwähnt muss dazu nach Gleichung (4.16) mindestens ein Koeffizientenpaar der Form $c_{a,b}, c_{a+1,b}$ existieren.
Der Zustandsvektor sei:

$$\begin{aligned} |\phi> &= c_{00}|00> + c_{11}|11> + c_{22}|22> + c_{33}|33> + c_{44}|44> + c_{01}|01> \\ &= \frac{1}{\sqrt{6}}(|00> + |11> + |22> + |33> + |44> + |01>) \end{aligned} \tag{4.28}$$

Das Interferenzmuster besitzt somit die Form:

$$P = 1 + \frac{1}{6}\cos(z) \tag{4.29}$$

und ist in Abb.(4.10) dargestellt:

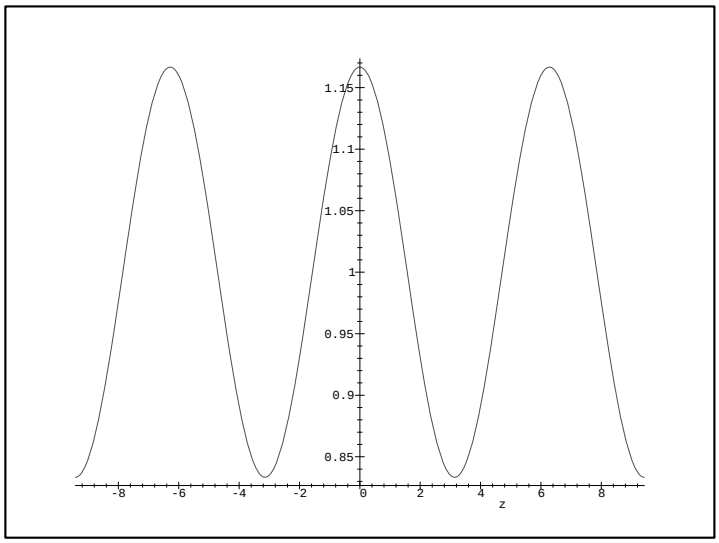

Abb. 4.10: Doppelspalt-Muster für 5 Spalte

Statt ein Koeffizientenpaar wie im vorigen Beispiel kann es natürlich auch mehrere geeignete Paare geben.
Der Zustandsvektor sei nun:

$$\begin{aligned} |\psi> &= c_{00}|00> + \cdots + c_{44}|44> + c_{01}|01> + c_{23}|23> + c_{34}|34> \\ &= \frac{1}{\sqrt{8}}(|00> + \cdots + |44> + |01> + |23> + |34>) \end{aligned} \tag{4.30}$$

In diesem Fall ist das Interferenzmuster

$$P = 1 + \frac{3}{8}\cos(z) \tag{4.31}$$

4.4.5 Simulation mit 4-Spalt-Charakter

In diesem Beispiel wird an einem Gitter mit 10 Spalten ein Muster, dass dem Interferenzuster eines Gitters mit 4 Spalten ähnlich sieht, simuliert: Der Zustandsvektor sei:

$$|\psi> = c_{00}|00> + \cdots + c_{99}|99> + c_{01}|01> + c_{02}|02> + c_{03}|03> \tag{4.32}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{13}}(|00> + \cdots + |99> + |01> + |02> + |03>) \tag{4.33}$$

Als Interferenzmuster ergibt sich hier:

$$P = 1 + \frac{1}{13}\cos(z) + \frac{1}{13}\cos(2z) + \frac{1}{13}\cos(3z) \tag{4.34}$$

Dies Muster sieht dem Interferenzmuster eines Gitters mit 4 Spalten sehr ähnlich:

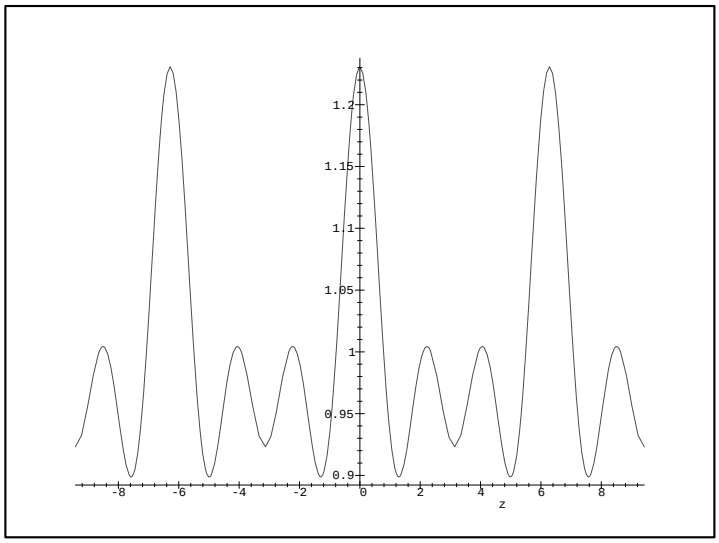

Abb. 4.11: 4-Spaltmuster für 10 Spalte

4.5 Zusammenfassung

Setzt man Welcher-Weg-Detektoren in die Spalte eines Gitters, so verschwindet das Interferenzmuster, da vollständige Welcher-Weg-Information gemessen wird. Kombiniert man aber durch entsprechende Verschaltungen die Detektoren so, dass prinzipiell keine eindeutige Welcher-Weg-Information bestimmt werden kann, so erscheint

wieder ein Interferenzmuster. Die Art des Interferenzmusters hängt dabei von der Art der Verschaltung, und dem damit möglichen, Informationsgewinn ab. Somit lassen sich durch geeignete Verschaltungen Interferenzmuster, die den Mustern von Gittern mit kleinerer Spaltzahl in ihrem Verlauf(z.B. Anzahl der Nebenmaxima zwischen den Hauptmaxima) sehr ähnlich sind, simulieren. Ebenfalls lassen sich die entstehenden Interferenzmuster wie beim Quantenradierer (siehe nächstes Kapitel) durch Zuordnen der auf dem Schirm detektierten Moden zum detektierenden Marker in Untermuster (Fringes) zerlegen.

Kapitel 5

Der Quantenradierer

5.1 Interferenz

Der Interferenz-Effekt am Doppelspalt bzw. allgemein am Gitter ohne Information über das Interferenzmuster wird folgendermassen erklärt:
Der Zustandsvektor des Photons lässt sich darstellen in der Form:

$$|\psi >= \frac{1}{\sqrt{2}}(|1 > +|2 >) \tag{5.1}$$

d.h. der Photon-Zustand beschreibt die Tatsache, dass das Photon beide Spalte passieren kann. Dieser Zustandsvektor beschribt mein maximal mögliches Wissen bezüglich der Photon-Pfade.
Die Dichtematrix hat damit die Form:

$$\rho_Q = \frac{1}{2}(|1 >< 1| + |2 >< 2| + \underbrace{|1 >< 2| + |2 >< 1|}_{Interferenz-Terme}) \tag{5.2}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \tag{5.3}$$

Die darin enthaltenen Terme $|1 >< 2|$ und $|2 >< 1|$ beschreiben die Interferenz aus dem Zusammenwirken der beiden Wege.

5.2 Welcher-Weg-Messung

Werden nun in die beiden Wege Messgeräte (Marker) gestellt, aus denen abgelesen werden kann, welchen Weg das Photon genommen hat, so ist man, prinzipiell, im Besitz von Welcher-Weg-Information. Prinzipiell bedeutet, dass es irrelevant ist, ob die Information tatsächlich genutzt, bzw. das Messergebnis abgelesen, wird oder nicht. Quantenmechanisch macht sich das Einbringen der Marker durch die Verknüpfung von Photon-Zustand und Marker-Zustand zu einem Produkt-Zustand bemerkbar. Die Messung sorgt dann dafür, dass der Zustand verschränkt ist und nicht mehr als Produkt von $|Photon - Zustand> \otimes |Marker - Zustand>$ gesehen werden kann, sondern als Summe von Teilprodukten:

$$|\psi> = \frac{1}{\sqrt{2}}(\underbrace{|1>_Q}_{Photon(Quanton)} \otimes \underbrace{|1>_M}_{Marker} + |2>_Q \otimes |2>_M) \tag{5.4}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(|11> + |22>) \tag{5.5}$$

Die Dichtematrix hat in diesem Fall die Form:

$$\rho_{ges} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{5.6}$$

Woraus sich durch Ausspuren für das Quanton folgende Dichtematrix ergibt:

$$\rho_{Quanton} = tr_M\{\rho_{ges}\} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{5.7}$$

Wie sich hier zeigt, sind in diesem Fall die Interferenz-Terme verschwunden,P(z)=1; es ist also kein Interferenzmuster mehr zu sehen. Das Muster auf dem Schirm ergibt sich durch aufsummieren der ankommenden Photonen. Selektiert man jedes Photon nach seinem Markerzustand, so zeigen die beiden zugrundeliegenden Basismuster zu $|1><1|$ und $|2><2|$ auch keine Interferenz, $P_b(z) = \frac{1}{2}$.

5.3 Die Idee des Quantenradierers

Statt in der Messbasis aus dem vorherigen Abschnitt kann man den Marker jedoch auch in einer anderen Basis messen; in diesem Fall ist dann keine Welche-Weg-Information bezüglich der beiden Spalte mehr vorhanden. Die Auswirkungen werden im Folgenden untersucht.
Als neue Messbasis diene beispielsweise:

$$|M_\pm >= \frac{1}{\sqrt{2}}(|1> \pm |2>) \tag{5.8}$$

Entsprechend kann man auch den Zustandsvektor des Quantons bezüglich der Basis:

$$|\psi_\pm >= \frac{1}{\sqrt{2}}(|1> \pm |2>) \tag{5.9}$$

betrachten.
Der Gesamt-Zustandsvektor wird dann:

$$\begin{aligned}
|\phi> &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|11> + |22>\right) && (5.10)\\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}\Bigg(\underbrace{(|11> + |22> + |12> + |21>)}_{Fringes} && (5.11)\\
&\quad + \underbrace{(|11> + |22> - |12> - |21>)}_{Antifringes}\Bigg) && (5.12)\\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left((|1> + |2>) \otimes (|1> + |2>)\right.\\
&\quad \left. + (|1> - |2>) \otimes (|1> - |2>)\right) && (5.13)\\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(|\psi_+> \otimes |M_+> + |\psi_-> \otimes |M_->\right) && (5.14)
\end{aligned}$$

Anmerkung: Obige Entwicklung des Zustandsvektors lässt sich auch in umgekehrter Reihenfolge darstellen. Man betrachtet dann nicht zuerst das Ergebnis in Form der 'normalen' pfadinformativen Basis $|1>$ und $|2>$ und entwickelt dieses in die neue Basis, sondern startet mit der Verschränkung des Photon-Zustandsvektors mit dem Marker-Zustandsvektor, jeweils in der neuen Basis, und gelangt zum Schluss zu dem Ergebnis, dass das Gesamt-Muster gleich bleibt.

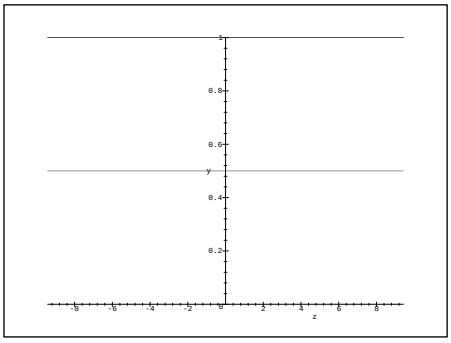

Abb. 5.1: **Welcher-Weg-Information:**Zerlegung des Interferenzbildes P(z)=1 bei vorhandener Weg-Information in zwei $P_{1,2} = \frac{1}{2}$-Terme

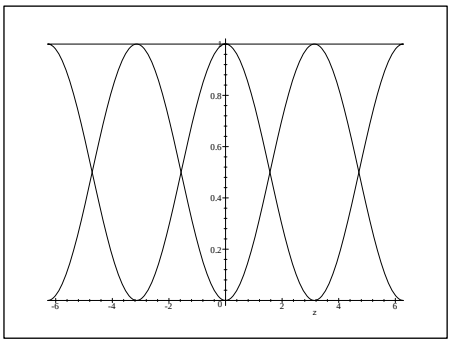

Abb. 5.2: **Quantenradierer:**Das strukturlose Interferenzbild P(z)=1 lässt sich nun in 'Fringes' ,$P_+ = \frac{1}{2}(1 + \cos(z))$, und 'Antifringes' ,$P_- = \frac{1}{2}(1 - \cos(z))$, zerlegen

Auch hier zeigt sich durch Gl.(5.10), dass das Photon kein Interferenzmuster zeigt. Im Gegensatz zum vorherigen Abschnitt können jedoch durch Subensemble, das heisst durch die Zuordnung der Photonen zum jeweiligen Markerzustand 2 Interferenzmuster, sogenannte Fringes und Antifringes (5.12), gewonnen werden:
Die zu $|M_+ >$ gehörenden Photonen ergeben das Interferenzmuster der 'Fringes' $|\psi_+ >$; die zu $|M_- >$ gehörenden Photonen ergeben die 'Antifringes' $|\psi_- >$ (siehe Abb.(5.2))
Bei der Wahl dieser Mess-Basis kann man aus dem Markerzustand prinzipiell keine Welcher-Weg-Information bekommen;diese wurde 'ausradiert'. Im Gegensatz zu vorher kann man jedoch durch **Ablesen** des Markers und nachfolgender Selektion Interferenzmuster bekommen!
Da die Zuordnung Photon $\rightarrow$ Markerzustand auch erst nach dem Auftreffen des Photons auf dem Schirm erfolgen kann, spricht man hier mitunter von 'delayed choice'. Da jedoch nicht das Ablesen des Markers, sondern die Selektion des Photons

nach der Messbasis des Markers die Zerlegung in Fringes und Antifringes möglich macht und die dafür relevante Wechselwirkung schon beim Passieren des Markers geschieht, ist dies keine wirkliche 'delayed choice'.

5.4 Der Quantenradierer am Gitter

5.4.1 Vollständiger Quantenradierer

Einen Quantenradierer hat man also, wenn man die Messbasis der Marker so wählt, dass die Markerzustände keinerlei Welche-Weg-Information enthalten. Diese Basis ergibt sich allgemein aus einer Drehung der eigentlichen Basis(Weg-Basis), welche die Weg-Information enthält. Das heisst, eine Quantenradierer-Basis erhält man durch Anwendung einer Drehmatrix, also einer unitären Matrix, auf die Weg-Basis.
Entsprechend der Spaltzahl n des verwendeten Gitters gibt es dabei n verschiedene Basis-Vektoren. Das bedeutet das Interferenzmuster lässt sich in n Teil-Muster zerlegen, da zu jedem Basis-Vektor ein Muster gehört.

Beispiel:
Für ein Gitter mit 3 Spalten und Marker sind die Basis-Vektoren(Weg-Basis):
$|1>, |2>, |3>$

Mit den 3 Drehwinkeln $\alpha = \beta = \gamma = 45°$ ergibt sich die Drehmatrix zu:

$$\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2-\sqrt{2} & 2 & 2+\sqrt{2} \\ -2-\sqrt{2} & 2 & -2+\sqrt{2} \\ -2 & -2\sqrt{2} & 2 \end{pmatrix} \tag{5.15}$$

Eine Quantenradierer-Basis ist somit:

$$|a> \;=\; \frac{1}{4}\Big((2-\sqrt{2})|1> +2|2> +(2+\sqrt{2})|3>\Big) \tag{5.16}$$

$$|b> \;=\; \frac{1}{4}\Big((-2-\sqrt{2})|1> +2|2> +(-2+\sqrt{2})|3>\Big) \tag{5.17}$$

$$|c> \;=\; \frac{1}{4}\Big(-2|1> -2\sqrt{2}|2> +2|3>\Big) \tag{5.18}$$

Nach der Präparation ergibt sich damit folgender Photon-Marker-Zustandsvektor:

$$
\begin{aligned}
|\phi> &= \frac{|a>_{Quanton} \otimes |a>_{Marker} + |b>_Q \otimes |b>_M + |c>_Q \otimes |c>_M}{\sqrt{3}} \\
&= \frac{|aa> + |bb> + |cc>}{\sqrt{3}} \qquad (5.19) \\
&= \frac{1}{16\sqrt{3}} \\
&\quad \Bigg(\Bigg[\underbrace{\begin{array}{c} ((6-4\sqrt{2})|11> + (4-2\sqrt{2})(|12> + |21>) + 4|22> \\ +2(|13> + |31>) + (4+2\sqrt{2})(|23> + |32>) + (6+4\sqrt{2})|33>) \end{array}}_{Fringes1} \Bigg] \\
&\quad + \Bigg[\underbrace{\begin{array}{c} ((6+4\sqrt{2})|11> - (4+2\sqrt{2})(|12> + |21>) + 4|22> \\ +2(|13> + |31>) + (-4+2\sqrt{2})(|23> + |32>) + (6-4\sqrt{2})|33>) \end{array}}_{Fringes2} \Bigg] \\
&\quad + \Bigg[\underbrace{\begin{array}{c} (4|11> + 4\sqrt{2}(|12> + |21>) + 8|22> \\ -4(|13> + |31>) - 4\sqrt{2}(|23> + |32>) + 4|33>) \end{array}}_{Fringes3} \Bigg] \Bigg) \qquad (5.20) \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}}(|11> + |22> + |33>) \qquad (5.21)
\end{aligned}
$$

(Anmerkung: Wie bereits erwähnt, kann diese Entwicklung des Zustandsvektors auch umgekehrt erfolgen: Man startet mit dem Ergebnis und gelangt über die Zerlegung des Ergebnisses in Teil-Muster zur Darstellung des Zustandsvektors in der neuen Vektor-Basis.)

Mathematisch erhält man dabei die folgenden Teil- und Gesamtmuster:

$$F_a(z) = \frac{1}{48}(16 + 8\cos(z) + 2\cos(2z)) \tag{5.22}$$

$$F_b(z) = \frac{1}{48}(16 - 8\cos(z) + 2\cos(2z)) \tag{5.23}$$

$$F_c(z) = \frac{1}{48}(16 - 4\cos(2z)) \tag{5.24}$$

bzw. in der Weg-Basis

$$F_1(z) = \frac{1}{3} \tag{5.25}$$

$$F_2(z) = \frac{1}{3} \tag{5.26}$$

$$F_3(z) = \frac{1}{3} \tag{5.27}$$

$$\tag{5.28}$$

wobei für das Gesamt-Muster gilt:

$$P(z) = F_a(z) + F_b(z) + F_c(z) = F_1(z) + F_2(z) + F_3(z) = 1 \tag{5.29}$$

Das zugehörige optische Muster ist:

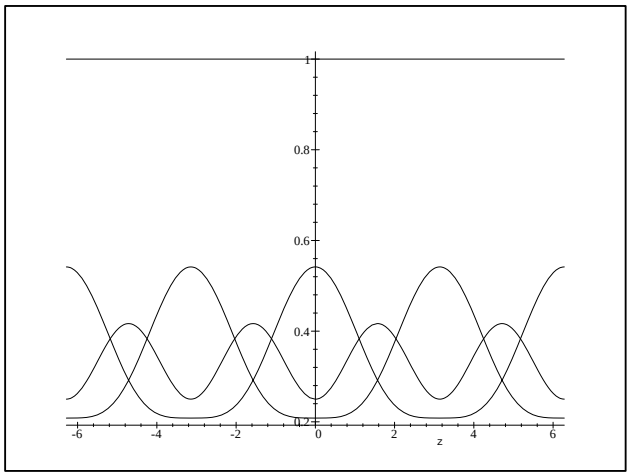

Abb. 5.3: **Quantenradierer beim n=3 Gitter:**Zerlegung des Interferenzbildes P(z)=1 in Teil-Muster

5.4.2 Partieller Quantenradierer

Statt die gesamte Mess-Basis zu drehen, das heisst mit allen Markern so zu messen, dass keine Weg-Information zu bekommen ist, kann man dies auch nur mit einem Teil davon tun.

Beispiel 1:
Bei einem Gitter mit 6 Spalten seien 3 der Marker als Quantenradierer geschaltet, die übrigen 3 bleiben in der 'Weg-Basis'.
Die Basis-Vektoren seien:
$|0>, |4>, |5>$, sowie

$$\begin{aligned}
|a> &= \frac{1}{4}\Big((2-\sqrt{2})|1> +2|2> +(2+\sqrt{2})|3>\Big) \\
|b> &= \frac{1}{4}\Big((-2-\sqrt{2})|1> +2|2> +(-2+\sqrt{2})|3>\Big) \\
|c> &= \frac{1}{4}\Big(-2|1> -2\sqrt{2}|2> +2|3>\Big)
\end{aligned}$$

Der Zustandsvektor ergibt sich zu:

$$|\phi> = \frac{1}{\sqrt{6}}(|00> + \underbrace{|aa> +|bb> +|cc>}_{\text{vgl. Gl.(5.20)}} +|44> +|55>) \tag{5.30}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{6}}(|00> +|11> +|22> +|33> +|44> +|55>) \tag{5.31}$$

Das zugehörige Interferenzmuster enthält in seiner mathematischen Form folgende Teil- und Gesamtmuster:

$$F_a = \frac{1}{96}16 \tag{5.32}$$

$$F_b = \frac{1}{96}(16 + 8\cos(z) + 2\cos(2z)) \tag{5.33}$$

$$F_c = \frac{1}{96}(16 - 8\cos(z) + 2\cos(2z)) \tag{5.34}$$

$$F_d = \frac{1}{96}(16 - 4\cos(2z)) \tag{5.35}$$

$$F_e = \frac{1}{96}16 \tag{5.36}$$

$$F_f = \frac{1}{96}16 \tag{5.37}$$

$$P = F_a + F_b + F_c + F_d + F_e + F_f = 1 \tag{5.38}$$

Das optische Muster ist:

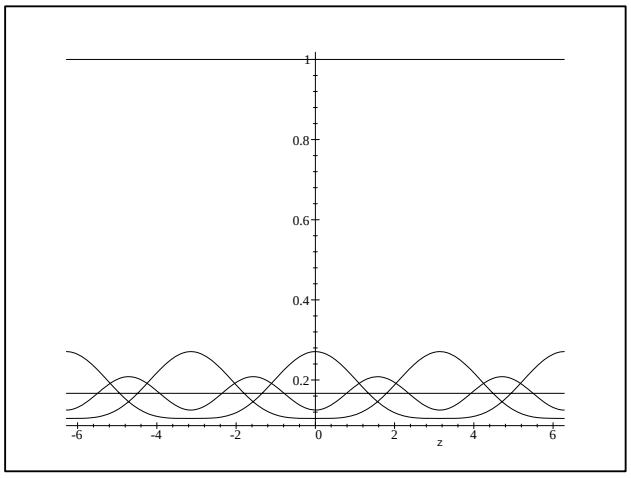

Abb. 5.4: **Teil-Quantenradierer beim Gitter:**Im Vergleich zum vorigen Beispiel ist die z-abhängige Amplitude der Teil-Muster kleiner

Beispiel 2:
Bei dem Szenario aus Beispiel 1 können jedoch auch andere Marker als Radierer geschaltet sein. Basis-Vektoren seien nun:
$|0>, |3>, |5>$, sowie

$$
\begin{aligned}
|a'> &= \frac{1}{4}\Big((2-\sqrt{2})|1> +2|2> +(2+\sqrt{2})|4>\Big) \\
|b'> &= \frac{1}{4}\Big((-2-\sqrt{2})|1> +2|2> +(-2+\sqrt{2})|4>\Big) \\
|c'> &= \frac{1}{4}\Big(-2|1> -2\sqrt{2}|2> +2|4>\Big)
\end{aligned}
$$

Der Zustandsvektor ist nun darstellbar als::

$$
\begin{aligned}
|\psi> &= \frac{1}{\sqrt{6}}(|00> +|33> +|55> + \underbrace{|a'a'> +|b'b'> +|c'c'>}_{\text{Fringes aus Gl.(5.20),wobei } |3> \text{ durch } |4> \text{ zu ersetzen ist}} \qquad (5.39) \\
&= \frac{1}{\sqrt{6}}(|00> +|11> +|22> +|33> +|44> +|55>) \qquad (5.40)
\end{aligned}
$$

Die mathematische Form der Muster-Zerlegung ist damit:

$$F_0 = \frac{1}{96}16 \tag{5.41}$$

$$F_1 = \frac{1}{96}(16 + (4 - 2\sqrt{2})\cos(z) + (4 + 2\sqrt{2}\cos(2z) + 2\cos(3z)) \tag{5.42}$$

$$F_2 = \frac{1}{96}(16 - (4 + 2\sqrt{2})\cos(z) + (-4 + 2\sqrt{2})\cos(2z) + 2\cos(3z)) \tag{5.43}$$

$$F_3 = \frac{1}{96}16 \tag{5.44}$$

$$F_4 = \frac{1}{96}(16 + 4\sqrt{2}\cos(z) - 4\sqrt{2}\cos(2z) - 4\cos(3z)) \tag{5.45}$$

$$F_5 = \frac{1}{96}16 \tag{5.46}$$

$$P = F_0 + F_1 + F_2 + F_3 + F_4 + F_5 = 1 \tag{5.47}$$

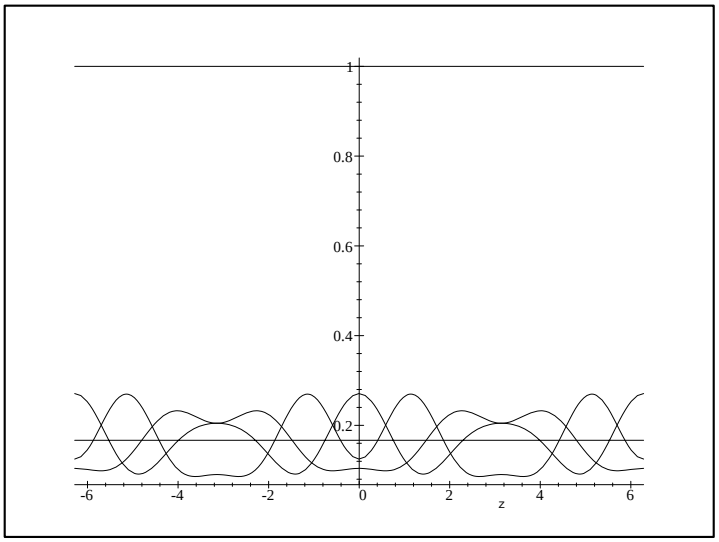

Abb. 5.5: **Teil-Quantenradierer beim Gitter:**Im Vergleich zum vorigen Beispiel hat man eine Zerlegung in völlig andere Fringes

5.5 Zusammenfassung

Das Einbringen von selektiven Welcher-Weg-Detektoren, in die Spalte eines Gitters sorgt prinzipiell für ein Verschwinden der Interferenzen auf dem Schirm; man bekommt an jeder Stelle des Schirms die gleiche Intensität, das heisst an jeder Stelle treffen gleich viele Quantons auf.
Ordnet man die einzeln auftreffenden Quantons den Markern zu, welche ihren Spaltdurchgang detektiert haben(Sub-Ensemble), so ergeben die Quantons der einzelnen Marker jeweils Untermuster. Die Art dieser Untermuster hängt von der Wahl der Marker-Basis, das heisst vom Informationsgehalt bezüglich des Weges des Quantons, ab. Je nachdem, ob man einen vollständigen oder nur einen partiellen Quantenradierer geschaltet hat, ist die Intensität der Untermuster verschieden stark und entsprechend 'gross' ist das Wissen um den Weg des Quantons.
Die einzige Marker-Basis, deren Untermuster selber wiederum keine Interferenzen haben, ist die Weg-Basis, also die Basis in der man vollständige Welcher-Weg-Information besitzt. Alle anderen Basen ergeben sich aus einer Drehung dieser Basis und führen somit zwangsläufig zu Interferenzen in den Untermustern. Im folgenden Kapitel wird nun versucht einen quantitativen Zusammenhang zwischen der Welcher-Weg-Information und dem Gesamt-Muster beziehungsweise einzelner Untermuster zu bestimmen.

Kapitel 6

Zusammenhang von Interferenzmuster und Welcher-Weg-Information

In diesem Kapitel wird versucht, den Zusammenhang zwischen der, durch die Marker ermittelten, Welcher-Weg-Information und dem Interferenzmuster, beziehungsweise der Art des Interferenzmusters, zu finden.

6.1 Doppelspalt

Der Doppelspalt ist nicht nur aufgrund seiner Spaltzahl die einfachste Form eines Gitters:
Sowohl experimentelle Versuche zur Komplementarität von Welcher-Weg-Information und Interferenzmuster als auch theoretische Analysen wurden bisher nur am Doppelspalt vorgenommen(siehe z.B. [6],[7],[8],[9]).

6.1.1 Vorhersagbarkeitsmaß nach Greenberger und Yasin

Im Jahre 1988 entdeckten Greenberger und Yasin einen analytischen Zusammenhang zwischen der Visibilität des Interferenzmusters des Doppelspalts und der 'induktiven' a priori Welcher-Weg-Information [1].

Die Visibilität eines Interferenzmusters ist definiert als (siehe z.B.[5]):

$$V = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}} \text{wobei I...Intensität P} \tag{6.1}$$

Schickt man Photonen durch einen Doppelspalt(ohne Marker), so lässt sich ihr Zustandsvektor beim Auftreffen auf dem Schirm darstellen als:
$|\psi >= a|1 > +b|2 >$,wobei $|a|^2 + |b|^2 = 1$
Das Interferenzmuster ergibt sich somit nach Gleichung(3.38) zu:

$$P = 1 + 2 \cdot |a| \cdot |b| \cdot \cos(z) \tag{6.2}$$

Die Visibilität ist in diesem Fall:

$$V = \frac{1 + 2 \cdot |a| \cdot |b| - (1 - 2 \cdot |a| \cdot |b|)}{1 + 2 \cdot |a| \cdot |b| + (1 - 2 \cdot |a| \cdot |b|)} = \frac{4 \cdot |a| \cdot |b|}{2} = 2 \cdot |a| \cdot |b| \tag{6.3}$$

Mit welcher Wahrscheinlichkeit kann man nun bei einer Welcher-Weg-Messung (am Doppelspalt) das richtige Ergebnis vorhersagen?
Sind die beiden Koeffizienten a und b gleich gross, so weiss man nichts über einen bevorzugten Weg, und die damit kleinste Trefferwahrscheinlichkeit ist $\frac{1}{2}$.
Ist jedoch einer der beiden Koeffizienten grösse als der Andere, so erzielt man das beste Ergebnis, wenn man immer auf den Spalt mit dem grösseren Koeffizienten setzt(schliesslich ist der ja auch der Wahrscheinlichere). Ist z.B $|a| > |b|$, so setzt man immer auf $|1 >$. Die Wahrscheinlichkeit das man richtig getippt hat ist dann $|a|^2$.
Zur Quantifizierung der unter diesen Umständen besseren Vorhersagbarkeit vergleicht man diese Wahrscheinlichkeit mit der Kleinstmöglichen von $\frac{1}{2}$:

$$\beta = |a|^2 - \frac{1}{2} \tag{6.4}$$

Für β gilt:$0 < \beta < \frac{1}{2}$. Um mit diesem Maß besser arbeiten zu können soll es Werte zwischen 0 und 1 annehmen; aus diesem Grund wird β mit dem Faktor 2 erweitert (dies entspricht einer Normierung auf die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$). Damit besitzt man nun eine Grösse, mit der man die Vorhersagbarkeit des Messergebnisses quantitativ wiedergeben kann:
Die Vorhersagbarkeit G, auch 'Predictability' genannt, ist somit definiert als:

$$G = 2|a|^2 - 1 \overset{|a|^2+|b|^2=1}{=} |a|^2 - |b|^2 \tag{6.5}$$

Mit den Gleichungen(6.3) und (6.5) gilt dann die Kreisgleichung:

$$\begin{aligned} V^2 + G^2 &= 4 \cdot |a|^2|b|^2 + |a|^4 - 2 \cdot |a|^2|b|^2 + |b|^4 \\ &= (|a|^2 + |b|^2)^2 = 1 \end{aligned} \tag{6.6}$$

Besteht zwischen $|1>$ und $|2>$ nur teilweise Kohärenz, so ergibt sich mit Hilfe der Schwarzschen Ungleichung aus Gleichung(6.6) die Ungleichung

$$V^2 + G^2 \leq 1 \tag{6.7}$$

6.1.2 Unterscheidbarkeitsmaß nach Englert

Englert stellt sein Szenario, eine Interferenz mit Doppelspalt und Welcher-Weg-Detektor, in einer eigentümlichen Operatorschreibweise dar, worauf hier nicht näher eingegangen werden soll(siehe [13]).
Im Gegensatz zu Greenberger und Yasin betrachtet Englert nicht den Zustand der Photonen, sondern den der Marker nach der Messung, jedoch vor dem Ablesen. Die Grösse, die nun die Rolle der Predictability übernimmt, nennt er Unterscheidbarkeit, 'Distinguishability'.
Sie ergibt sich zu:

$$D = \frac{1}{2} tr_M \left\{ |\rho_M^{(1)} - \rho_M^{(2)}| \right\} \tag{6.8}$$

wobei $\rho_M^{(1)}$ die Dichtematrix für den Detektorzustand $|1>$ und $\rho_M^{(2)}$ die Dichtematrix für den Detektorzustand $|2>$ ist.
Auch Englert erhält eine Kreis-Gleichungs-Bedingung:

$$D^2 + V^2 \leq 1 \tag{6.9}$$

6.2 Erweiterung dieser Komplementaritätsbetrachtung auf n Spalte

6.2.1 Charakterisierung des Interferenzmusters

Bei n Spalten stellt sich der Zustandsvektor der Quantons nach dem Auftreffen auf dem Schirm dar als:

$$|\psi> = \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j |j> \tag{6.10}$$

Das Interferenzmuster ist dann gemäss Gleichung(3.38):

$$P(z) = 1 + 2\sum_{a=0}^{n-1}\sum_{l=1}^{n-1-a} |\alpha_j||\alpha_{j+l}| \cdot \cos(lz) \tag{6.11}$$

Gesucht ist eine Maßfunktion V(Visibility), welche P(z) global charakterisiert.
Zur Berechnung einer Visibility könnte man zum Beispiel aus diesem Muster wieder den maximale Wert I_{max} und den minimale Wert I_{min} bestimmen, was bei einer Überlagerung von Kosinusfunktionen mit unterschiedlichen Frequenzen, wie sie hier vorliegt, nicht mehr analytisch möglich ist und auch numerisch einige Anforderungen an die Rechenleistung stellt.
Zudem ist fraglich. ob diese Grösse den Interferenzmustern am Gitter gerecht werden kann. Aus diesem Grund wird im Folgenden versucht, alternative Maßfunktionen zu finden.

Flächen-Differenz V1

Bei dieser Charakterisierung des aktuellen Interferenzmusters kann man die vorhandene, von den Marker-Kombinationen abhängige, Fläche zwischen der Interferenzkurve mit Marker und der Interferenzkurve ohne Marker als charakteristische Grösse für die Sichtbarkeit des Interferenzmusters in Abhängigkeit von der Marker-Kombination verwenden. Diese 'Flächen-Differenz' berechnet sich dann zu:

$$V1' = 2\int_0^{2\pi} \left| \sum_{a,b=0}^{n-1}\sum_{l=1}^{n-1-a} |c_{a,b}||c_{a+l,b}| \cdot \cos(lz) - \frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n-1}(n-l)\cdot\cos(lz) \right| dz \tag{6.12}$$

Auch diese Grösse lässt sich nur numerisch berechnen und stellt hohe Anforderungen an den Rechner.
Zur Normierung werden die berechneten Werte durch die, von der Spaltzahl abhängige, maximale Flächendifferenz dividiert. Die maximale Flächendifferenz ist die Fläche zwischen der Interferenzkurve ohne Marker (keine Weg-Information) und der Interferenzkurve P(z)=1 bei vollständiger Weg-Information:

$$V1 = \frac{V1'}{V1'_{max}} \tag{6.13}$$

Summe der Fourier-Koeffizienten V2

Eine weitere Möglichkeit, die Form des Interferenzmusters zu charakterisieren, nutzt dessen Fourier-Transformierte, das heisst die zugehörigen Fourier-Koeffizienten. Hierzu werden die Fourier-Koeffizienten jedes Interferenzmusters zunächst aufsummiert(Grösse F). Zur Normierung wird diese Summe dann zur Summe der Koeffizienten des Musters ohne Marker, welches auch die grösste Summe ist, ins Verhältnis gesetzt.

$$F = \sum_l F_l = \sum_l \sum_{a,b} |c_{a,b}||c_{a+l,b}| \tag{6.14}$$

$$V2 = \frac{F}{F_{ohneMarker}} \tag{6.15}$$

6.2.2 Charakterisierung der Welcher-Weg-Information

Bei einem Gitter mit n Spalten ist die minimale Trefferwahrscheinlichkeit den vom Quanton passierten Spalt richtig vorherzusagen $\frac{1}{n}$. Ist $|\alpha_0|$ der grösste Koeffizient im Zustandsvektor, so lässt sich die, im Kapitel zum Vorhersagbarkeitsmaß nach Greenberger und Yasin definierte, Grösse β erweitern zu:

$$\beta = |\alpha_0|^2 - \frac{1}{n} \tag{6.16}$$

Damit bestimmt sich der Wertebereich von β zu: $0 \leq \beta \leq 1 - \frac{1}{n}$. Um dafür Werte zwischen 0 und 1 zu bekommen multipliziert man β mit dem Faktor $\frac{n}{n-1}$. Damit wird die normierte Vorhersagbarkeit G zu:

$$\begin{aligned} G &= \frac{n|\alpha_0|^2 - 1}{n-1} = \frac{n|\alpha_0|^2 - \sum_{b=0}^{n-1} |\alpha_b|^2}{n-1} \\ &= |\alpha_0|^2 - \frac{1}{n-1}\sum_{b=1}^{n-1} |\alpha_b|^2 = 1 - \frac{n}{n-1}\sum_{b=1}^{n-1} |\alpha_b|^2 \end{aligned} \tag{6.17}$$

Beispiele

- Spaltzahl n =2
  Für n=2 ergibt sich aus Gleichung (6.17) die Vorhersagbarkeit:

$$\begin{aligned} G &= |\alpha_0|^2 - \frac{1}{2-1} \cdot (|\alpha_1|^2) \\ &= |\alpha_0|^2 - |\alpha_1|^2 \end{aligned} \tag{6.18}$$

  Dies ist der Wert, den Greenberger und Yasin berechnet haben.

- Spaltzahl n=3
  Für n=3 erhält man für G:

$$G = |\alpha_0|^2 - \frac{1}{2}(|\alpha_1|^2 + |\alpha_2|^2) \tag{6.19}$$

Schon im Fall n=3 wird die Berechnung der Grösse G^2, die von Greenberger und Yasin verwendet wurde, aufwendiger. Ebenso wird es schwierig, die Grösse

$$X = \sqrt{3}\left((\frac{|\alpha_1|^2}{2} + \frac{|\alpha_2|^2}{2})^2 + |\alpha_0|\sqrt{|\alpha_1|^2 + |\alpha_2|^2}\right) \tag{6.20}$$

die zur Erfüllung der Kreisgleichung $G^2 + X^2 = 1$ benötigt wird, als Messgrösse zu definieren.

Wie man sieht besitzt auch die Grösse V2 für mehr als 2 Spalte keine Angenehme und einfach handhabare Form mehr, so dass hiefür alternative Grössen in Betracht gezogen werden sollten. Da Information in der Physik im Allgemeinen mit Hilfe der Entropie berechnet wird, ist es auch von ganz allgemeinem Interesse in diesem Zusammenhang die Entropie zu berechnen.

Gewichtete Entropie

Eine weiter mögliche Grösse, um das Wissen, also die Information, zu quantifizieren, ist die Shannonsche Entropie:

$$S = -\sum_{a=0}^{n-1} p_a \cdot \log_2(p_a) \tag{6.21}$$

Diese Grösse beschreibt den vorliegenden Informationsmangel.

Der gemittelte Informationsmangel eines Mess-Szenarios lässt sich dabei wie folgt bestimmen:
Bei der Detektion des Quantons 'blinkt' der Marker $\sigma = b$. Dies bedeutet, dass einer der Zustände $|m, b>$ gemessen wurde. Die Wahrscheinlichkeit p_{ab}, dass der konkrete Zustand $|a, b>$ zu dieser Detektion geführt hat ergibt sich aus den auf das Ereignis $\sigma = b$ normierten Koeffizienten c'_{ab}:

$$c'_{ab} = \frac{c_{ab}}{\sum_a c_{ab}} \tag{6.22}$$

Für die Wahrscheinlichkeit p_{ab} gilt somit:

$$p_{ab} = |c'_{ab}|^2 = \left| \frac{c_{ab}}{\sum_a c_{ab}} \right|^2 \tag{6.23}$$

Für das Ereignis $\sigma = b$ müssen nun alle in Frage kommenden Spalte a berücksichtigt werden. Die Entropie für dieses Ereignis berechnet sich somit zu:

$$S_b = \sum_a |\frac{c_{ab}}{\sum_d c_{db}}|^2 \cdot \ln |\frac{\sum_d c_{db}}{c_{ab}}|^2 \tag{6.24}$$

Die gemittlete Entropie für ein ganzes Szenario ergibt sich durch die Summation der gewichteten Ereignisse $\sigma = b$.

$$\bar{S} = \sum_b p_b \cdot S_b \tag{6.25}$$

Die Wahrscheinlichekit p_b für das Ereignis $\sigma = b$ setzt sich zusammen aus den Wahrscheinlichkeiten $|c_{gb}|^2$ aller Detektionsmöglichkeiten, die ein 'Blinken' des Markers $\sigma = b$ zur Folge haben::

$$p_b = \sum_g |c_{gb}|^2 \tag{6.26}$$

Für die gemittlete Entropie aus Gleichung(6.24) gilt damit:

$$\bar{S} = \sum_b \left(\sum_g |c_{gb}|^2 \cdot \sum_a |\frac{c_{ab}}{\sum_d c_{db}}|^2 \cdot \ln |\frac{\sum_d c_{db}}{c_{ab}}|^2 \right) \tag{6.27}$$

Die normierte gemittelte Entropie $\bar{E}$ ergibt sich, indem man die gemittelte Entropie durch die gemittelte Entropie im Falle unwirksamer Markierung(keine Weg-Information), welches auch jeweils die maximale Entropie ist, dividiert:

$$\bar{E} = \frac{\bar{S}}{\bar{S}^{max}} \tag{6.28}$$

6.2.3 Allgemeine Kreisgleichung

Die Kreisgleichung (6.6) die sich aus den Grössen V(6.1) und G(6.17) ergibt, ist ein Spezialfall für die Spaltzahl n=2. Für grössere Spaltzahlen lässt sich so ein Zusammenhang nicht mehr analytisch herleiten.

6.3 Numerische Ergebnisse

In diesem Abschnitt werden die Ergebnisse der numerisch berechneten Grössen normierte gemittelte Entropie $\bar{E}$, Flächen-Differenz V1, Summe der Fourier-Koeffizienten V2 und Visibility V, beziehungsweise ihrer Zusammenhänge, dargestellt.
Hierbei wurden folgende Markerkorrelationen berücksichtigt:

Nächste Nachbar - Kombination
Bei diesen beiden Diagrammen werden die Marker zunächst mit ihrem nächsten Nachbarn (m+1), dann mit ihrem übernächsten Nachbarn (m+2) u.s.w. kombiniert. Damit ergibt sich folgende Struktur für Koeffizienten ungleich null:

$$\begin{aligned} &\text{Kombinationsanzahl } r = 1 \quad \rightarrow \quad c_{aa} \\ &\text{Kombinationsanzahl } r = 2 \quad \rightarrow \quad c_{aa}, c_{a,a+1} \\ &\text{Kombinationsanzahl } r = 3 \quad \rightarrow \quad c_{aa}, c_{a,a+1}, c_{a,a+2} \\ &\qquad\qquad\qquad \ldots \end{aligned} \tag{6.29}$$

Übernächste Nachbar - Kombination
Bei diesem Diagramm werden die Marker zunächst mit ihrem übernächsten Nachbarn (m+2), dann mit ihrem überüberübernächsten Nachbarn (m+4) u.s.w. kombiniert; allerdings nicht zyklisch sondern nur bis zum letztmöglichen Marker. Damit ergibt sich folgende Struktur für Koeffizienten ungleich null:

$$\begin{aligned} &\text{Kombinationsanzahl } r = 1 \quad \rightarrow \quad c_{aa} \\ &\text{Kombinationsanzahl } r = 2 \quad \rightarrow \quad c_{aa}, c_{a,a+2} \\ &\text{Kombinationsanzahl } r = 3 \quad \rightarrow \quad c_{aa}, c_{a,a+2}, c_{a,a+4} \\ &\qquad\qquad\qquad \ldots \end{aligned} \tag{6.30}$$

Bei dieser Struktur werden bei einer geradzahligen Spaltzahl Cluster mit nur geradzahligen oder ungeradzahligen Markerindex gebildet; das heisst es können nicht mehr beliebig viele Marker kombiniert werden, so dass stets eine Teil-Welcher-Weg-Information vorhanden ist. Die Anzahl der Cluster sinkt dabei mit steigender Kombinationszahl.

6.3.1 V2(E)-Diagramme

In den folgenden Diagrammen beschreibt die x-Achse die normierte gemittelte Entropie. Da die hier berechneten Werte V2 den Verdacht erwecken exponentiell von E

abzuhängen wird in y-Richtung der Logarithmus der Summe der relativen Fourier-Koeffizienten aufgetragen.

Nächste Nachbar-Kombination

Abb.(6.1):
Hier gilt: $c_{a,a} = c_{n,m} = \frac{1}{\sqrt{r \cdot n}}$,das heisst, alle Koeffizienten sind gleich gross.

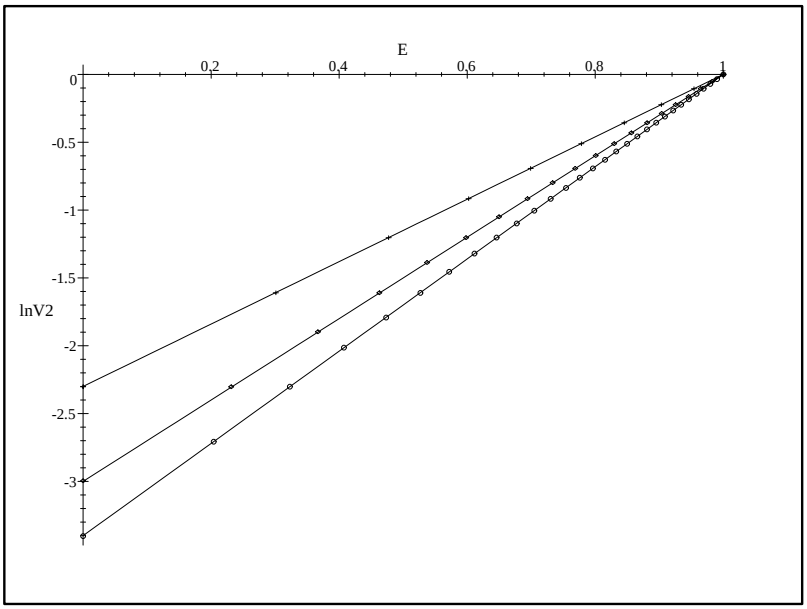

Abb. 6.1: Kombination(m+1) und gleiche Gewichtung;n = 10,20 und 30 Spalte (mit Ausgleichsgeraden)

Abb.(6.2):
Hier gilt: $c_{a,a} = \sqrt{\frac{10}{(r+9)n}}$ und $c_{a,b} = \frac{1}{\sqrt{(r+9)n}}$, das heisst das 'Blinken' am 'richtigen' Spalt ist wahrscheinlicher als die anderen Blinkmöglichkeiten.

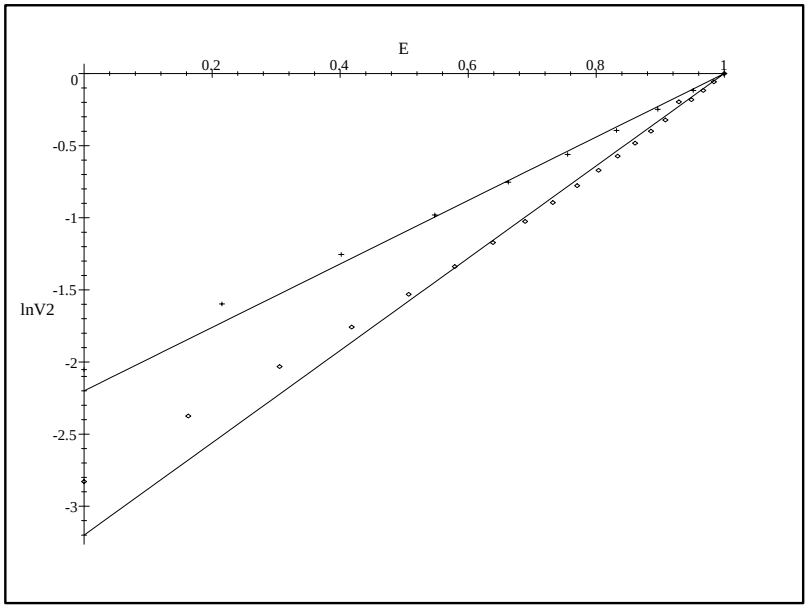

Abb. 6.2: Kombination(m+1) und unterschiedliche Gewichtung;n = 10 und 20 Spalte (und Ausgleichsgeraden)

Die Kombination beider Diagramme (jeweils mit Ausgleichsgeraden), getrennt nach Spaltanzahl betrachtet, ergibt:

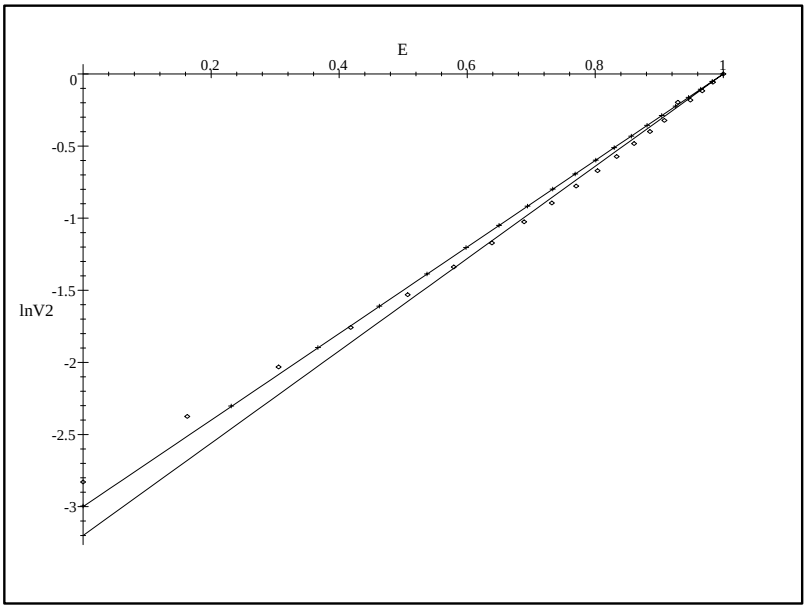

Abb. 6.3: Kombination(m+1) mit gleicher und unterschiedlicher Gewichtung;n = 20 Spalte

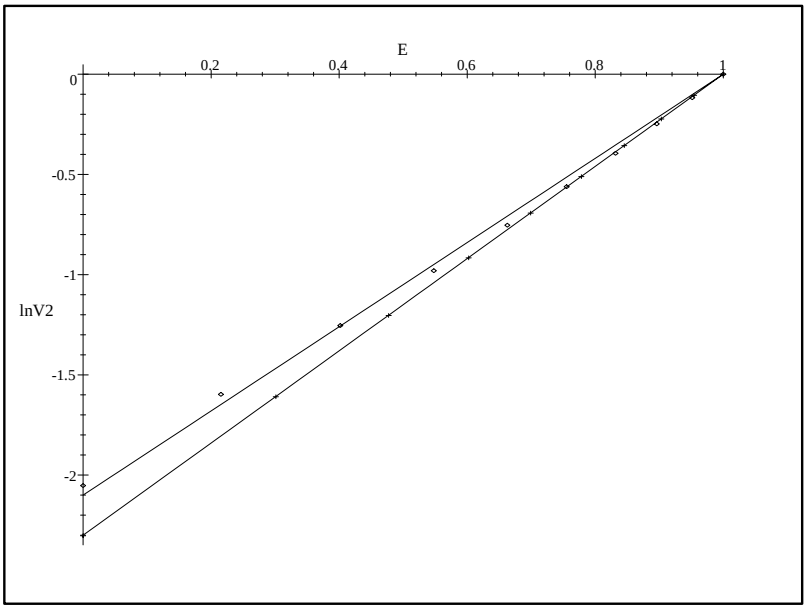

Abb. 6.4: Kombination(m+1) mit gleicher und unterschiedlicher Gewichtung;n = 10 Spalte

Die letzten 3 Diagramme zeigen, dass die Werte der Fälle gleichgrosser Koeffizienten alle auf einer Geraden liegen; das bedeutet, in diesen Fällen besteht zwischen V2 und E ein Zusammenhang der Form

$$V2(E) \sim e^{aE} \tag{6.31}$$

Übernächste Nachbar - Kombination

Abb.(6.5):
Hier sind alle Koeffizienten gleich gross: $c_{a,a} = c_{a,a+2} = \frac{1}{\sqrt{rn}}$

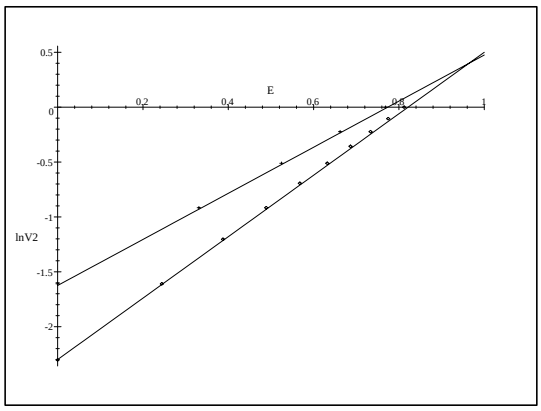

Abb. 6.5: Kombination(m+2) und gleiche Gewichtung für n = 10 und 20 Spalte

Auch hier wird der oben beschriebene funktionale Zusammenhang für die Fälle gleichgrosser Koeffizienten bestätigt.

Vergleich

Zeichnet man alle Werte in ein Diagramm, so ergibt sich Abbildung(6.6):
In dieser Abbildung zeigt sich, dass die Werte der übernächsten Nachbar - Kombinationen von den Werten der anderen Kombinationen deutlich abweichen. Grund dafür ist die Clusterbildung, die dafür sorgt, dass stets eine Teil-Welcher-Weg-Information und damit auch ein in der Amplitudenänderung schwächeres Interferenzmuster vorhanden ist, was letztendlich eine andere Entwicklung der Summe der Fourier-Koeffizienten bedeutet.

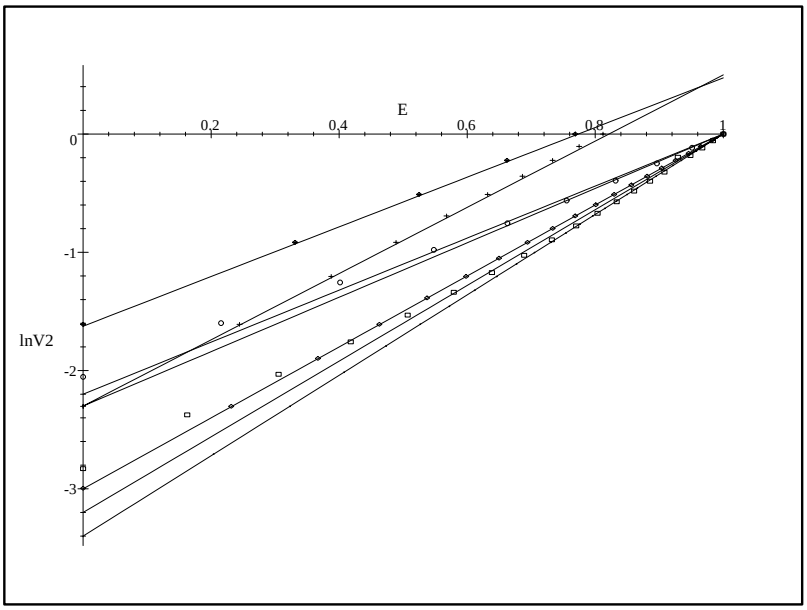

Abb. 6.6: Alle Werte in einem Diagramm

6.3.2 V(E)-Diagramme

Bei den Diagrammen dieses Abschnitts wird in y-Richtung die Visibility aufgetragen. Betrachtet wurde nur das Szenario $c_{a,a} = c_{a,b} = \frac{1}{\sqrt{rn}}$.

Diagramm 1:

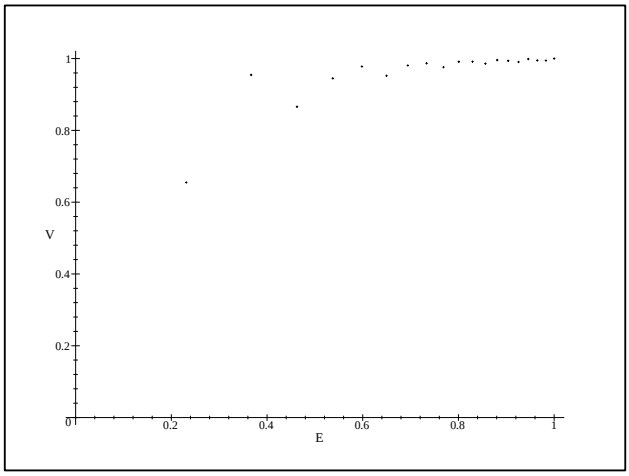

Abb. 6.7: Diagramm für n = 20 Spalte

Diagramm 2:

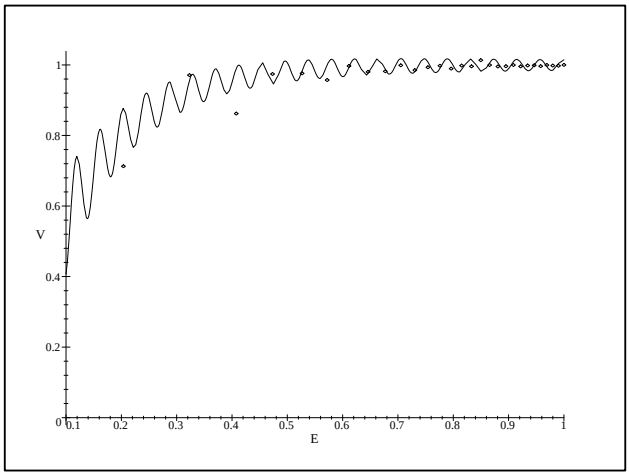

Abb. 6.8: Diagramm für n = 30 Spalte, mit Ausgleichsfunktion

Die Überlagerung der Diagramme für n=10,20 und 30 Spalte führt zu folgender

Grafik:
Diagramm 3:

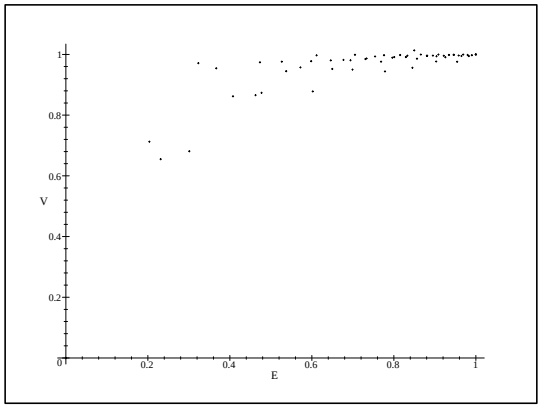

Abb. 6.9: Die Werte für n = 10, 20 und 30 Spalte in einem Diagramm

Diese Darstellungen zeigen, dass sich der Vergleich von relativer Visibility (welche sich nur in sehr geringem Masse von der absoluten unterscheidet) und relativer Entropie nicht eignet um komplementäre Grössen zu beschreiben. Wie man deutlich sieht, nimmt die Visibility schon bei kleinen Entropiewerten , also bei einer geringen Anzahl an Markerkombinationen, sehr stark zu. Sie erreicht schon bei relativ kleinen Entopiewerten den Asymptotenwert 1.
Approximieren laesst sie sich durch eine Funktion der Form:

$$V(E) = \frac{\sin(mx)}{nx} + 1 - e^{-x} \text{ mit } m, n \in \mathbb{N} \text{ ,wobei } m << n \tag{6.32}$$

6.3.3 V1(E)-Diagramme

Da sich bei den hier bestimmten Werten der Verdacht ergibt, dass ebenfalls eine Kreisbedingung vorliegt werden bei diesen Diagrammen in y-Richtung die Werte $y = \sqrt{1 - V1^2}$ angezeigt. Ebenfalls sind mögliche Ausgleichsgeraden eingezeichnet.

Nächste Nachbar - Kombinationen

Abbildung(6.10):
Hier sind alle Koeffizienten gleich gross: $c_{a,a} = c_{a,b} = \frac{1}{\sqrt{rn}}$.

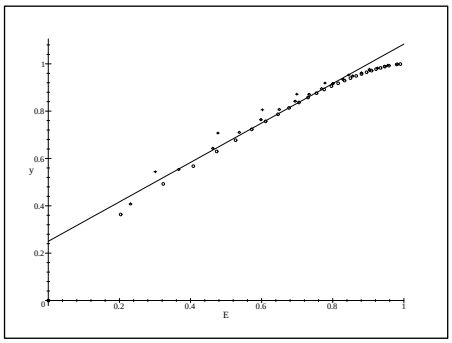

Abb. 6.10: Diagramm für n = 10, 20 und 30 Spalte

Abbildung(6.11):
Hier gilt:$c_{a,a} = \sqrt{\frac{10}{rn}}$ und $c_{a,b} = \frac{1}{\sqrt{rn}}$, das heisst, das 'Blinken' am 'richtigen' Spalt (also dem Spalt in dem das Quanton ist) ist wahrscheinlicher als die anderen Blinkmöglichkeiten.

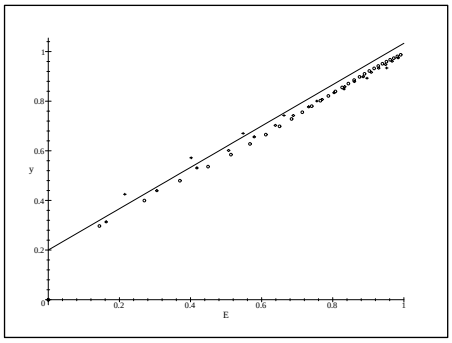

Abb. 6.11: Diagramm für n = 10, 20 und 30 Spalte

Die berechneten Punkte liegen für die Szenarien jeweils eng an den Ausgleichsgeraden; es ist keine Abhängigkeit von der Spaltzahl ersichtbar. Das bedeutet, eine Kreisgleichung wie Greenberger und Yasin, beziehungsweise Englert, sie für ihre Grössen bekommen, kann für die Grössen Entropie und Flächenvisibility auch näherungsweise gültig sein.

Abbildung(6.12):
Um mögliche Korrelationen zu analysieren zeichnet man die Werte der beiden obigen Szenarien in ein Diagramm;

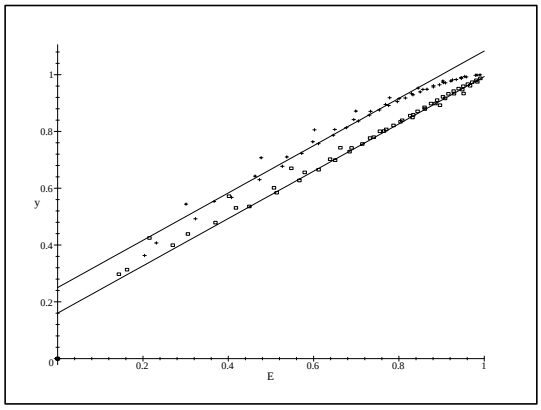

Abb. 6.12: Diagramm für n = 10, 20 und 30 Spalte

Bei beiden Gewichtungsformen haben die Ausgleichsgeraden die selbe Steigung; allerdings unterscheiden sie sich um einen konstanten Wert, dass heisst, die Gewichtung spielt insofern bei der Korrelation eine Rolle.

Übernächster Nachbar - Kombination

Bei diesem Szenario wurden die Kombinationen alle gleich gewichtet, dass heisst es gilt: $c_{a,a} = c_{a,a+2} = \cdots = \frac{1}{\sqrt{rn}}$.

Abbildung(6.13):

Auch hier liegen die Punkte in guter Näherung auf einer Gerade; und die Werte hängen offensichtlich nicht von der Spaltzahl ab.

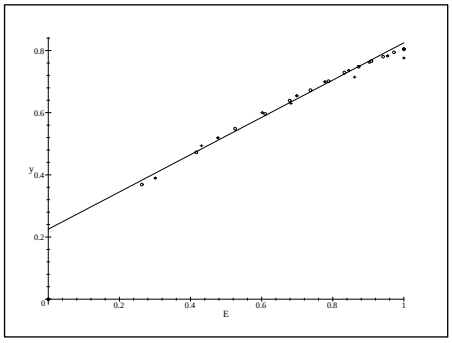

Abb. 6.13: Diagramm für n = 10, 20 und 30 Spalte

Vergleich:

Zum Vergleich der Szenarien werden im folgenden alle Werte für n=30 Spalte in ein Diagramm geschrieben.

Abbildung(6.14):

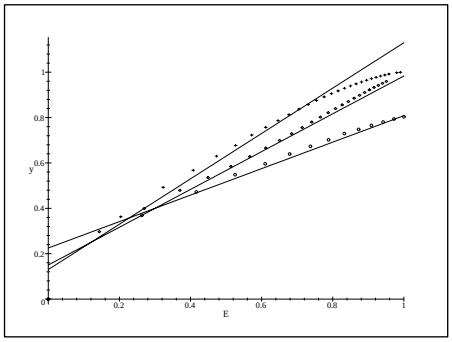

Abb. 6.14: Diagramm für 30 Spalte, alle Szenarien

Hier sieht man deutlich, dass die Art der Markerkombination einen wesentlichen Einfluss auf den Kurvenverkauf hat. Die Steigung der Geraden vom Übernächsten-Nachbar-Szenario weicht deutlich von der Steigung der Geraden der beiden Nächste-Nachbar-Szenarien ab.

6.4 Zusammenfassung

Es hat sich gezeigt, dass zwischen der Grösse 'Gemittelte Entropie $\bar{E}$' auf Seiten der Information und den Grössen 'Flächendifferenz V1', sowie 'Summe der Fourier-Koeffizienten V2' auf Seiten des Interferenzmusters zumindest näherungsweise funktionale Zusammenhänge bestehen. Somit lassen sich diese Grössen zur Beschreibung der Komplementarität von Information und Interferenzmuster verwenden.
Bei der Summe der Fourier-Koeffizienten zeigt sich eine, zunächst unerwartete, exponentielle Abhängigkeit von der gemittleten Entropie.
Die Grössen 'Flächendifferenz V2' und 'Gemittlete Entropie' erfüllen in diesem Rahmen sogar die Kreisbedingung. Sie können somit den Grössen 'Visibility' einerseits und 'Predictability', bzw. 'Distinguishability' andererseits entsprechen.
Im Gegensatz zum Doppelspalt eignet sich die 'Visibility' beim Gitter nicht zu einer Charakterisierung dieser Komplementarität.

Literaturverzeichnis

[1] Greenberger, D.,Yasin, A. Simultaneous Wave and Particle knowledge in a Neutron Interferometer *Phys. Let. A* **128**, 391-394 (1988).

[2] Otte, A. Physik und Quanteninformation - Darstellung, Symmetrie und Dynamik (Diplomarbeit, Stuttgart 1998)

[3] Reinisch, G. Stern-gerlach experiment as the pioneer - and probably the simplest - quantum entanglement test? *Phys. Let. A.* **259**, 427 (1999).

[4] Mahler, G., Weberruß, V. Quantum Networks (Springer, Berlin, 1998)

[5] Bedding, T. Introduction to Interferometry *astro-ph/9609092*(1996)

[6] Englert, B. Fringe Visibility and Which-Way Information: An Inequality *Phys. Rev. Let.* **77** 2154-2157 (1996)

[7] Schwindt, P. Quantitative wave-particle duality and non-erasing quantum erasure *quant-ph/9908072* (1999).

[8] Scully, M., Englert, B. Walther, H. Quantum optical test of complementarity *nature* **351**, 111 (1991).

[9] Dürr, S., Tonn, T., Rempe, G. Origin of quantum-mechanical complementarity probed by a 'which-way' experiment in an atom interferometer *nature* **395**, 33 (1998).

[10] Aharonov, Y., Popescu, S., Vaidman, L. Causality,Memory Erasing and Delayed Choice Experiments *quant-ph/9501006* (1995).

[11] Steuernagel, O. Uncertainty is complementary to complementarity *quant-ph/9908011* (1999).

[12] Kim, I. Uncertainty rescued: Bohr's complementarity for composite systems *Phys. Let. A* **269** 287-292 (2000).

[13] Englert, B. Remarks on some basic issues in quantum mechanics *Zeitschrift für Naturforschung* **54a**, 11-32 (1999).

[14] Fahn, P. Entropy Cost of Information *Phys.Comp* 217-226 (1994).

[15] Bennett, C. The thermodynamics of computation - a review *Int. J. Theor. Phys.* **21** 905-940 (1982)

[16] Szilard, L On the decrease of entropy in a thermodynamic system by the intervention of intelligent beings *Zeitschrift für Physik* **53** 840-856 (1929)

[17] Plenio, M. The physics of forgetting: Landauer's erasure principle and information theory *quant-ph/0103108* (2001)

Danksagung

Zum Zustandekommen dieser Arbeit haben viele Leute beigetragen. Einigen von ihnen möchte ich hier explizit danken:

Prof.Dr.G.Mahler für die Betreuung und vor allem die gewährte wissenschaftliche Freiheit und Geduld bei der Entwicklung dieser Arbeit.

PD Dr.O.Hess für die freundliche Übernahme des Mitberichts.

Prof.Dr.G.Wunner für die freundliche Aufnahme an das Institut.

Meinen Eltern für die vielfältige Unterstützung während des Studiums.

Dem Institut, insbesondere I.Kim für seine Hilfe bei vielen Fragen und M.Stollsteimer, A.Otte, F.Tonner, T.Haury, H.Schmidt, J.Gemmer für anregende Diskussionen, sowie D.Engel für seine Bemühungen mir die Eigenschaften von Nicht-Windows-Computersystemen nahezubringen.