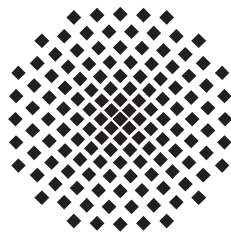


# Stationäre Moden in nichtlinearen unidirektionalen Wellenleitern

Bachelorarbeit von  
**Stefan Käser**

4. September 2015

Prüfer: Priv.-Doz. Dr. Holger Cartarius



1. Institut für Theoretische Physik  
Universität Stuttgart  
Pfaffenwaldring 57, 70550 Stuttgart



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1	Motivation und Einführung in das Thema . . . . .	1
1.2	Aufbau der Arbeit . . . . .	2
<b>2</b>	<b><math>\mathcal{PT}</math>-Symmetrie</b>	<b>5</b>
2.1	$\mathcal{PT}$ -Operator . . . . .	5
2.2	$\mathcal{PT}$ -symmetrische Hamiltonoperatoren . . . . .	6
2.3	Gebrochene $\mathcal{PT}$ -Symmetrie . . . . .	6
2.4	Energieeigenwerte $\mathcal{PT}$ -symmetrischer Hamiltonoperatoren . . . . .	7
2.5	Verlust der Unitarität . . . . .	7
<b>3</b>	<b>Dynamik von <math>\mathcal{PT}</math>-symmetrischen optischen Systemen</b>	<b>9</b>
3.1	$\mathcal{PT}$ -symmetrische optische Systeme . . . . .	9
3.1.1	Lineare gekoppelte Wellenleiter . . . . .	9
3.1.2	Nichtlineare gekoppelte Wellenleiter . . . . .	10
3.2	Dynamik der nichtlinearen gekoppelten Wellenleiter . . . . .	13
3.2.1	Unidirektionalität der Wellenleiter . . . . .	13
3.2.2	Bestimmung des kritischen Wertes $\chi_d$ . . . . .	15
<b>4</b>	<b>Stationäre Zustände eines Bose-Einstein-Kondensates in einer Doppelmulde</b>	<b>17</b>
4.1	Bose-Einstein-Kondensate . . . . .	17
4.1.1	Gross-Pitaevskii-Gleichung (GPE) . . . . .	18
4.1.2	Bose-Einstein-Kondensat in einem Doppelmuldenpotential . . . . .	18
4.2	Stationäre Lösung des Bose-Einstein-Kondensates in der Doppelmulde . . . . .	19
4.2.1	Bestimmung der Eigenwerte der stationären Eigenwertgleichung . . . . .	19
4.2.2	Bestimmung der Intensitätsungleichgewichte $\kappa$ der stationären Zustände . . . . .	20
4.2.3	Bestimmung der möglichen Phasen $q$ . . . . .	23
4.2.4	Eigenwerte für verschiedene Stärken der Nichtlinearität . . . . .	24
4.3	Stabilitätsuntersuchung der stationären Lösung . . . . .	27
4.3.1	Herleitung der Bogoliubov-de Gennes-Gleichungen . . . . .	27
4.3.2	Lösungen der Bogoliubov-de Gennes-Gleichungen . . . . .	29

4.3.3	Herleitung der Bogoliubov-de Gennes-Gleichungen für ein normunabhängiges System . . . . .	32
4.3.4	Lösungen der normunabhängigen Bogoliubov-de Gennes-Gleichungen	35
<b>5</b>	<b>Vergleich der Dynamik mit der stationären Lösung</b>	<b>37</b>
5.1	Vergleich der kritischen Punkte $\chi_d$ der Dynamik mit denen der stationären Lösung . . . . .	37
5.1.1	Erklärung von Abweichungen durch Betrachtung der Dynamik der Norm . . . . .	39
5.1.2	Dynamik mit den Grundzuständen als Anfangswerten . . . . .	39
5.2	Diskussion der Ergebnisse . . . . .	42
5.2.1	Stationäre Zustände und Unidirektionalität . . . . .	42
5.2.2	Vergleich mit einer alternativen theoretischen Vorhersage über die Dynamik für $\kappa = \pm 1$ . . . . .	43
<b>6</b>	<b>Zusammenfassung</b>	<b>45</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>47</b>
	<b>Danksagung</b>	<b>49</b>

# 1 Einleitung

## 1.1 Motivation und Einführung in das Thema

Um physikalische Prozesse in der Quantenmechanik zu beschreiben, wurde seither das Axiom genutzt, dass Observablen hermitesch sein müssen. Diese Bedingung gewährleistet Unitarität und reelle Eigenwerte. Es gibt jedoch auch eine Formulierung einer nicht-hermiteschen Quantenmechanik, die die Bedingung der hermiteschen Operatoren durch die Forderung nach einer kombinierten Paritäts-Zeitumkehr-Symmetrie ersetzt [1, 2]. Diese Symmetrie ist erfüllt, wenn der Hamiltonoperator eines Systems mit dem  $\mathcal{PT}$ -Operator kommutiert, der aus dem Raumspiegelungs-Operator  $\mathcal{P}$  und dem Zeitumkehr-Operator  $\mathcal{T}$  aufgebaut ist. Ein solches System wird als  $\mathcal{PT}$ -symmetrisch bezeichnet und kann ein reelles Eigenwert-Spektrum besitzen. Durch diesen Formalismus sind komplexe Hamiltonoperatoren möglich, die trotzdem reelle Eigenwerte liefern. Diese komplexen Potentiale können als Quelle oder Senke von Teilchen interpretiert werden.

Die Eigenschaften der  $\mathcal{PT}$ -symmetrischen Quantenmechanik lassen sich auf optische Systeme übertragen [3]. Eines stellen zwei gekoppelte Wellenleiter dar, wovon einer einen Zuwachs und der andere einen Verlust an Intensität erfährt. Dieser Zuwachs und Verlust kann durch eine antisymmetrische Verteilung eines imaginären Brechungsindex auf einem symmetrischen reellen Brechungsindex verwirklicht werden. Solche Systeme wurden bereits theoretisch [3, 4] und experimentell [5] untersucht. Ein interessanter Effekt tritt auf, wenn der optische Kerr-Effekt, der sich in einem nichtlinearen Term äußert, berücksichtigt wird. Die Wellenleiter werden ab einer kritischen Stärke der Nichtlinearität unidirektional. Unidirektional bedeutet in diesem Fall, dass, egal in welchen der beiden Wellenleiter eine Welle eintritt, sie den Wellenleiter mit Zuwachs verlässt. Durch diesen Effekt könnte solch ein System als optische Diode genutzt werden. Die Bestimmung der kritischen Werte der physikalischen Parameter, ab denen die Wellenleiter unidirektional werden, ist ein Bestandteil dieser Arbeit und wird für verschiedene Anfangswerte durchgeführt.

Ein Bose-Einstein-Kondensat in einer Doppelmulde stellt ein zu den gekoppelten Wellenleitern analoges System dar. Dabei ist eine der Mulden eine Quelle und die andere eine

Senke von Teilchen. Die Dynamik dieses System lässt sich durch die Gross-Pitaevskii-Gleichung beschreiben, wobei die Wechselwirkungen der Bosonen durch ein *mean field*, zu einem nichtlinearen Term genähert werden [6]. Für dieses System sollen die Eigenwerte der stationären Lösung betrachtet werden und daraus Aufschluss gewonnen werden, wann die  $\mathcal{PT}$ -Symmetrie des Systems gebrochen wird. Am Bruch der  $\mathcal{PT}$ -Symmetrie wird eine Instabilität der Dynamik erwartet. Daher wird die Stabilität der Zustände der reellen Energieeigenwerte durch das Lösen der Bogoliubov-de Gennes-Gleichungen untersucht. Diese Stabilitätseigenschaften werden mit einer numerisch exakten Berechnung der vollen Dynamik verglichen.

Die kritischen Punkte der stationären Lösung, also jene an denen die  $\mathcal{PT}$ -Symmetrie gebrochen wird, sollen mit denen der Dynamik, also jene ab denen unidirektionales Verhalten vorliegt, verglichen werden. Dadurch soll festgestellt werden, ob die stationäre Lösung Vorhersagen über die Unidirektionalität der Wellenleiter machen kann. Außerdem soll die Qualität dieser Vorhersage mit einem alternativen Vorgehen für spezielle Anfangsbedingungen der Dynamik von Ramezani und Mitarbeitern [4] verglichen werden.

## 1.2 Aufbau der Arbeit

- Kapitel 2 stellt die Grundlagen der  $\mathcal{PT}$ -Symmetrie und deren physikalische Interpretation vor.
- Kapitel 3 zeigt die Analogie von optischen Systemen zu  $\mathcal{PT}$ -symmetrischen quantenmechanischen Systemen auf und stellt die linearen und nichtlinearen gekoppelten Wellenleiter vor. Außerdem wird der Effekt der Unidirektionalität des nichtlinearen Systems beschrieben. Dazu wird die Dynamik der nichtlinearen gekoppelten Wellenleiter gelöst. Die kritischen Werte  $\chi_d$  der Stärke der Nichtlinearität, ab denen die Wellenleiter unidirektionales Verhalten aufweisen, werden für verschiedene Anfangswerte bestimmt.
- Kapitel 4 stellt das System des Bose-Einstein-Kondensates in der Doppelmulde vor und zeigt die Analogie zu den optischen Systemen. Darauf wird das System des Bose-Einstein-Kondensates für stationäre Zustände gelöst und die Energieeigenwerte werden dargestellt, an denen ein  $\mathcal{PT}$ -Symmetriebruch erkennbar ist. Ab der Stelle des  $\mathcal{PT}$ -Symmetriebruchs wird ein neues Verhalten des Systems erwartet. Außerdem wird eine Stabilitätsuntersuchung der Zustände durchgeführt, um zu untersuchen, ab wann Zustände im Vergleich zum Punkt des  $\mathcal{PT}$ -Symmetriebruchs instabil werden. Die Stabilitätsuntersuchung wird erneut, aufgrund von Ergebnis-

sen einer vorherigen Arbeit [7], für eine normunabhängige Formulierung durchgeführt.

- Kapitel 5 vergleicht die kritischen Werte der stationären Lösung, ab denen die  $\mathcal{PT}$ -Symmetrie gebrochen ist mit denen der Dynamik. Außerdem wird die Dynamik mit den Grundzuständen der stationären Lösung als Anfangswerten untersucht. Zuletzt werden die Ergebnisse diskutiert und ein alternatives Vorgehen für eine theoretische Vorhersage vorgestellt, dessen Ergebnisse mit denen dieser Arbeit verglichen werden.





## 2 $\mathcal{PT}$ -Symmetrie

Ein quantenmechanisches System muss, unter anderem, folgende Bedingungen erfüllen, um physikalisch sinnvolle Ergebnisse zu liefern:

- Die Eigenwerte des Hamiltonoperators  $H$  müssen reell sein.
- Die Zeitentwicklung des Systems muss unitär sein und somit die Wahrscheinlichkeit erhalten.

Dies ist durch die mathematische Bedingung, dass der Hamiltonoperator hermitesch sein muss [1]

$$H = H^\dagger, \quad (2.1)$$

gewährleistet. Es können sich aber auch reelle Eigenwerte für nichthermitesche Hamiltonoperatoren ergeben. Beispielweise besteht diese Möglichkeit bei Hamiltonoperatoren, die  $\mathcal{PT}$ -symmetrisch sind und die in diesem Kapitel vorgestellt werden sollen.

### 2.1 $\mathcal{PT}$ -Operator

Der  $\mathcal{PT}$ -Operator ist aufgebaut aus dem Raumspiegelungs-Operator,

$$\mathcal{P} : \quad \hat{x} \rightarrow -\hat{x}, \quad \hat{p} \rightarrow -\hat{p}, \quad (2.2)$$

und dem Zeitumkehr-Operator,

$$\mathcal{T} : \quad \hat{x} \rightarrow \hat{x}, \quad \hat{p} \rightarrow -\hat{p}, \quad i \rightarrow -i. \quad (2.3)$$

Aus (2.2) und (2.3) folgt

$$\mathcal{P}^2 = \mathcal{T}^2 = \mathbb{1} \quad \text{und} \quad [\mathcal{P}, \mathcal{T}] = 0. \quad (2.4)$$

Damit ergibt sich für den  $\mathcal{PT}$ -Operator

$$\mathcal{PT} : \quad \hat{x} \rightarrow -\hat{x}, \quad \hat{p} \rightarrow \hat{p}, \quad i \rightarrow -i \quad (2.5)$$

und

$$(\mathcal{PT})^2 = \mathbb{1}. \quad (2.6)$$

## 2.2 $\mathcal{PT}$ -symmetrische Hamiltonoperatoren

Ein System wird als  $\mathcal{PT}$ -symmetrisch bezeichnet, wenn der  $\mathcal{PT}$ -Operator mit dem Hamiltonoperator kommutiert,

$$[H, \mathcal{PT}] = 0. \quad (2.7)$$

Für einen Hamiltonoperator mit einem beliebigen komplexen Potential  $H = \hat{p}^2/2m + V(\hat{x})$  ergibt sich mit (2.5) und der Bedingung (2.7)

$$\begin{aligned} [H, \mathcal{PT}] &= \left[ \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{x}), \mathcal{PT} \right] \\ &= \left( \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{x}) \right) \mathcal{PT} - \mathcal{PT} \left( \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{x}) \right) \\ &= \left( \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{x}) \right) \mathcal{PT} - \left( \frac{\hat{p}^2}{2m} + V^*(-\hat{x}) \right) \mathcal{PT} \stackrel{!}{=} 0. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Damit ein Hamiltonoperator  $\mathcal{PT}$ -symmetrisch ist, muss somit

$$V(\hat{x}) = V^*(-\hat{x}) \quad (2.9)$$

gelten.

## 2.3 Gebrochene $\mathcal{PT}$ -Symmetrie

Aus (2.2) ist ersichtlich, dass  $\mathcal{P}$  linear ist, jedoch gilt

$$\mathcal{T}\lambda|\Psi\rangle = \lambda^*\mathcal{T}|\Psi\rangle \quad (2.10)$$

womit  $\mathcal{T}$  antilinear ist. Der  $\mathcal{PT}$ -Operator ist somit auch antilinear und die Eigenzustände für ein  $\mathcal{PT}$ -symmetrisches  $H$  sind nicht zwangsläufig Eigenzustände von  $\mathcal{PT}$ . Man bezeichnet die  $\mathcal{PT}$ -Symmetrie von  $H$  als ungebrochen, wenn alle Eigenzustände von  $H$  auch Eigenzustände von  $\mathcal{PT}$  sind. Sind manche der Eigenzustände von  $H$  keine Eigenzustände von  $\mathcal{PT}$ , wird die  $\mathcal{PT}$ -Symmetrie von  $H$  als gebrochen bezeichnet [1].

## 2.4 Energieeigenwerte $\mathcal{PT}$ -symmetrischer Hamiltonoperatoren

Sei  $|\Psi\rangle$  Eigenzustand eines  $\mathcal{PT}$ -symmetrischen Hamiltonoperators  $H$  mit Eigenwert  $E$  und von  $\mathcal{PT}$  mit Eigenwert  $\lambda$ , also ungebrochene  $\mathcal{PT}$ -Symmetrie,

$$H|\Psi\rangle = E|\Psi\rangle, \quad (2.11)$$

$$\mathcal{PT}|\Psi\rangle = \lambda|\Psi\rangle. \quad (2.12)$$

Anwendung von  $\mathcal{PT}$  auf (2.12) mit (2.6) ergibt:

$$\begin{aligned} \mathcal{PT}\mathcal{PT}|\Psi\rangle &= \mathcal{PT}\lambda|\Psi\rangle \\ (\mathcal{PT})^2|\Psi\rangle &= \lambda^*\mathcal{PT}|\Psi\rangle \\ |\Psi\rangle &= \lambda^*\lambda|\Psi\rangle = |\lambda|^2|\Psi\rangle. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Damit muss  $|\lambda|^2 = 1$  sein und der Eigenwert  $\lambda$  von  $\mathcal{PT}$  ist somit eine Phase

$$\lambda = e^{i\phi}. \quad (2.14)$$

Anwendung von  $\mathcal{PT}$  auf (2.11) ergibt:

$$\begin{aligned} \mathcal{PT}H|\Psi\rangle &= \mathcal{PT}E|\Psi\rangle \\ H\mathcal{PT}|\Psi\rangle &= E^*\mathcal{PT}|\Psi\rangle \\ H\lambda|\Psi\rangle &= E^*\lambda|\Psi\rangle \\ \lambda H|\Psi\rangle &= \lambda E^*|\Psi\rangle \\ \lambda E|\Psi\rangle &= \lambda E^*|\Psi\rangle. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Da  $\lambda \neq 0$ , siehe (2.14), muss  $E = E^*$  gelten und  $E$  somit reell sein. Dies gilt jedoch nur, wenn die  $\mathcal{PT}$ -Symmetrie von  $H$  ungebrochen ist. Ist diese gebrochen, sind auch komplexe Eigenwerte möglich. Man kann leicht zeigen, dass diese dann in komplex-konjugierten Paaren auftreten. Umgekehrt kann man zeigen, dass sich reelle Eigenwerte nur für  $\mathcal{PT}$ -symmetrische Zustände ergeben.

## 2.5 Verlust der Unitarität

Komplexe Energieeigenwerte haben eine Auswirkung auf die Unitarität. Dies ergibt sich aus der Zeitentwicklung eines stationären Zustandes  $|\Psi\rangle$

$$|\Psi(t)\rangle = e^{-iEt}|\Psi(0)\rangle \quad (2.16)$$

$$\langle\Psi(t)|\Psi(t)\rangle = e^{iE^*t} \cdot e^{-iEt} \langle\Psi(0)|\Psi(0)\rangle = e^{2\text{Im}(E)t}|\Psi|^2. \quad (2.17)$$

Die Norm des Systems ist somit nicht mehr erhalten und die Unitarität verletzt. Die Wahrscheinlichkeitsdichte des Systems steigt bei einem positiven Imaginärteil des Eigenwertes exponentiell an, für einen negativen Imaginärteil fällt sie exponentiell ab. Um die Ursache dieses Verhaltens genauer zu untersuchen, wird die zeitliche Änderung der Wahrscheinlichkeitsdichte betrachtet,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \langle \Psi | \Psi \rangle = \left\langle \frac{\partial}{\partial t} \Psi \middle| \Psi \right\rangle + \left\langle \Psi \middle| \frac{\partial}{\partial t} \Psi \right\rangle = \langle -iH\Psi | \Psi \rangle + \langle \Psi | -iH\Psi \rangle . \quad (2.18)$$

Wird wieder ein Hamiltonoperator mit einem beliebigen komplexen Potential angenommen  $H = \hat{p}^2/2m + V(\hat{x})$  wird (2.18) zu

$$\begin{aligned} & i \left\langle \frac{\hat{p}^2}{2m} + \text{Re}(V(\hat{x})) + i\text{Im}(V(\hat{x}))\Psi \middle| \Psi \right\rangle \\ & - i \left\langle \Psi \middle| \frac{\hat{p}^2}{2m} + \text{Re}(V(\hat{x})) + i\text{Im}(V(\hat{x}))\Psi \right\rangle \\ & = \underbrace{\frac{i}{2m} \langle \Psi | \nabla^2 \Psi \rangle - \frac{i}{2m} \langle \nabla^2 \Psi | \Psi \rangle}_{\text{div} j} + 2\text{Im}(V(\hat{x})) \langle \Psi | \Psi \rangle \end{aligned} \quad (2.19)$$

$$\implies \frac{\partial \rho}{\partial t} = 2\text{Im}(V(\hat{x}))\rho - \text{div} j . \quad (2.20)$$

Der Imaginärteil des Potentials sorgt also für eine Änderung der Wahrscheinlichkeitsdichte. Komplexe Potentiale können somit als Quellen (positiv) oder als Senken (negativ) dienen.

# 3 Dynamik von $\mathcal{PT}$ -symmetrischen optischen Systemen

Die zuvor eingeführte  $\mathcal{PT}$ -Symmetrie wird nun auf ein optisches System aus zwei gekoppelten Wellenleitern angewandt. Das optische System wird vorgestellt und seine Besonderheit der Unidirektionalität erläutert. Daraufhin wird die Dynamik des Systems für verschiedene Parameter untersucht, mit dem Ziel den Punkt, ab dem die Wellenleiter unidirektionales Verhalten aufweisen, anzugeben.

## 3.1 $\mathcal{PT}$ -symmetrische optische Systeme

Die Besonderheiten von  $\mathcal{PT}$ -symmetrischen Systemen lassen sich nutzen, um optische Systeme zu untersuchen. Dies ist möglich, da die optische Wellengleichung in manchen Spezialfällen äquivalent zu der Schrödingergleichung ist [3]. Für optische Systeme übernimmt der komplexe Brechungsindex  $n(x) = n_{\text{R}}(x) + in_{\text{I}}(x)$ , welcher analog zu (2.9)

$$n(x) = n^*(-x) \tag{3.1}$$

erfüllen muss, die Rolle des Potentials. Der Anteil  $n_{\text{I}}(x)$  entspricht einer Quelle oder einer Senke der Intensität einer Welle. Solch ein  $\mathcal{PT}$ -symmetrisches System ist durch eine antisymmetrische Verteilung von Quellen und Senken auf einer symmetrischen Verteilung eines reellen Brechungsindex gewährleistet.

### 3.1.1 Lineare gekoppelte Wellenleiter

Zwei gekoppelte Wellenleiter, von denen einer einen Zuwachs  $+\gamma$  und der andere einen gleich großen Verlust  $-\gamma$  an Intensität erfährt, siehe Abbildung 3.1, stellen ein  $\mathcal{PT}$ -symmetrisches System dar. Die Dynamik der zwei Moden der Wellenleiter wird mit der

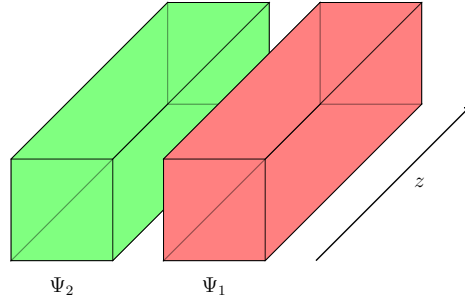


Abbildung 3.1: Schematische Darstellung zweier Wellenleiter. Der grüne Wellenleiter repräsentiert einen Zuwachs  $+\gamma$  der rote einen Verlust  $-\gamma$ . Beide Komponenten der Wellen  $\Psi_1$  und  $\Psi_2$  propagieren in positive  $z$ -Richtung.

*coupled mode theory* [8] durch die zwei gekoppelten DGLs beschrieben,

$$i \frac{d\Psi_1}{dz} = \Psi_2 - i\gamma\Psi_1, \quad (3.2)$$

$$i \frac{d\Psi_2}{dz} = \Psi_1 + i\gamma\Psi_2, \quad (3.3)$$

wodurch sich ein effektiver Hamiltonoperator in der Form einer zweidimensionalen Matrix,

$$H = \begin{pmatrix} -i\gamma & 1 \\ 1 & +i\gamma \end{pmatrix}, \quad (3.4)$$

ergibt. Dieser Hamiltonoperator kommutiert mit dem  $\mathcal{PT}$ -Operator, wobei der Paritätsoperator die beiden Wellenfunktionen vertauscht,  $\mathcal{P}: \Psi_1 \leftrightarrow \Psi_2$ . Durch die Linearität des Hamiltonoperators lassen sich die Eigenwerte der Eigenwertgleichung

$$\begin{pmatrix} -i\gamma & 1 \\ 1 & +i\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

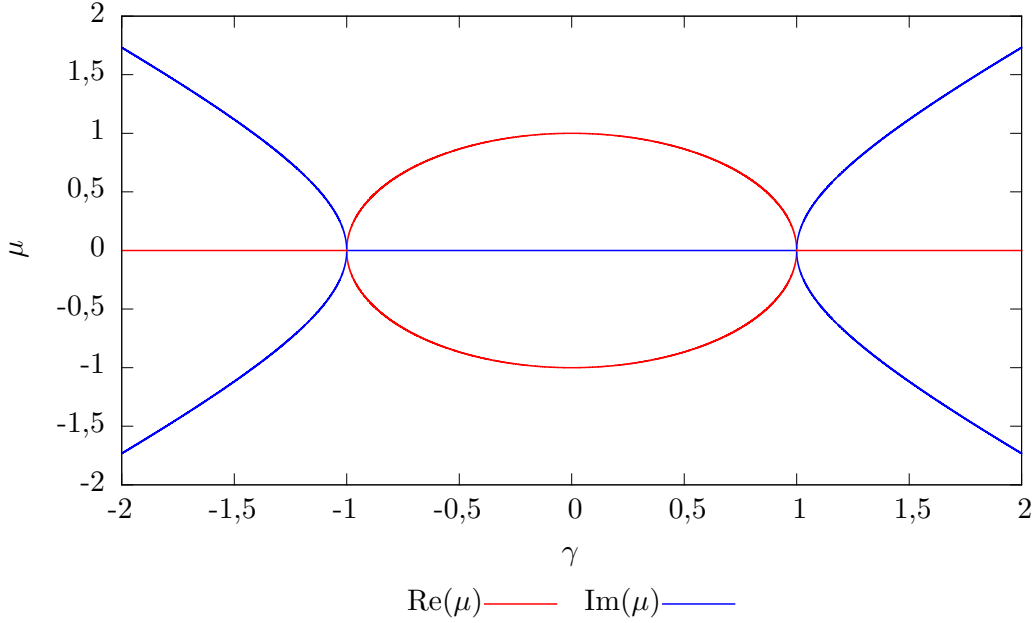
leicht mit

$$\mu_{\pm} = \pm \sqrt{1 - \gamma^2} \quad (3.6)$$

bestimmen. Die Eigenwerte sind somit so lange rein reell, bis  $\gamma > 1$  ist, danach sind sie rein imaginär, siehe Abbildung 3.2. Die Dynamik des linearen Systems wird in [3–5] untersucht.

### 3.1.2 Nichtlineare gekoppelte Wellenleiter

Im Gegensatz zu den linearen gekoppelten Wellenleitern wird im nichtlinearen System der optische Kerr-Effekt der Wellenleiter berücksichtigt. Der optische Kerr-Effekt besagt,


 Abbildung 3.2: Die Eigenwerte des linearen Systems über den Parameter  $\gamma$ .

dass die Intensität  $|\Psi|^2$  einer in einem Medium propagierenden Welle dessen Brechungsindex beeinflusst und somit sich selbst [9]. Durch dessen Mitbetrachtung ergibt sich somit ein nichtlinearer Term. Die Stärke des Kerr-Effekts wird mit dem Parameter  $\chi$  bezeichnet. Die gekoppelten DGLs ergeben sich damit zu

$$i \frac{d\Psi_1}{dz} = \Psi_2 - i\gamma\Psi_1 + \chi|\Psi_1|^2\Psi_1, \quad (3.7)$$

$$i \frac{d\Psi_2}{dz} = \Psi_1 + i\gamma\Psi_2 + \chi|\Psi_2|^2\Psi_2. \quad (3.8)$$

Der Hamiltonoperator ist durch

$$H = \begin{pmatrix} \chi|\Psi_1|^2 - i\gamma & 1 \\ 1 & \chi|\Psi_2|^2 + i\gamma \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

gegeben. Ein wichtiger Unterschied zum linearen System ist das Auftreten der Unidirektionalität ab einem bestimmten kritischen Wert  $\chi_d$  [4]. Die gekoppelten Wellenleiter werden als unidirektional bezeichnet, wenn, egal welche Anfangsbedingungen für die Wellenfunktionen gewählt werden, die Welle nach einer gewissen Propagationsweite nur den Wellenleiter mit Zuwachs verlässt, siehe Abbildung 3.3.

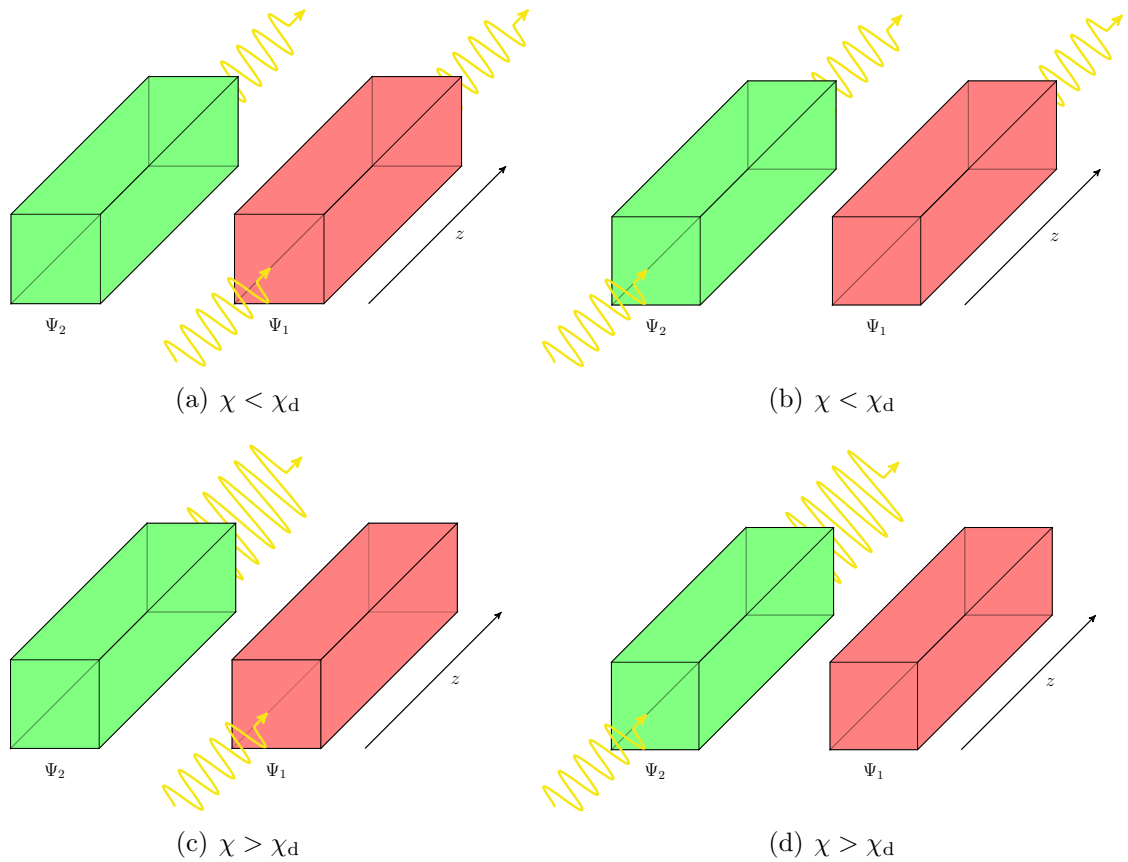


Abbildung 3.3: Der schematische Aufbau der Wellenleiter wie in Abbildung 3.1, jedoch mit, in gelb dargestellter, Welle. Die Abbildungen 3.3(a) und 3.3(b) zeigen ein System, in dem die Stärke des Kerr-Effekts unter dem kritischen Wert  $\chi_d$  liegt. Egal in welchen der beiden Wellenleiter die Wellen eintritt, oszilliert ihre Intensität zwischen den beiden Wellenleitern hin und her. Die Abbildungen 3.3(c) und 3.3(d) zeigen ein System, in dem die Stärke des Kerr-Effekts über dem kritischen Wert  $\chi_d$  liegt. Bei diesem System ist es egal, in welchen der beiden Wellenleiter die Welle eintritt, es ergibt sich am Ende stets eine Welle größerer Intensität bei dem Wellenleiter mit Zuwachs.



## 3.2 Dynamik der nichtlinearen gekoppelten Wellenleiter

Zur Untersuchung der Dynamik der nichtlinear gekoppelten Wellenleiter werden die DGLs (3.7) und (3.8),

$$i \frac{d}{dz} \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \chi |\Psi_1|^2 - i\gamma & 1 \\ 1 & \chi |\Psi_2|^2 + i\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{pmatrix}, \quad (3.10)$$

numerisch für verschiedene Parameter gelöst.

### 3.2.1 Unidirektionalität der Wellenleiter

Zuerst werden die Norm  $n$  mit

$$n = |\Psi_1|^2 + |\Psi_2|^2 \quad (3.11)$$

und das Intensitätsungleichgewicht  $\kappa$  mit

$$\kappa = |\Psi_1|^2 - |\Psi_2|^2 \quad (3.12)$$

eingeführt. Die Norm soll zu Beginn  $n = 1$  sein und als Anfangsbedingung wird

$$\Psi_1 = 1 \quad \text{und} \quad \Psi_2 = 0 \quad (3.13)$$

gewählt. Dies ergibt  $\kappa = 1$ , was einem maximalen Intensitätsungleichgewicht entspricht. Der Wellenleiter mit Verlust hat somit zu Beginn die gesamte Intensität, während im Wellenleiter mit Zuwachs keine vorhanden ist. Um das Auftreten der Unidirektionalität der Wellenleiter ab einem gewissen Grenzwert  $\chi_d$  zu zeigen, wird die Dynamik der Wellenfunktionen für diese Anfangsbedingungen, einmal für  $\gamma = 0,1$  und  $\chi = 0,5$ , siehe Abbildung 3.4(a), und für  $\gamma = 0,1$  und  $\chi = 4,5$ , siehe Abbildung 3.4(b), untersucht. Bei einem Wert von  $\chi = 0,5$  kommt es zu einer Oszillation der Intensität zwischen den beiden Wellenleitern. Bei einem Wert von  $\chi = 4,5$  ergibt sich ein anderes Verhalten. Nach kleineren Fluktuationen konvergiert die Intensität des Verlust-Wellenleiters gegen 0, während die Intensität des Zuwachs-Wellenleiters exponentiell ansteigt. Die Wellenleiter verhalten sich unidirektional. Zwischen diesen zwei Werten muss somit  $\chi_d$  liegen.

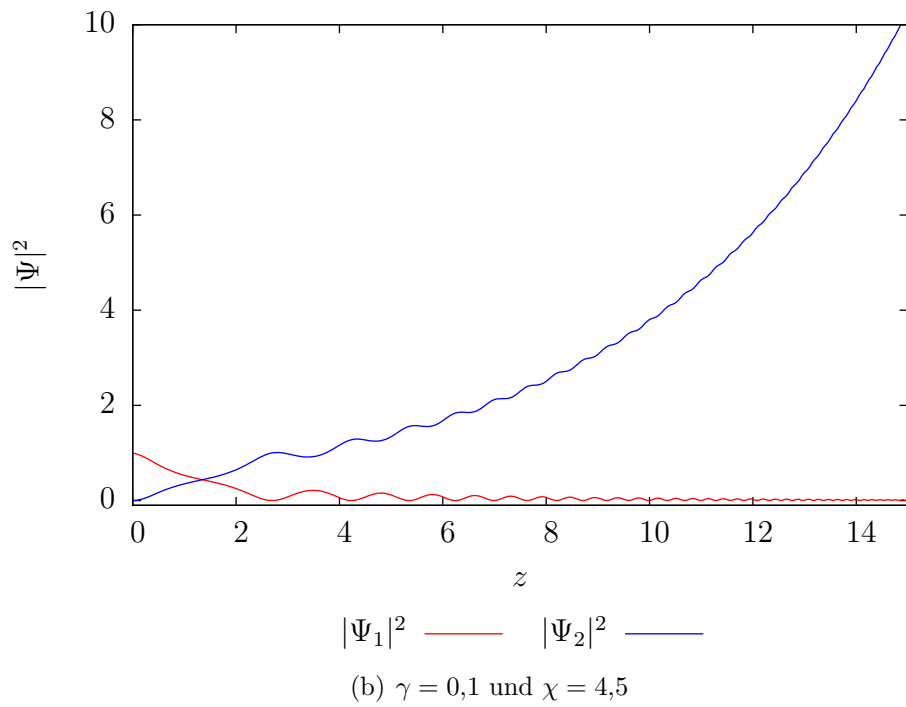
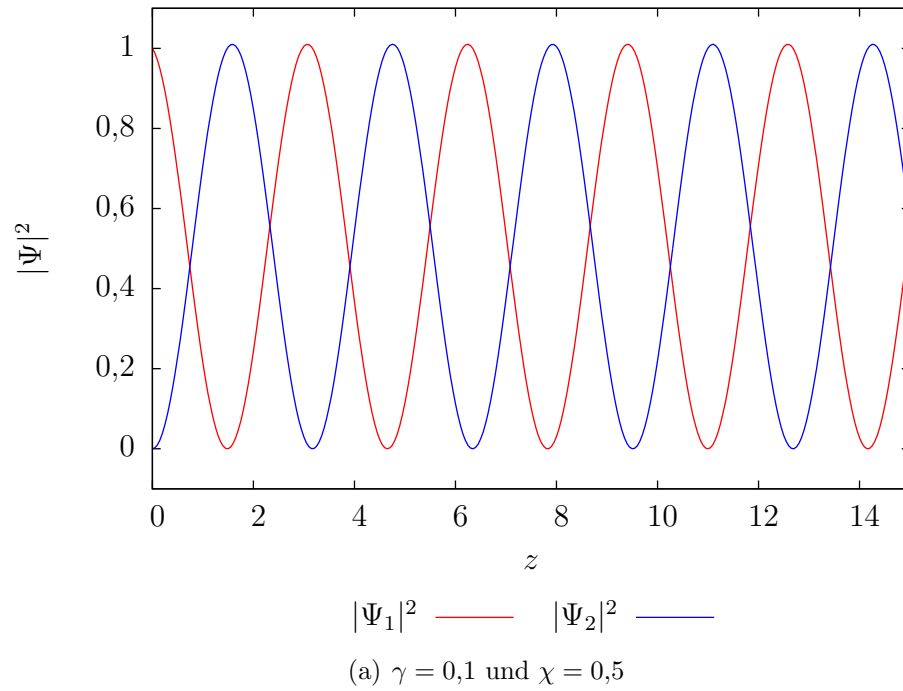


Abbildung 3.4: Die Dynamik der nichtlinearen gekoppelten Wellenleiter für einen Zuwachs/Verlust von  $\gamma = 0,1$  und zwei verschiedenen starke Nichtlinearitäten  $\chi$ .

### 3.2.2 Bestimmung des kritischen Wertes $\chi_d$

Der kritische Wert  $\chi_d$  bezeichnet den Punkt, ab dem die Wellenleiter bei einem gegebenen Wert  $\gamma$  unidirektional werden. Dies wird zunächst für ein Intensitätsungleichgewicht von  $\kappa = 1$  für verschiedene Zuwachs/Verlust-Werte  $\gamma$ , siehe Abbildung 3.5, untersucht. Es zeigt sich, dass  $\chi_d$  für  $\gamma \rightarrow 0$  gegen einen festen Wert konvergiert. Für ein System, das diesen Wert überschreitet sind die Wellenleiter immer unidirektional. Für  $\gamma \rightarrow 1$  reicht ein schwächerer Kerr-Effekt aus, um die Unidirektionalität zu erreichen.

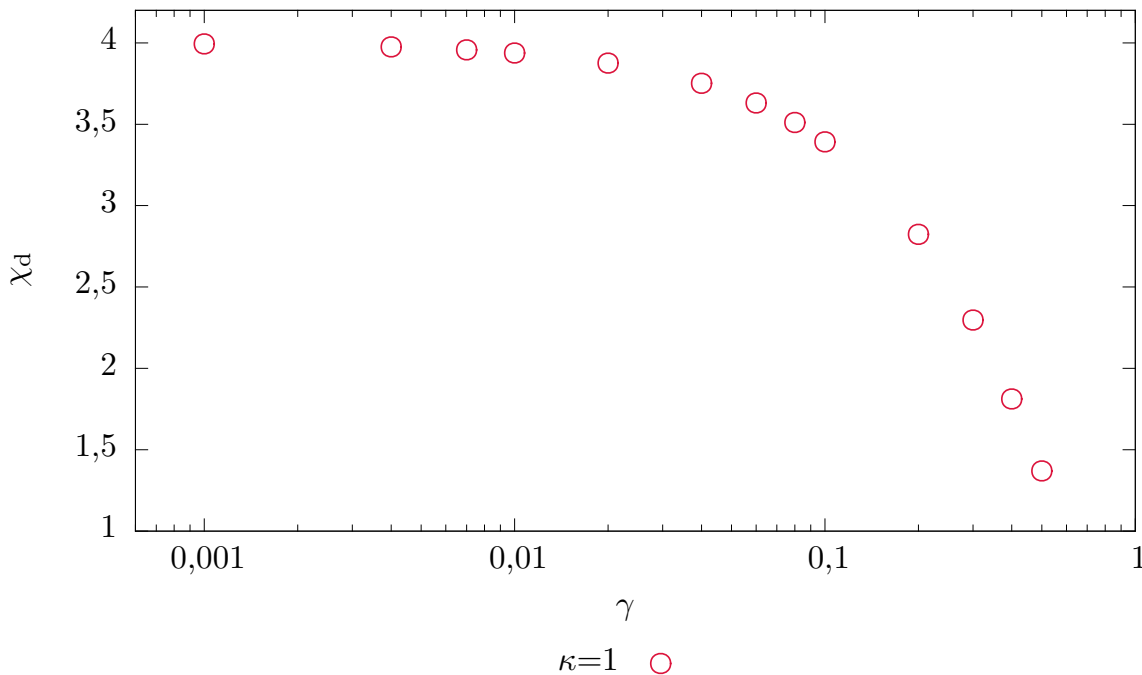


Abbildung 3.5: Die kritischen Werte  $\chi_d$  für verschiedene Zuwachs/Verlust-Werte  $\gamma$  bei einem Intensitätsungleichgewicht von  $\kappa = 1$ .

Für andere Anfangsbedingungen, und somit andere  $\kappa$ , ergeben sich andere kritische Werte, siehe Abbildung 3.6. Dabei werden jedoch stets reelle Anfangswerte gewählt, die  $n = 1$  erfüllen. Es ergibt sich, dass der Wert, gegen den  $\chi_d$  für  $\gamma \rightarrow 0$  konvergiert, von  $\kappa$  abhängt. Er erreicht sein Minimum für eine symmetrische Intensitätsverteilung,  $\kappa = 0$ . Für negative  $\kappa$  ergeben sich die gleichen  $\chi_d$  wie für positive  $\kappa$ , deshalb sind sie nicht eingezeichnet. Es ist somit für die Unidirektionalität irrelevant in welchen Wellenleiter der Großteil der Welle eindringt.

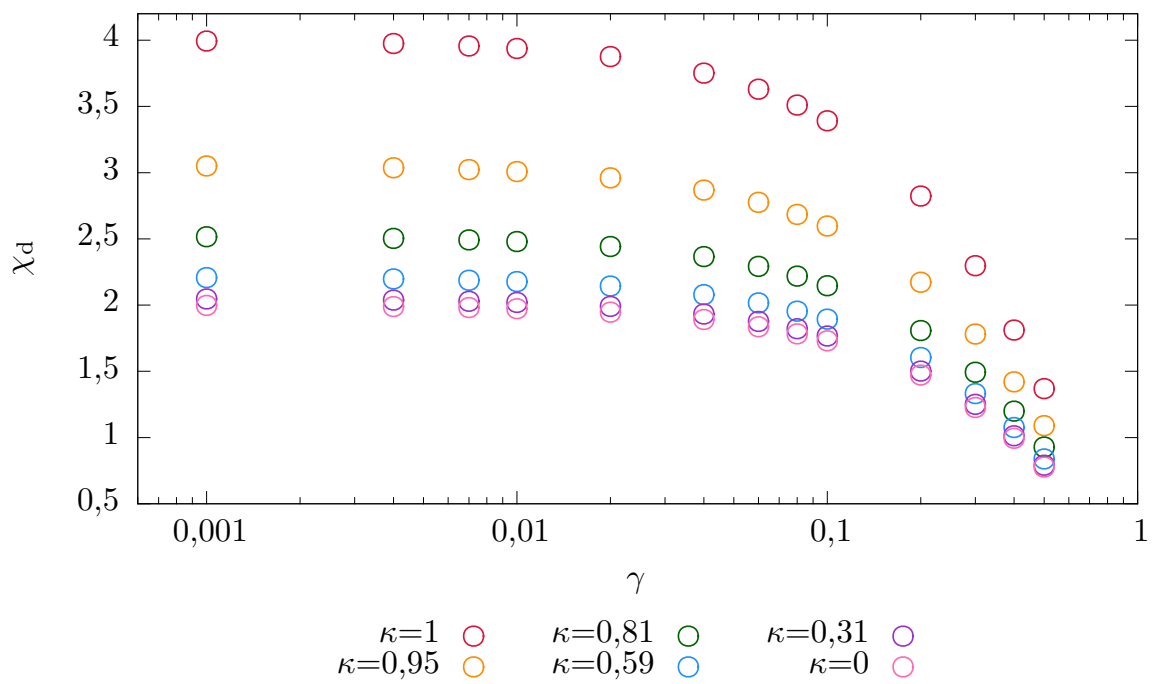


Abbildung 3.6: Die kritischen Werte  $\chi_d$  für verschiedene Zuwachs/Verlust-Werte  $\gamma$  bei verschiedenen Intensitätsungleichgewichten.

# 4 Stationäre Zustände eines Bose-Einstein-Kondensates in einer Doppelmulde

Der Begriff des Bose-Einstein-Kondensates wird erklärt und eine Möglichkeit, dessen Dynamik zu betrachten, eingeführt. Darauf wird ein System, bestehend aus einem Bose-Einstein-Kondensat in einer  $\mathcal{PT}$ -symmetrischen Doppelmulde, eingeführt und die Analogie dieses Systems zu dem der nichtlinearen gekoppelten Wellenleitern aus Kapitel 3 dargestellt. Die stationäre Lösung des Bose-Einstein-Kondensates wird bestimmt und für verschiedene Parameter betrachtet. Außerdem wird die Stabilität der stationären Zustände untersucht.

## 4.1 Bose-Einstein-Kondensate

Ein Bose-Einstein-Kondensat besteht aus Bosonen, die sich alle im Grundzustand des Systems befinden. Bosonen besitzen einen ganzzahligen Spin und sind somit nicht dem Paulischen Ausschließungsprinzip unterworfen. Daher können sie in großer Zahl ein und denselben Zustand besetzen. Die mittlere Besetzungszahl eines Zustandes ist durch die Bose-Einstein-Statistik gegeben [10],

$$\langle n(E) \rangle = \frac{1}{\exp\left(\frac{E-\mu}{k_B T}\right) - 1}. \quad (4.1)$$

Dabei wird mit  $\mu$  das chemische Potential bezeichnet. Damit es zu keinen negativen Besetzungszahlen kommt, muss  $\mu$  kleiner als die Energie des Grundzustands  $E_0$  sein. Im Limes  $T \rightarrow 0$  konvergiert das chemische Potential  $\mu$  so gegen  $E_0$ , dass sich alle Bosonen im Grundzustand befinden. Für ausreichend kleine Temperaturen befindet sich jedoch bereits ein Großteil der Bosonen im Grundzustand. Solch ein System wird als Bose-Einstein-Kondensat bezeichnet und kann durch eine einzige Wellenfunktion beschrieben werden.

### 4.1.1 Gross-Pitaevskii-Gleichung (GPE)

Die Dynamik eines Bose-Einstein-Kondensates kann durch die Gross-Pitaevskii-Gleichung beschrieben werden [6]. Sie ergibt sich durch eine *mean field*-Näherung der Wechselwirkungen der Bosonen. Die GPE lautet

$$\left( -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x) + g|\Psi(x, t)|^2 \right) \Psi(x, t) = i\hbar \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial t}. \quad (4.2)$$

Sie unterscheidet sich nur durch den nichtlinearen Term von der Schrödingergleichung, dessen Ursprung die Näherung der Wechselwirkungen der Bosonen ist.

### 4.1.2 Bose-Einstein-Kondensat in einem Doppelmuldenpotential

Im Folgenden wird ein Bose-Einstein-Kondensat in einem Doppelmuldenpotential untersucht. In solch einem System kann die Wellenfunktion  $\Psi(x, t)$  in einem Zwei-Moden-Modell approximiert werden [11]. Dabei werden die Funktionen  $\Omega_1$  und  $\Omega_2$  eingeführt, die sich in der linken bzw. in der rechten Mulde des Potentials befinden. Die Wellenfunktion lautet damit

$$\Psi(x, t) = \Psi_1(t)\Omega_1(x) + \Psi_2(t)\Omega_2(x). \quad (4.3)$$

Die Mulden werden als endlich tief und als symmetrisch angenommen, womit sich eine Kopplung der beiden Moden ergibt, die mit  $v$  bezeichnet wird, und von der Tiefe der Mulden abhängt. Die GPE (4.2) wird somit mit dem Ansatz (4.3) zu

$$i\hbar \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g|\Psi_1|^2 & v \\ v & g|\Psi_2|^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{pmatrix}. \quad (4.4)$$

Soll jetzt noch angenommen werden, dass eine der Mulden eine Quelle und die andere eine Senke von Bosonen darstellt, kann dafür ein  $\mathcal{PT}$ -symmetrisches komplexes Potential benutzt werden. Dabei wird der Zufluss der Bosonen mit  $\gamma$  bezeichnet und soll gleich dem Koeffizienten des Abflusses sein. Damit ergibt sich

$$i\hbar \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g|\Psi_1|^2 - i\gamma & v \\ v & g|\Psi_2|^2 + i\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{pmatrix}. \quad (4.5)$$

Dies ist analog zur Gleichung der nichtlinearen gekoppelten Wellenleiter (3.10), wobei die Propagationsrichtung  $z$  hier der Zeit  $t$  entspricht. Um die Analogie der beiden Gleichungen zu verdeutlichen, gilt von nun an  $\hbar = 1$ ,  $g = \chi$ ,  $t = z$  und  $v = 1$ , wodurch (4.5) zu

$$i \frac{d}{dz} \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \chi|\Psi_1|^2 - i\gamma & 1 \\ 1 & \chi|\Psi_2|^2 + i\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{pmatrix} \quad (4.6)$$

wird.

## 4.2 Stationäre Lösung des Bose-Einstein-Kondensates in der Doppelmulde

Im Abschnitt 4.1.2 wurde die Analogie zwischen den nichtlinearen gekoppelten Wellenleitern und dem Bose-Einstein-Kondensates in einer Doppelmulde dargestellt. Da im späteren Verlauf der Arbeit die stationäre Lösung des Bose-Einstein-Kondensates in der Doppelmulde mit den Ergebnissen des optischen Systems verglichen werden sollen, wird Gleichung (4.6) untersucht, in der die Variable der Zeit  $t$  mit der der Propagationsrichtung  $z$  ausgetauscht wurde. Um die stationären Lösungen von (4.6) zu bestimmen, wird  $\vec{\Phi}(z) = e^{-i\mu z} \vec{\Psi}$  als Ansatz benutzt. Dies führt auf die Eigenwertgleichung

$$\begin{pmatrix} -i\gamma + \chi|\Psi_1|^2 & 1 \\ 1 & i\gamma + \chi|\Psi_2|^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{pmatrix}, \quad (4.7)$$

die es zu lösen gilt. Das folgende Vorgehen folgt dem aus [11].

### 4.2.1 Bestimmung der Eigenwerte der stationären Eigenwertgleichung

Um die Bestimmung der Eigenwerte zu erleichtern, wird zunächst eine konstante Energieverschiebung von  $\frac{\chi}{2}(|\Psi_1|^2 + |\Psi_2|^2)$  auf (4.7) angewandt. Dies liefert

$$\begin{pmatrix} -i\gamma + \frac{\chi}{2}(|\Psi_1|^2 - |\Psi_2|^2) & 1 \\ 1 & i\gamma - \frac{\chi}{2}(|\Psi_1|^2 - |\Psi_2|^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{pmatrix} \quad (4.8)$$

als neue Eigenwertgleichung. Durch Multiplikation von  $\begin{pmatrix} \Psi_1^* \\ \Psi_2^* \end{pmatrix}$  auf (4.8) ergeben sich

$$-i\gamma|\Psi_1|^2 + \frac{\chi}{2}(|\Psi_1|^2 - |\Psi_2|^2)|\Psi_1|^2 + \Psi_1^*\Psi_2 = \mu|\Psi_1|^2, \quad (4.9)$$

$$i\gamma|\Psi_2|^2 - \frac{\chi}{2}(|\Psi_1|^2 - |\Psi_2|^2)|\Psi_2|^2 + \Psi_1\Psi_2^* = \mu|\Psi_2|^2. \quad (4.10)$$

Die Addition von (4.9) und (4.10) liefert

$$\begin{aligned} -i\gamma(|\Psi_1|^2 - |\Psi_2|^2) + (\Psi_1^*\Psi_2 + \Psi_1\Psi_2^*) + \frac{\chi}{2}(|\Psi_1|^4 - 2|\Psi_1|^2|\Psi_2|^2 + |\Psi_2|^4) \\ = \mu(|\Psi_1|^2 + |\Psi_2|^2). \end{aligned} \quad (4.11)$$

Durch Einführung der Bezeichnungen der Norm  $n = |\Psi_1|^2 + |\Psi_2|^2$  und des Intensitätsungleichgewichts  $\kappa = |\Psi_1|^2 - |\Psi_2|^2$  sowie der Festlegung, dass die Norm  $n = 1$  sein soll,

ergibt sich

$$\mu = -i\gamma\kappa + (\Psi_1^*\Psi_2 + \Psi_1\Psi_2^*) + \frac{\chi}{2}\kappa^2 \quad (4.12)$$

für die Eigenwerte. Die Eigenzustände werden so gewählt, dass sie immer die Bedingungen  $n = |\Psi_1|^2 + |\Psi_2|^2 = 1$  und  $\kappa = |\Psi_1|^2 - |\Psi_2|^2$  erfüllen. Dies führt zu

$$\Psi_1 = \sqrt{\frac{\kappa+1}{2}}e^{-iq} \quad \text{und} \quad \Psi_2 = \sqrt{\frac{1-\kappa}{2}}e^{iq}. \quad (4.13)$$

Mit diesen Eigenzuständen wird (4.12) zu

$$\mu = -i\gamma\kappa + \frac{1}{2}\sqrt{1-\kappa^2}(e^{i2q} + e^{-i2q}) + \frac{\chi}{2}\kappa^2. \quad (4.14)$$

Um die Eigenwerte zu bestimmen, müssen zuerst die möglichen Intensitätsungleichgewichte für stationäre Lösungen und deren mögliche Phasen  $q$  gefunden werden.

### 4.2.2 Bestimmung der Intensitätsungleichgewichte $\kappa$ der stationären Zustände

Um die Intensitätsungleichgewichte  $\kappa$  der stationären Zustände zu bestimmen, werden zunächst die Gleichungen der Dynamik betrachtet

$$\dot{\Psi}_1 = -\gamma\Psi_1 - i\frac{\chi}{2}\kappa\Psi_1 - i\Psi_2, \quad (4.15)$$

$$\dot{\Psi}_2 = \gamma\Psi_2 + i\frac{\chi}{2}\kappa\Psi_2 - i\Psi_1, \quad (4.16)$$

wobei  $\dot{\Psi} = \frac{d}{dz}\Psi$  gilt. Die Norm ist durch

$$n = \Psi_1^*\Psi_1 + \Psi_2^*\Psi_2 \quad (4.17)$$

gegeben und ihre Ableitung ergibt sich mit (4.15) und (4.16) zu

$$\begin{aligned} \dot{n} &= \dot{\Psi}_1^*\Psi_1 + \Psi_1^*\dot{\Psi}_1 + \dot{\Psi}_2^*\Psi_2 + \Psi_2^*\dot{\Psi}_2 \\ &= -\gamma\Psi_1^*\Psi_1 + i\frac{\chi}{2}\kappa\Psi_1^*\Psi_1 + i\Psi_1\Psi_2^* - \gamma\Psi_1^*\Psi_1 - i\frac{\chi}{2}\kappa\Psi_1^*\Psi_1 - i\Psi_1^*\Psi_2 \\ &\quad + \gamma\Psi_2^*\Psi_2 - i\frac{\chi}{2}\kappa\Psi_2^*\Psi_2 + i\Psi_1^*\Psi_2 + \gamma\Psi_2^*\Psi_2 + i\frac{\chi}{2}\kappa\Psi_2^*\Psi_2 - i\Psi_1\Psi_2^* \\ &= -2\gamma\kappa. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Die Norm ist somit für Intensitätsungleichgewichte von  $\kappa \neq 0$  nicht erhalten. Um die stationären Zustände zu erhalten, soll die Dynamik auf der Blochkugel dargestellt werden. Da nur  $n = 1$  normierte stationäre Zustände gesucht werden, ist dies möglich. Zur



Darstellung auf der Blochkugel werden die renormierten Zustandsvektoren verwendet [12],

$$\Phi_{1/2} = \frac{\Psi_{1/2}}{\sqrt{|\Psi_1|^2 + |\Psi_2|^2}}. \quad (4.19)$$

Sie erhalten per Definition die Norm,

$$|\Phi_1|^2 + |\Phi_2|^2 = 1. \quad (4.20)$$

Dies liefert eine neue Gleichung der Dynamik,

$$i\sqrt{n}\frac{d}{dz}\begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{pmatrix} + i\frac{1}{2}\frac{\dot{n}}{\sqrt{n}}\begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i\gamma + \frac{\chi}{2}\kappa & 1 \\ 1 & i\gamma - \frac{\chi}{2}\kappa \end{pmatrix}\sqrt{n}\begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{pmatrix}, \quad (4.21)$$

die sich mit (4.18) auch als

$$i\frac{d}{dz}\begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\chi}{2}\kappa - i\gamma(1 - \frac{\kappa}{n}) & 1 \\ 1 & -\frac{\chi}{2} + i\gamma(1 + \frac{\kappa}{n}) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{pmatrix} \quad (4.22)$$

schreiben lässt. Daraus ergeben sich

$$\dot{\Phi}_1 = -i\frac{\chi}{2}\kappa\Phi_1 - \gamma(1 - \frac{\kappa}{n})\Phi_1 - i\Phi_2, \quad (4.23)$$

$$\dot{\Phi}_2 = i\frac{\chi}{2}\kappa\Phi_2 + \gamma(1 + \frac{\kappa}{n})\Phi_2 - i\Phi_1, \quad (4.24)$$

äquivalent zu (4.15) und (4.16). Die Blochvektoren sind durch

$$s_x = \frac{1}{2}(\Phi_1^*\Phi_2 + \Phi_1\Phi_2^*), \quad (4.25)$$

$$s_y = \frac{1}{2i}(\Phi_1^*\Phi_2 - \Phi_1\Phi_2^*), \quad (4.26)$$

$$s_z = \frac{1}{2}(\Phi_1^*\Phi_1 - \Phi_2^*\Phi_2) \quad (4.27)$$

gegeben. Um auf die stationären Lösungen schließen zu können, müssen zunächst die Ableitungen von (4.25), (4.26) und (4.27) bestimmt werden.

$$\begin{aligned} \dot{s}_x &= \frac{1}{2}(\dot{\Phi}_1^*\Phi_2 + \dot{\Phi}_2\Phi_1^* + \dot{\Phi}_1\Phi_2^* + \dot{\Phi}_2^*\Phi_1) \\ &= \frac{1}{2}\left[i\frac{\chi}{2}\kappa\Phi_1^*\Phi_2 - \gamma(1 - \frac{\kappa}{n})\Phi_1^*\Phi_2 + i\Phi_2^*\Phi_2 + i\frac{\chi}{2}\kappa\Phi_1^*\Phi_2 - \gamma(1 - \frac{\kappa}{n})\Phi_1^*\Phi_2 + i\Phi_1^*\Phi_1 \right. \\ &\quad \left. - \frac{\chi}{2}\kappa\Phi_1\Phi_2^* - \gamma(1 - \frac{\kappa}{n})\Phi_1\Phi_2^* - i\Phi_2^*\Phi_2 - \frac{\chi}{2}\kappa\Phi_1\Phi_2^* - \gamma(1 - \frac{\kappa}{n})\Phi_1\Phi_2^* - i\Phi_1^*\Phi_1\right] \\ &= i\frac{\chi}{2}\kappa(\Phi_1^*\Phi_2 - \Phi_1\Phi_2^*) + \gamma\frac{\kappa}{n}(\Phi_1^*\Phi_2 + \Phi_1\Phi_2^*) \\ &= -\chi\kappa s_y + 2\gamma\frac{\kappa}{n}s_x. \end{aligned} \quad (4.28)$$

$$\begin{aligned}
\dot{s}_y &= \frac{1}{2i}(\dot{\Phi}_1^* \Phi_2 + \dot{\Phi}_2 \Phi_1^* - \dot{\Phi}_1 \Phi_2^* - \dot{\Phi}_2^* \Phi_1) \\
&= \frac{1}{2i} \left[ i \frac{\chi}{2} \kappa \Phi_1^* \Phi_2 - \gamma \left(1 - \frac{\kappa}{n}\right) \Phi_1^* \Phi_2 + i \Phi_2^* \Phi_2 + i \frac{\chi}{2} \kappa \Phi_1^* \Phi_2 + \gamma \left(1 - \frac{\kappa}{n}\right) \Phi_1^* \Phi_2 - i \Phi_1^* \Phi_1 \right. \\
&\quad \left. + i \frac{\chi}{2} \kappa \Phi_1 \Phi_2^* + \gamma \left(1 - \frac{\kappa}{n}\right) \Phi_1 \Phi_2^* + i \Phi_2^* \Phi_2 + i \frac{\chi}{2} \kappa \Phi_1 \Phi_2^* - \gamma \left(1 - \frac{\kappa}{n}\right) \Phi_1 \Phi_2^* - i \Phi_1^* \Phi_1 \right] \\
&= \frac{1}{i} \left[ i \frac{\chi}{2} (\Phi_1^* \Phi_2 + \Phi_1 \Phi_2^*) + \gamma \frac{\kappa}{n} (\Phi_1^* \Phi_2 - \Phi_1 \Phi_2^*) + i (\Phi_2^* \Phi_2 - \Phi_1^* \Phi_1) \right] \\
&= \chi \kappa s_x + 2\gamma \frac{\kappa}{n} s_y - 2s_z.
\end{aligned} \tag{4.29}$$

$$\begin{aligned}
\dot{s}_z &= \frac{1}{2}(\dot{\Phi}_1^* \Phi_1 + \dot{\Phi}_1 \Phi_1^* - \dot{\Phi}_2^* \Phi_2 - \dot{\Phi}_2 \Phi_2^*) \\
&= \frac{1}{2} \left[ i \frac{\chi}{2} \kappa \Phi_1^* \Phi_1 - \gamma \left(1 - \frac{\kappa}{n}\right) \Phi_1^* \Phi_1 + i \Phi_1 \Phi_2^* - i \frac{\chi}{2} \kappa \Phi_1^* \Phi_1 - \gamma \left(1 - \frac{\kappa}{n}\right) \Phi_1^* \Phi_1 - i \Phi_1^* \Phi_2 \right. \\
&\quad \left. + i \frac{\chi}{2} \kappa \Phi_2^* \Phi_2 - \gamma \left(1 + \frac{\kappa}{n}\right) \Phi_2^* \Phi_2 - i \Phi_1^* \Phi_2 - i \frac{\chi}{2} \kappa \Phi_2 \Phi_2^* - \gamma \left(1 + \frac{\kappa}{n}\right) \Phi_2^* \Phi_2 + i \Phi_1 \Phi_2^* \right] \\
&= -\gamma (\Phi_1^* \Phi_1 + \Phi_2^* \Phi_2) + \gamma \frac{\kappa}{n} (\Phi_1^* \Phi_1 - \Phi_2^* \Phi_2) - i (\Phi_1^* \Phi_2 - \Phi_1 \Phi_2^*) \\
&= -\gamma \left( n - 4 \frac{s_z^2}{n} \right) + 2s_y.
\end{aligned} \tag{4.30}$$

Die stationären Zustände sind nun über die Bedingung

$$\dot{\vec{s}} = \begin{pmatrix} \dot{s}_x \\ \dot{s}_y \\ \dot{s}_z \end{pmatrix} = \vec{0} \tag{4.31}$$

gegeben. Damit ergibt sich aus (4.30)

$$s_y = \frac{\gamma}{2} \left( n - 4 \frac{s_z^2}{n} \right), \tag{4.32}$$

was in (4.28) eingesetzt wird, um

$$\kappa s_x = \kappa \frac{\chi n}{4} \left( n - 4 \frac{s_z^2}{n} \right) \tag{4.33}$$

zu erhalten. Gleichung (4.32) und (4.33) werden in (4.29) eingesetzt, woraus

$$-\frac{\kappa^3}{n} \left( \frac{\chi^2}{4} n + \frac{\gamma^2}{n} \right) + \kappa n \left( \frac{\chi^2}{4} + \gamma^2 - 1 \right) = 0 \tag{4.34}$$

folgt. Mit der Bedingung für die Norm  $n = 1$  folgt aus (4.34) das Polynom dritten Grades für die Intensitätsungleichgewichte

$$\kappa^3\left(\frac{\chi^2}{4} + \gamma^2\right) + \kappa\left(1 - \frac{\chi^2}{4} - \gamma^2\right) = 0. \quad (4.35)$$

Daraus ergeben sich die möglichen Intensitätsungleichgewichte der stationäre Zustände zu

$$\kappa = 0, \pm \sqrt{1 - \frac{1}{\frac{\chi^2}{4} + \gamma^2}}. \quad (4.36)$$

### 4.2.3 Bestimmung der möglichen Phasen $q$

Zunächst wird Gleichung (4.10) von Gleichung (4.9) subtrahiert, wobei  $n = |\Psi_1|^2 + |\Psi_2|^2 = 1$  und  $\kappa = |\Psi_1|^2 - |\Psi_2|^2$  benutzt wird,

$$-i\gamma + \frac{1}{2}\sqrt{1 - \kappa^2}(e^{i2q} - e^{-i2q}) + \frac{\chi}{2}\kappa = \mu\kappa. \quad (4.37)$$

Für  $\kappa = 0$  wird (4.37) zu

$$\begin{aligned} -i\gamma + \frac{1}{2}(e^{i2q} - e^{-i2q}) &= 0 \\ \implies \sin(2q) &= \gamma, \end{aligned} \quad (4.38)$$

woraus sich die mögliche Phase zu

$$q = \frac{1}{2} \arcsin(\gamma) \quad (4.39)$$

ergibt. Für  $\kappa = \pm \sqrt{1 - \frac{1}{\frac{\chi^2}{4} + \gamma^2}}$  wird (4.14) als  $\mu$  in (4.37) eingesetzt, woraus sich

$$\begin{aligned} -i\gamma + \frac{1}{2}\sqrt{1 - \kappa^2}(e^{i2q} - e^{-i2q}) + \frac{\chi}{2}\kappa^2 &= -i\gamma\kappa^2 + \frac{1}{2}\sqrt{1 - \kappa^2}(e^{i2q} + e^{-i2q})\kappa + \frac{\chi}{2}\kappa^3 \\ -i\gamma + \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\frac{\chi^2}{4} + \gamma^2}}(e^{i2q} - e^{-i2q}) + \frac{\chi}{2}\kappa &= (-i\gamma + \frac{\chi}{2}\kappa) \left(1 - \frac{1}{\frac{\chi^2}{4} + \gamma^2}\right) + \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\frac{\chi^2}{4} + \gamma^2}}(e^{i2q} + e^{-i2q})\kappa \\ \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\frac{\chi^2}{4} + \gamma^2}}(e^{i2q} - e^{-i2q}) &= i\gamma\frac{1}{\frac{\chi^2}{4} + \gamma^2} - \frac{\chi}{2}\kappa\frac{1}{\frac{\chi^2}{4} + \gamma^2} + \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\frac{\chi^2}{4} + \gamma^2}}(e^{i2q} + e^{-i2q})\kappa \end{aligned} \quad (4.40)$$

ergibt. Dies liefert durch einen Koeffizientenvergleich

$$\sin(2q) = \frac{\gamma}{\sqrt{\frac{\chi^2}{4} + \gamma^2}} \quad \text{und} \quad \cos(2q) = \frac{\frac{\chi}{2}}{\sqrt{\frac{\chi^2}{4} + \gamma^2}}, \quad (4.41)$$

woraus für die Phase

$$q = \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{2\gamma}{\chi}\right) \quad (4.42)$$

folgt.

#### 4.2.4 Eigenwerte für verschiedene Stärken der Nichtlinearität

Für  $\kappa = 0$  wird (4.8) zum linearen Fall, dessen Eigenwerte bereits in (3.6) bestimmt wurden und für  $\kappa \neq 0$  kann mit der bestimmten Phase nach Gleichung (4.42) die Gleichung (4.14) ausgewertet werden. Damit kann für die beiden Intensitätsungleichgewichte

$$\mu = \begin{cases} \pm\sqrt{1-\gamma^2} & \text{für } \kappa = 0, q = \frac{1}{2} \arcsin(\gamma) \\ -i\gamma\kappa + \sqrt{\frac{1-\kappa^2}{\frac{4\gamma^2}{\chi^2}+1} + \frac{\chi}{2}\kappa^2} & \text{für } \kappa = \pm\sqrt{1-\frac{1}{\frac{\chi^2}{4}+\gamma^2}}, q = \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{2\gamma}{\chi}\right) \end{cases} \quad (4.43)$$

geschrieben werden. Diese Eigenwerte treten jedoch nur auf, wenn  $\kappa$  und  $q$  rein reell sind. In Abbildung 4.1 sind die Eigenwerte für  $\chi = 1,8$  im Detail abgebildet. Es zeigen sich drei Bezirke. Der erste gilt für  $0 \leq \gamma < \gamma_d$ , wobei  $\gamma_d$  den Punkt bezeichnet, an dem die zusätzlichen Eigenwerte auftreten. In diesem Bezirk gibt es zwei Eigenwerte, die rein reell sind und sich nur durch ihr Vorzeichen unterscheiden. Der zweite Bezirk tritt auf, sobald  $\kappa = \pm\sqrt{1-1/((\chi^2/4) + \gamma^2)}$  rein reell wird. Dies liefert den kritischen Punkt

$$\gamma_d = \sqrt{1 - \frac{\chi^2}{4}}. \quad (4.44)$$

Je größer  $\chi$  ist, desto früher tritt  $\gamma_d$  auf und für  $\chi \geq 2$  entfällt der erste Bezirk komplett, siehe Abbildung 4.2, in der die Eigenwerte für verschiedene Werte von  $\chi$  abgebildet sind. Der zweite Bezirk lautet  $\gamma_d \leq \gamma < 1$ . In diesem treten vier Eigenwerte auf, wovon zwei rein reell sind und zwei komplex und komplex-konjugiert zueinander sind. Ab diesem Bereich ist die  $\mathcal{PT}$ -Symmetrie somit gebrochen. Der dritte Bezirk lautet  $1 \leq \gamma$ , wobei die zwei reellen Eigenwerte verschwinden, da ihre zugehörige Phase  $q$  komplex wird, und nur noch die zwei komplexen Eigenwerte zurückbleiben.

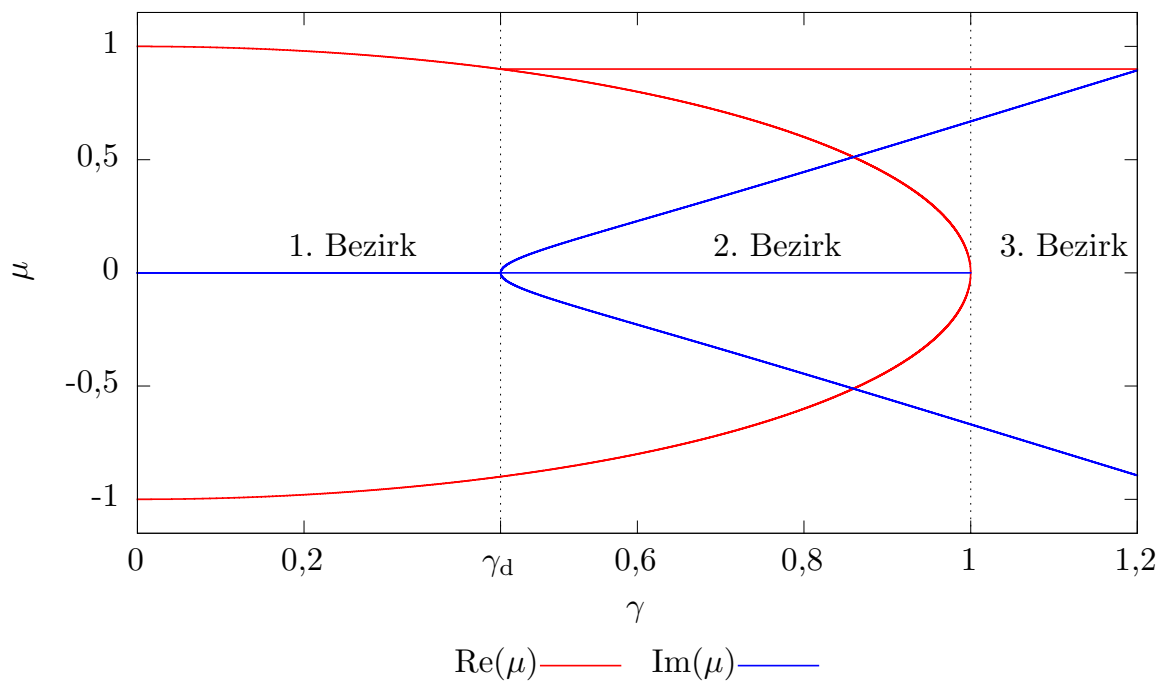


Abbildung 4.1: Der Real- und Imaginärteil der Eigenwerte  $\mu$  über  $\gamma$  für  $\chi = 1,8$ . Eingezeichnet sind die drei Bezirke, in denen verschiedene Eigenwerte auftreten.

#### 4 Stationäre Zustände eines Bose-Einstein-Kondensates in einer Doppelmulde

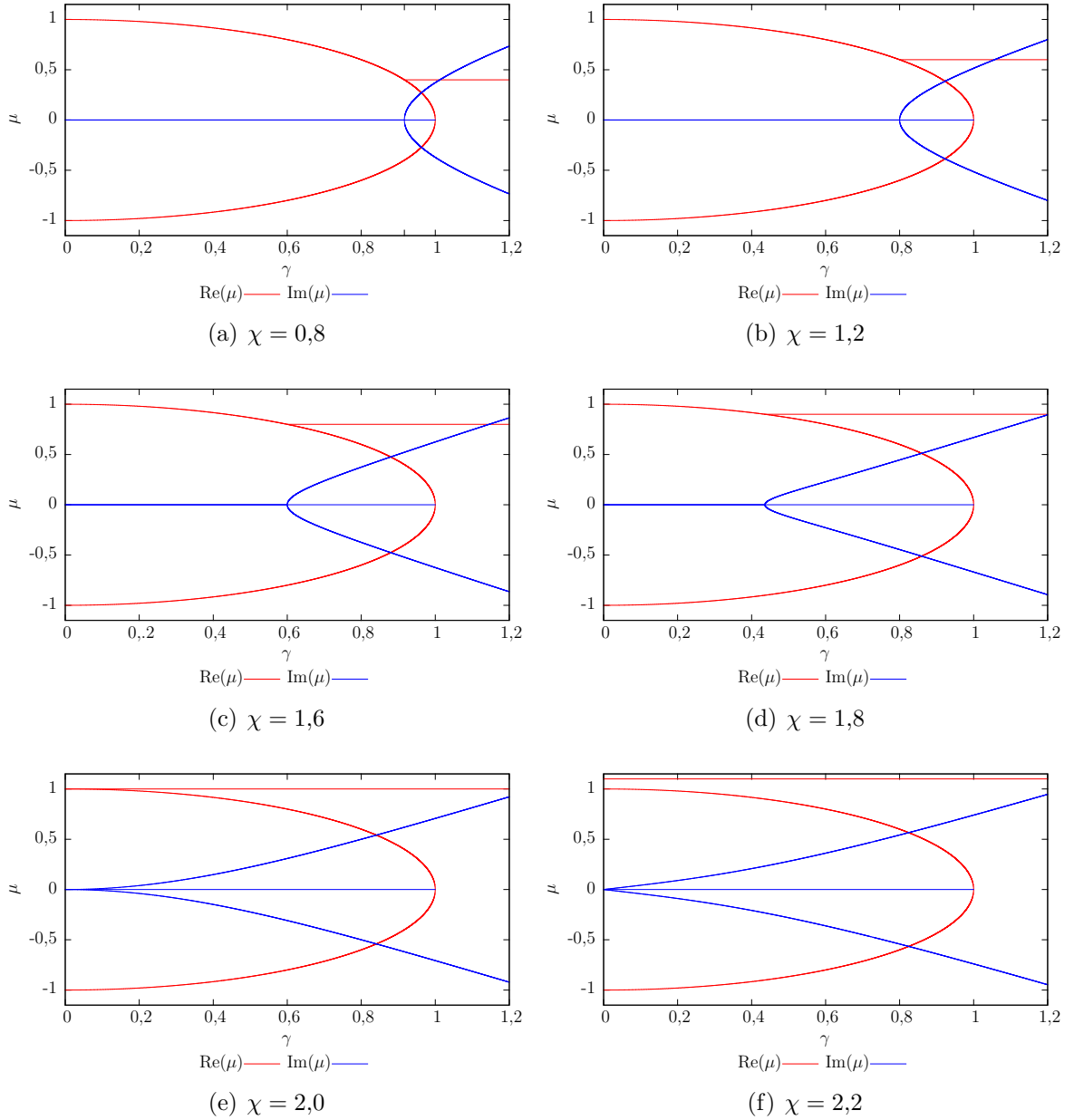


Abbildung 4.2: Die Real- und Imaginärteile der Eigenwerte  $\mu$  über  $\gamma$  für verschiedene  $\chi$ . Es ist zu erkennen, dass der kritische Punkt  $\gamma_d$  für größere  $\chi$  früher auftritt. Für  $\chi \geq 2$  treten immer komplexe Eigenwerte auf.

## 4.3 Stabilitätsuntersuchung der stationären Lösung

Wie in Abschnitt 4.2 wird Gleichung (4.6) untersucht, in der die Variable der Zeit  $t$  mit der der Propagationsrichtung  $z$  ausgetauscht wurde. Um die stationären Zustände auf ihre Stabilität zu untersuchen, wird eine kleine Störung eingeführt. Diese Störung überführt in einer Linearisierung die Gross-Pitaevskii-Gleichung (4.6) in die Bogoliubov-de Gennes-Gleichungen.

### 4.3.1 Herleitung der Bogoliubov-de Gennes-Gleichungen

Als Ausgangspunkt wird die Gleichung der Dynamik benutzt,

$$i \frac{d}{dz} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \chi |\phi_1|^2 - i\gamma & 1 \\ 1 & \chi |\phi_2|^2 + i\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}. \quad (4.45)$$

Um die Lösungen auf ihre Stabilität gegenüber kleinen Störungen zu untersuchen, wird

$$\phi_{1/2} = e^{-i\mu z} (\Psi_{1/2} + \lambda \Theta(z)_{1/2}) \quad (4.46)$$

benutzt. Dabei ist  $\Theta(z)_{1/2}$  die Art der Störung und wird als

$$\Theta(z)_{1/2} = u_{1/2} e^{-i\omega z} + v_{1/2}^* e^{i\omega^* z} \quad (4.47)$$

angenommen. Gleichung (4.46) in (4.45) eingesetzt liefert

$$\begin{aligned} \mu \begin{pmatrix} \Psi_1 + \lambda \Theta_1 \\ \Psi_2 + \lambda \Theta_2 \end{pmatrix} + i \frac{d}{dz} \begin{pmatrix} \lambda \Theta_1 \\ \lambda \Theta_2 \end{pmatrix} = \\ \begin{pmatrix} \chi |\Psi_1 + \lambda \Theta_1|^2 - i\gamma & 1 \\ 1 & \chi |\Psi_2 + \lambda \Theta_2|^2 + i\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_1 + \lambda \Theta_1 \\ \Psi_2 + \lambda \Theta_2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.48)$$

Aufgrund der kleinen Störung wird

$$\begin{aligned} |\Psi_{1/2} + \lambda \Theta_{1/2}| &= |\Psi_{1/2}|^2 + \lambda \Psi_{1/2}^* \Theta_{1/2} + \lambda \Psi_{1/2} \Theta_{1/2}^* + \lambda^2 |\Theta_{1/2}|^2 \\ &\approx |\Psi_{1/2}|^2 + \lambda \Psi_{1/2}^* \Theta_{1/2} + \lambda \Psi_{1/2} \Theta_{1/2}^* \end{aligned} \quad (4.49)$$

als Näherung benutzt. Setzt man nun die Näherung (4.49) in Gleichung (4.48) ein, ergibt sich

$$\begin{aligned} \mu \begin{pmatrix} \Psi_1 + \lambda \Theta_1 \\ \Psi_2 + \lambda \Theta_2 \end{pmatrix} + i \frac{d}{dz} \begin{pmatrix} \lambda \Theta_1 \\ \lambda \Theta_2 \end{pmatrix} = \\ \begin{pmatrix} [\chi (|\Psi_1|^2 + \lambda \Psi_1^* \Theta_1 + \lambda \Psi_1 \Theta_1^*) - i\gamma] (\Psi_1 + \lambda \Theta_1) + (\Psi_2 + \lambda \Theta_2) \\ [\chi (|\Psi_2|^2 + \lambda \Psi_2^* \Theta_2 + \lambda \Psi_2 \Theta_2^*) + i\gamma] (\Psi_2 + \lambda \Theta_2) + (\Psi_1 + \lambda \Theta_1) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.50)$$

Die Terme nullter Ordnung in  $\lambda$  ergeben die ursprüngliche GPE und können ignoriert werden. Somit bleiben nur die Terme erster Ordnung,

$$\mu \begin{pmatrix} \Theta_1 \\ \Theta_2 \end{pmatrix} + i \frac{d}{dz} \begin{pmatrix} \Theta_1 \\ \Theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\chi|\Psi_1|^2\Theta_1 + \chi\Psi_1^2\Theta_1^* - i\gamma\Theta_1 + \Theta_2 \\ 2\chi|\Psi_2|^2\Theta_2 + \chi\Psi_2^2\Theta_2^* + i\gamma\Theta_2 + \Theta_1 \end{pmatrix}, \quad (4.51)$$

übrig. Durch einsetzen von (4.47) wird (4.51) zu

$$\begin{pmatrix} (\mu + \omega)u_1 e^{-i\omega z} + (\mu - \omega^*)v_1^* e^{i\omega^* z} \\ (\mu + \omega)u_2 e^{-i\omega z} + (\mu - \omega^*)v_2^* e^{i\omega^* z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2\chi|\Psi_1|^2 - i\gamma)(u_1 e^{-i\omega z} + v_1^* e^{i\omega^* z}) + \chi\Psi_1^2(u_1^* e^{i\omega^* z} + v_1 e^{-i\omega z}) + (u_2 e^{-i\omega z} + v_2^* e^{i\omega^* z}) \\ (2\chi|\Psi_2|^2 + i\gamma)(u_2 e^{-i\omega z} + v_2^* e^{i\omega^* z}) + \chi\Psi_2^2(u_2^* e^{i\omega^* z} + v_2 e^{-i\omega z}) + (u_1 e^{-i\omega z} + v_1^* e^{i\omega^* z}) \end{pmatrix}. \quad (4.52)$$

Man erhält durch sortieren von (4.52) nach  $e^{-i\omega z}$

$$\begin{pmatrix} (\mu + \omega)u_1 \\ (\mu + \omega)u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2\chi|\Psi_1|^2 - i\gamma)u_1 + \chi\Psi_1^2 v_1 + u_2 \\ (2\chi|\Psi_2|^2 + i\gamma)u_2 + \chi\Psi_2^2 v_2 + u_1 \end{pmatrix} \quad (4.53)$$

und nach  $e^{i\omega^* z}$

$$\begin{pmatrix} (\mu - \omega^*)v_1^* \\ (\mu - \omega^*)v_2^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2\chi|\Psi_1|^2 - i\gamma)v_1^* + \chi\Psi_1^2 u_1^* + v_2^* \\ (2\chi|\Psi_2|^2 + i\gamma)v_2^* + \chi\Psi_2^2 u_2^* + v_1^* \end{pmatrix} \quad (4.54)$$

bzw. nach komplexem Konjugieren von (4.54)

$$\begin{pmatrix} (\mu^* - \omega)v_1 \\ (\mu^* - \omega)v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2\chi|\Psi_1|^2 + i\gamma)v_1 + \chi(\Psi_1^2)^* u_1 + v_2 \\ (2\chi|\Psi_2|^2 - i\gamma)v_2 + \chi(\Psi_2^2)^* u_2 + v_1 \end{pmatrix}. \quad (4.55)$$

Die Gleichungen (4.53) und (4.55) werden in eine Eigenwertgleichung der Form

$$\omega \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \underline{\underline{B}} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \quad (4.56)$$

mit der  $4 \times 4$  Matrix

$$\underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} 2\chi|\Psi_1|^2 - i\gamma - \mu & 1 & \chi\Psi_1^2 & 0 \\ 1 & 2\chi|\Psi_2|^2 + i\gamma - \mu & 0 & \chi\Psi_2^2 \\ -\chi(\Psi_1^2)^* & 0 & -2\chi|\Psi_1|^2 - i\gamma + \mu^* & -1 \\ 0 & -\chi(\Psi_2^2)^* & -1 & -2\chi|\Psi_2|^2 + i\gamma + \mu^* \end{pmatrix} \quad (4.57)$$

gebracht.



### 4.3.2 Lösungen der Bogoliubov-de Gennes-Gleichungen

Die Eigenwertgleichung (4.56) liefert für jedes  $\mu$  vier Eigenwerte  $\omega$ . Dabei sind die Zustände stabil, wenn alle  $\omega$  rein reell sind. Von Interesse ist die Stabilität der Zustände der rein reellen Eigenwerte  $\mu$ , die zu  $\mathcal{PT}$ -symmetrischen stationären Zuständen gehören. Dabei ist zu beachten, dass die Eigenwerte in Kapitel 4.2 für ein um  $-\chi/2$  verschobenes System berechnet wurden. Die korrekten Eigenwerte des Systems (4.7) bzw. (4.45) lauten

$$\mu_{\pm} = \pm \sqrt{1 - \gamma^2} + \frac{\chi}{2}. \quad (4.58)$$

Die Eigenwerte unterscheiden sich nur durch ihr Vorzeichen. Es zeigt sich, dass die Eigenwerte  $\omega$  für  $\mu_-$  für alle  $\gamma$  und  $\chi$  rein reell sind. Für  $\mu_+$  sind zwei für bestimmte Werte von  $\gamma$  und  $\chi$  rein imaginär und somit der zugehörige Zustand instabil. In Abbildung 4.3 befinden sich der Real- und Imaginärteil einer der beiden teilweise imaginären Eigenwerte  $\omega$  von  $\mu_+$  und zum Vergleich der Realteil von  $\mu$  für  $\chi = 1,6$ . Dabei ist der Bezirk, in dem der Eigenwert  $\omega$  imaginär ist, eingezeichnet. Es ist zu erkennen, dass der Zustand genau an dem Punkt instabil wird, an dem die  $\mathcal{PT}$ -Symmetrie gebrochen wird. Dieses Verhalten lässt sich für alle Werte von  $\chi$  beobachten, wobei dies in Abbildung 4.4 für verschiedene Werte von  $\chi$  dargestellt ist.

In [7] trat für ein ähnliches System eine Lücke zwischen dem Punkt, an dem der Zustand instabil wurde, und dem Bruch der  $\mathcal{PT}$ -Symmetrie auf. Solch eine Stabilitätslücke kann jedoch hier nicht beobachtet werden.

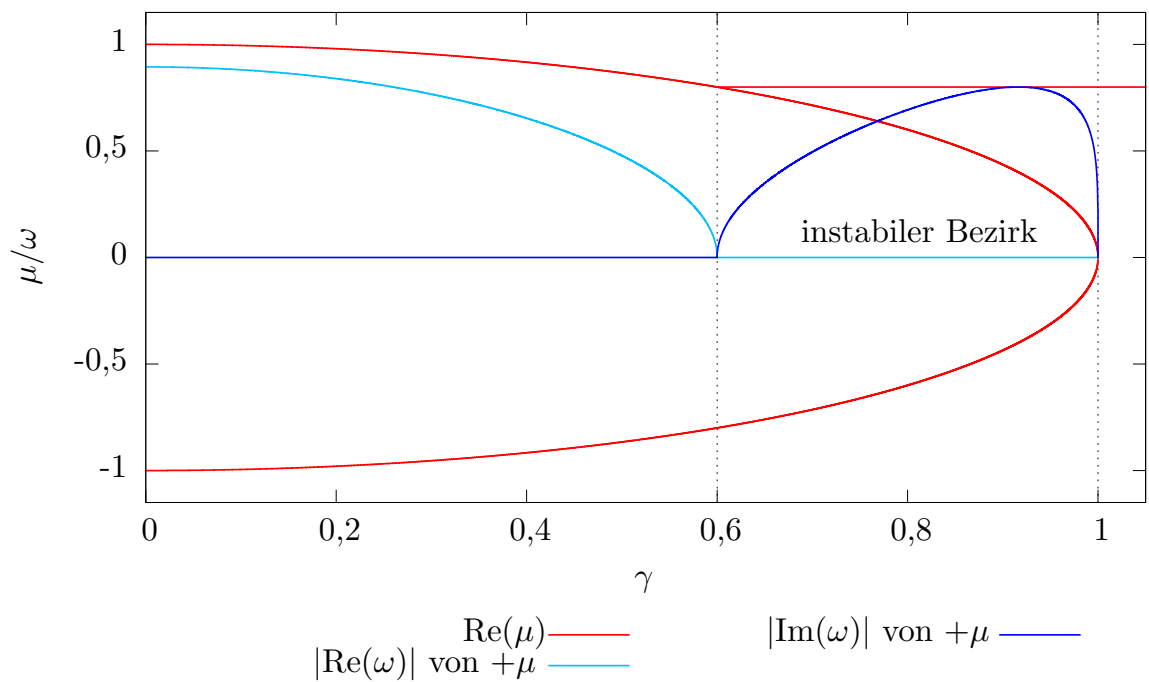


Abbildung 4.3: Der Real- und Imaginärteil des Eigenwertes  $\omega$  für den Eigenwert  $\mu_+$  über  $\gamma$  für  $\chi = 1,6$ . Der Bezirk in dem  $\omega$  imaginäre ist, und somit der Zustand instabil, ist eingezeichnet.

### 4.3 Stabilitätsuntersuchung der stationären Lösung

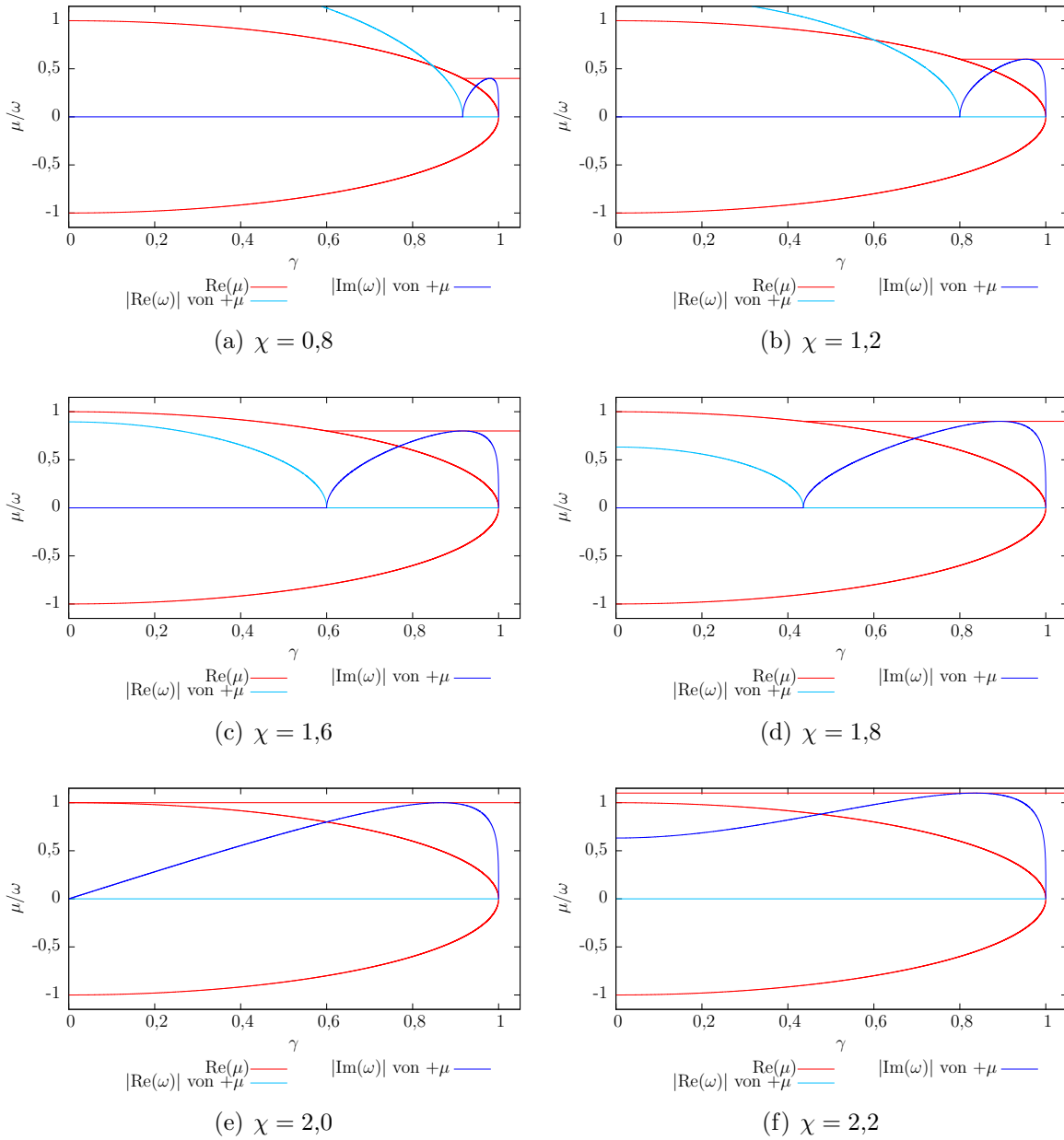


Abbildung 4.4: Die Real- und Imaginärteile des Eigenwertes  $\omega$  für den Eigenwert  $\mu_+$  über  $\gamma$  für verschiedene  $\chi$ . Es ist zu erkennen, dass die Stabilität von  $\chi$  abhängt.

### 4.3.3 Herleitung der Bogoliubov-de Gennes-Gleichungen für ein normunabhängiges System

In [7] wurde eine auftretende Stabilitätslücke durch eine normunabhängige Formulierung der Gleichungen zum Verschwinden gebracht. Deshalb soll hier untersucht werden, welche Auswirkung eine solche Formulierung hat, wenn keine Stabilitätslücke auftritt. Insbesondere ist von Interesse, wie sich die Stabilitätseigenwerte  $\omega$  verändern, wenn die normunabhängige Version der Gross-Pitaevskii-Gleichung herangezogen wird.

Durch die normunabhängige Formulierung ändert sich der nichtlineare Term zu

$$|\Phi_i|^2 \rightarrow \frac{|\Phi_i|^2}{|\Phi_1|^2 + |\Phi_2|^2} \quad (4.59)$$

und man erhält die modifizierte Gross-Pitaevskii-Gleichung,

$$i \frac{d}{dz} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \chi \frac{|\phi_1|^2}{|\phi_1|^2 + |\phi_2|^2} - i\gamma & 1 \\ 1 & \chi \frac{|\phi_2|^2}{|\phi_1|^2 + |\phi_2|^2} + i\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}. \quad (4.60)$$

Analog zu Abschnitt 4.3.1 wird (4.46) in (4.60) eingesetzt

$$\mu \begin{pmatrix} \Psi_1 + \lambda\Theta_1 \\ \Psi_2 + \lambda\Theta_2 \end{pmatrix} + i \frac{d}{dz} \begin{pmatrix} \lambda\Theta_1 \\ \lambda\Theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \chi \frac{|\Psi_1 + \lambda\Theta_1|^2}{|\Psi_1 + \lambda\Theta_1|^2 + |\Psi_2 + \lambda\Theta_2|^2} - i\gamma & 1 \\ 1 & \chi \frac{|\Psi_2 + \lambda\Theta_2|^2}{|\Psi_1 + \lambda\Theta_1|^2 + |\Psi_2 + \lambda\Theta_2|^2} + i\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_1 + \lambda\Theta_1 \\ \Psi_2 + \lambda\Theta_2 \end{pmatrix}. \quad (4.61)$$

Zunächst wird nur

$$\underbrace{|\Psi_{1/2} + \lambda\Theta_{1/2}|^2}_I \cdot \underbrace{\frac{1}{|\Psi_1 + \lambda\Theta_1|^2 + |\Psi_2 + \lambda\Theta_2|^2}}_{II} \quad (4.62)$$

betrachtet. Mit I aus Gleichung (4.62) wird genauso vorgegangen wie mit (4.49)

$$\begin{aligned} I &= |\Psi_{1/2} + \lambda\Theta_{1/2}|^2 \\ &= |\Psi_{1/2}|^2 + \lambda\Psi_{1/2}^* \Theta_{1/2} + \lambda\Psi_{1/2} \Theta_{1/2}^* + \lambda^2 |\Theta_{1/2}|^2 \\ &\approx |\Psi_{1/2}|^2 + \lambda\Psi_{1/2}^* \Theta_{1/2} + \lambda\Psi_{1/2} \Theta_{1/2}^*. \end{aligned} \quad (4.63)$$

Für II aus Gleichung (4.62) ergibt sich

$$\begin{aligned}
 \text{II} &= \frac{1}{|\Psi_1 + \lambda\Theta_1|^2 + |\Psi_2 + \lambda\Theta_2|^2} \\
 &= \frac{1}{|\Psi_1|^2 + \lambda\Theta_1^*\Psi_1 + \lambda\Theta_1\Psi_1^* + \lambda^2|\Theta_1|^2 + |\Psi_2|^2 + \lambda\Theta_2^*\Psi_2 + \lambda\Theta_2\Psi_2^* + \lambda^2|\Theta_2|^2} \\
 &= \frac{1}{(|\Psi_1|^2 + |\Psi_2|^2)^{-1}} \\
 &= \frac{1}{1 + \frac{1}{|\Psi_1|^2 + |\Psi_2|^2} \cdot [\lambda(\Theta_1^*\Psi_1 + \Theta_1\Psi_1^* + \Theta_2^*\Psi_2 + \Theta_2\Psi_2^*) + \lambda^2(|\Theta_1|^2 + |\Theta_2|^2)]} \\
 &\stackrel{\text{mit } |\Psi_1|^2 + |\Psi_2|^2 = 1}{=} \frac{1}{1 + \lambda(\Theta_1^*\Psi_1 + \Theta_1\Psi_1^* + \Theta_2^*\Psi_2 + \Theta_2\Psi_2^*) + \lambda^2(|\Theta_1|^2 + |\Theta_2|^2)}.
 \end{aligned} \tag{4.64}$$

Zur Näherung wird

$$\frac{1}{1 + ax + bx^2} \approx 1 - ax \tag{4.65}$$

verwendet. Es folgt für (4.64) mit (4.65)

$$\text{II} \approx 1 - \lambda(\Theta_1^*\Psi_1 + \Theta_1\Psi_1^* + \Theta_2^*\Psi_2 + \Theta_2\Psi_2^*). \tag{4.66}$$

Die Terme I und II in (4.62) eingesetzt, ergibt

$$\mu \begin{pmatrix} \Psi_1 + \lambda\Theta_1 \\ \Psi_2 + \lambda\Theta_2 \end{pmatrix} + i \frac{d}{dz} \begin{pmatrix} \lambda\Theta_1 \\ \lambda\Theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Lambda_1 - i\gamma & 1 \\ 1 & \Lambda_2 + i\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_1 + \lambda\Theta_1 \\ \Psi_2 + \lambda\Theta_2 \end{pmatrix} \tag{4.67}$$

mit

$$\Lambda_{1/2} = \chi(|\Psi_{1/2}|^2 + \lambda\Psi_{1/2}^*\Theta_{1/2} + \lambda\Psi_{1/2}\Theta_{1/2}^*) \cdot (1 - \lambda(\Theta_1^*\Psi_1 + \Theta_1\Psi_1^* + \Theta_2^*\Psi_2 + \Theta_2\Psi_2^*)). \tag{4.68}$$

Analog zu Abschnitt 4.3.1 werden die Terme nullter Ordnung der Gleichung (4.67) ignoriert, genauso wie Terme zweiter Ordnung. Es resultiert

$$\mu \begin{pmatrix} \Theta_1 \\ \Theta_2 \end{pmatrix} + i \frac{d}{dz} \begin{pmatrix} \Theta_1 \\ \Theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Gamma_1 \\ \Gamma_2 \end{pmatrix} \tag{4.69}$$

mit

$$\Gamma_{1/2} = 2\chi|\Psi_{1/2}|^2\Theta_{1/2} - \chi|\Psi_{1/2}|^2(\Theta_1^*\Psi_1 + \Theta_1\Psi_1^* + \Theta_2^*\Psi_2 + \Theta_2\Psi_2^*)\Psi_{1/2} \tag{4.70}$$

$$+ \chi\Psi_{1/2}^2\Theta_{1/2}^* \mp i\gamma\Theta_{1/2} + \Theta_{2/1}. \tag{4.71}$$

Einsetzen der Störung (4.47) in (4.69) liefert

$$\begin{aligned}
 & \begin{pmatrix} (\mu + \omega)u_1 e^{-i\omega z} + (\mu - \omega^*)v_1^* e^{i\omega^* z} \\ (\mu + \omega)u_2 e^{-i\omega z} + (\mu - \omega^*)v_2^* e^{i\omega^* z} \end{pmatrix} = \\
 & \begin{pmatrix} (2\chi|\Psi_1|^2 - i\gamma - \chi|\Psi_1|^4)(u_1 e^{-i\omega z} + v_1^* e^{i\omega^* z}) + (\chi\Psi_1^2 - \chi|\Psi_1|^2\Psi_1^2)(u_1^* e^{i\omega^* z} + v_1 e^{-i\omega z}) \dots \\ (2\chi|\Psi_2|^2 + i\gamma - \chi|\Psi_2|^4)(u_2 e^{-i\omega z} + v_2^* e^{i\omega^* z}) + (\chi\Psi_2^2 - \chi|\Psi_2|^2\Psi_2^2)(u_2^* e^{i\omega^* z} + v_2 e^{-i\omega z}) \dots \\ \dots (1 - \chi|\Psi_1|^2\Psi_1\Psi_2^*)(u_2 e^{-i\omega z} + v_2^* e^{i\omega^* z}) - (\chi|\Psi_1|^2\Psi_1\Psi_2)(u_2^* e^{i\omega^* z} + v_2 e^{-i\omega z}) \\ \dots (1 - \chi|\Psi_2|^2\Psi_2\Psi_1^*)(u_1 e^{-i\omega z} + v_1^* e^{i\omega^* z}) - (\chi|\Psi_2|^2\Psi_2\Psi_1)(u_1^* e^{i\omega^* z} + v_1 e^{-i\omega z}) \end{pmatrix}.
 \end{aligned} \tag{4.72}$$

Man erhält durch sortieren von (4.72) nach  $e^{-i\omega z}$

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} (\mu + \omega)u_1 \\ (\mu + \omega)u_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} (2\chi|\Psi_1|^2 - i\gamma - \chi|\Psi_1|^4)u_1 + (1 - \chi|\Psi_1|^2\Psi_1\Psi_2^*)u_2 + \dots \\ (1 - \chi|\Psi_2|^2\Psi_2\Psi_1^*)u_1 + (2\chi|\Psi_2|^2 + i\gamma - \chi|\Psi_2|^4)u_2 - \dots \\ \dots (\chi\Psi_1^2 - \chi|\Psi_1|^2\Psi_1^2)v_1 - (\chi|\Psi_1|^2\Psi_1\Psi_2)v_2 \\ \dots (\chi|\Psi_2|^2\Psi_2\Psi_1)v_1 + (\chi\Psi_2^2 - \chi|\Psi_2|^2\Psi_2^2)v_2 \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{4.73}$$

und nach  $e^{i\omega^* z}$

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} (\mu - \omega^*)v_1^* \\ (\mu - \omega^*)v_2^* \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} (\chi\Psi_1^2 - \chi|\Psi_1|^2\Psi_1^2)u_1^* - (\chi|\Psi_1|^2\Psi_1\Psi_2)u_2^* + \dots \\ -(\chi|\Psi_2|^2\Psi_2\Psi_1)u_1^* + (\chi\Psi_2^2 - \chi|\Psi_2|^2\Psi_2^2)u_2^* + \dots \\ \dots (2\chi|\Psi_1|^2 - i\gamma - \chi|\Psi_1|^4)v_1^* + (1 - \chi|\Psi_1|^2\Psi_1\Psi_2^*)v_2^* \\ \dots (1 - \chi|\Psi_2|^2\Psi_2\Psi_1^*)v_1^* + (2\chi|\Psi_2|^2 + i\gamma - \chi|\Psi_2|^4)v_2^* \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{4.74}$$

bzw. nach komplexem Konjugieren von (4.74)

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} (\mu^* - \omega)v_1 \\ (\mu^* - \omega)v_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} (\chi(\Psi_1^2)^* - \chi|\Psi_1|^2(\Psi_1^2)^*)u_1 - (\chi|\Psi_1|^2\Psi_1^*\Psi_2^*)u_2 + \dots \\ -(\chi|\Psi_2|^2\Psi_2^*\Psi_1^*)u_1 + (\chi(\Psi_2^2)^* - \chi|\Psi_2|^2(\Psi_2^2)^*)u_2 + \dots \\ \dots (2\chi|\Psi_1|^2 + i\gamma - \chi|\Psi_1|^4)v_1 + (1 - \chi|\Psi_1|^2\Psi_1^*\Psi_2)v_2 \\ \dots (1 - \chi|\Psi_2|^2\Psi_2^*\Psi_1)v_1 + (2\chi|\Psi_2|^2 - i\gamma - \chi|\Psi_2|^4)v_2 \end{pmatrix}.
 \end{aligned} \tag{4.75}$$

Die Ergebnisse (4.73) und (4.75) werden in eine Eigenwertgleichung der Form

$$\omega \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \underline{\underline{B}} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \tag{4.76}$$

mit der  $4 \times 4$  Matrix

$$\underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} 2\chi|\Psi_1|^2 - i\gamma - \chi|\Psi_1|^4 - \mu & 1 - \chi|\Psi_1|^2\Psi_1\Psi_2^* & \dots & \dots \\ 1 - \chi|\Psi_2|^2\Psi_2\Psi_1^* & 2\chi|\Psi_2|^2 + i\gamma - \chi|\Psi_2|^4 - \mu & \dots & \dots \\ -\chi(\Psi_1^2)^* + \chi|\Psi_1|^2(\Psi_1^2)^* & \chi|\Psi_1|^2\Psi_1^*\Psi_2^* & \dots & \dots \\ \chi|\Psi_2|^2\Psi_2^*\Psi_1^* & -\chi(\Psi_2^2)^* + \chi|\Psi_2|^2(\Psi_2^2)^* & \dots & \dots \\ \dots & \chi\Psi_1^2 - \chi|\Psi_1|^2\Psi_1^2 & -\chi|\Psi_1|^2\Psi_1\Psi_2 & \dots \\ \dots & -\chi|\Psi_2|^2\Psi_2\Psi_1 & \chi\Psi_2^2 - \chi|\Psi_2|^2\Psi_2^2 & \dots \\ \dots & -2\chi|\Psi_1|^2 - i\gamma + \chi|\Psi_1|^4 + \mu^* & -1 + \chi|\Psi_1|^2\Psi_1^*\Psi_2 & \dots \\ \dots & -1 + \chi|\Psi_2|^2\Psi_2^*\Psi_1 & -2\chi|\Psi_2|^2 + i\gamma + \chi|\Psi_2|^4 + \mu^* & \dots \end{pmatrix} \quad (4.77)$$

gebracht.

#### 4.3.4 Lösungen der normunabhängigen Bogoliubov-de Gennes-Gleichungen

Die neue Eigenwertgleichung (4.76) liefert die exakt gleichen Ergebnisse wie die normabhängige Formulierung, siehe Abbildung 4.5, in der die Eigenwerte  $\omega$  für  $\chi = 1,6$  beider Formulierungen dargestellt sind. Dies ist überraschend, da die beiden Matrizen (4.57) und (4.77) verschieden sind. Ein genauerer Vergleich der beiden Matrizen (4.57) und (4.77) zeigt, dass sich die Matrix der normunabhängigen Formulierung (4.77) durch die Addition einer Matrix

$$\underline{\underline{S}} = \begin{pmatrix} -\chi|\Psi_1|^4 & -\chi|\Psi_1|^2\Psi_1\Psi_2^* & -\chi|\Psi_1|^2\Psi_1^2 & -\chi|\Psi_1|^2\Psi_1\Psi_2 \\ -\chi|\Psi_2|^2\Psi_2\Psi_1^* & -\chi|\Psi_2|^4 & -\chi|\Psi_2|^2\Psi_2\Psi_1 & -\chi|\Psi_2|^2\Psi_2^2 \\ \chi|\Psi_1|^2(\Psi_1^2)^* & \chi|\Psi_1|^2\Psi_1^*\Psi_2^* & \chi|\Psi_1|^4 & \chi|\Psi_1|^2\Psi_1^*\Psi_2 \\ \chi|\Psi_2|^2\Psi_2^*\Psi_1^* & \chi|\Psi_2|^2(\Psi_2^2)^* & \chi|\Psi_2|^2\Psi_2^*\Psi_1 & \chi|\Psi_2|^4 \end{pmatrix} \quad (4.78)$$

auf (4.57) ergibt. Die Addition der Matrix  $\underline{\underline{S}}$  ändert somit nichts an den Stabilitätseigenwerten. Der Grund für dieses Verhalten könnte eine übersehene Symmetrie des Systems sein. Um dem auf den Grund zu gehen, müsste  $\underline{\underline{S}}$  genauer untersucht werden.

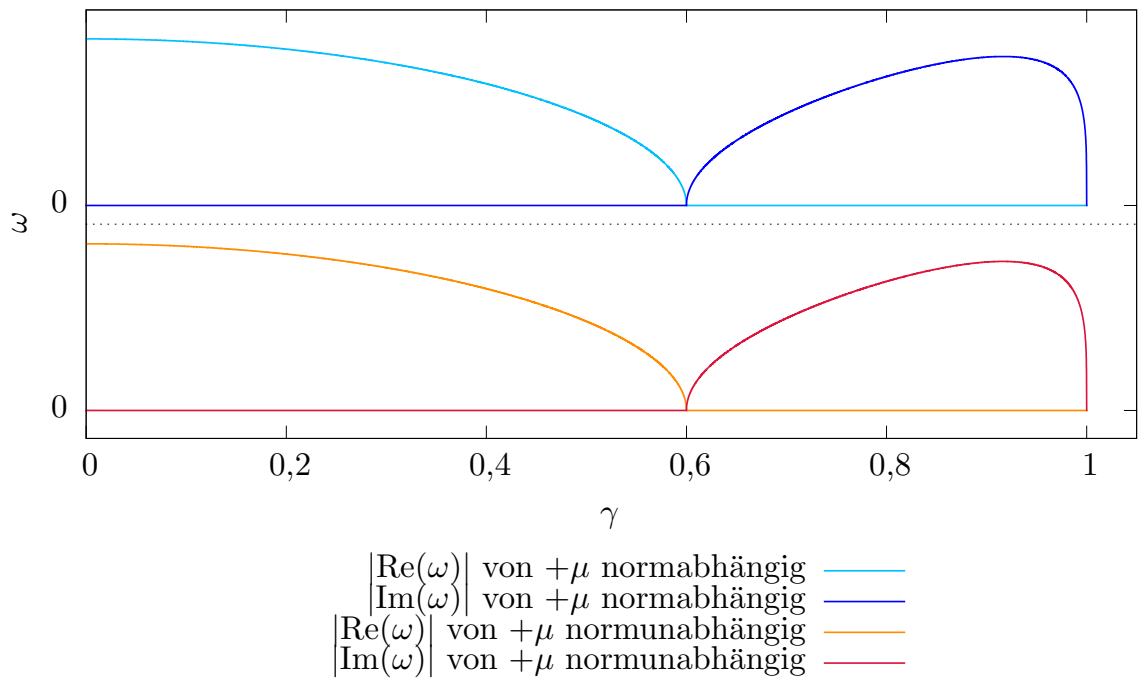


Abbildung 4.5: Der Real- und Imaginärteil des Stabilitätseigenwertes  $\omega$  für den Energieeigenwert  $\mu_+$  über  $\gamma$  für  $\chi_d = 1,6$ . Oben sind die Werte für die normabhängige Formulierung der Bogoliubov de Gennes-Gleichung und unten die für die normunabhängige aufgetragen. Es zeigt sich, dass beide die exakt gleichen Ergebnisse liefern.



# 5 Vergleich der Dynamik mit der stationären Lösung

Grundziel dieser Arbeit ist es zu untersuchen, ob die stationäre Lösung des Bose-Einstein-Kondensates in dem  $\mathcal{PT}$ -symmetrischen Doppelmuldenpotential Vorhersagen über das Verhalten der Dynamik der nichtlinearen gekoppelten Wellenleiter liefern kann. Deshalb sollen in diesem Kapitel die kritischen Punkte der Dynamik mit denen der stationären Lösung verglichen werden, um Gemeinsamkeiten zu finden. Außerdem wird die Dynamik mit den stationären Zuständen als Anfangswerte untersucht und eine alternative Vorgehensweise für eine theoretische Vorhersage der kritischen Werte vorgestellt.

## 5.1 Vergleich der kritischen Punkte $\chi_d$ der Dynamik mit denen der stationären Lösung

In den Abschnitten 4.2 und 4.3 wurde die stationäre Lösung eines Bose-Einstein-Kondensates in einer Doppelmulde untersucht. Es ergab sich, dass ab einer gewissen Stärke der Nichtlinearität  $\chi$ , dem kritischen Punkt  $\chi_d$ , die  $\mathcal{PT}$ -Symmetrie gebrochen wird und sich weitere instabile Zustände ergeben. Außerdem wird ab diesem Punkt der Zustand zum positiv reellen  $\mu$  instabil. Der Punkt, ab dem dies stattfindet, lautet

$$\chi_d = 2\sqrt{1 - \gamma^2}. \quad (5.1)$$

Dies weist auf eine Veränderung des Verhaltens des Systems ab diesem Punkt hin. In Abschnitt 3.2 wurde die Dynamik eines analogen Systems aus zwei nichtlinearen gekoppelten Wellenleitern untersucht. Dabei zeigte sich ab einer gewissen Stärke der Nichtlinearität ein neues, unidirektionales Verhalten. Der Punkt, ab dem die Wellenleiter dieses unidirektionale Verhalten zeigten, wurde ebenfalls mit  $\chi_d$  bezeichnet. Nun soll überprüft werden, ob die kritischen Punkte der stationären Lösung mit denen der Dynamik übereinstimmen.

In Abbildung 5.1 befinden sich nun die kritischen Werte  $\chi_d$  der Dynamik (Kreise) für reelle Anfangszustände mit verschiedenen Intensitätsungleichgewichten  $\kappa = |\Psi_1|^2 - |\Psi_2|^2$

und die Funktion der kritischen Werte der stationären Lösung nach Gleichung (5.1) (durchgezogene Linie). Für kritische Punkte der Dynamik, die unterhalb der durchgezogenen Linie der stationären Lösung liegen, tritt die Unidirektionalität bereits für schwächere Nichtlinearitäten auf, als die  $\mathcal{PT}$ -Symmetrie der stationären Lösung gebrochen wird. Liegen sie darüber, tritt sie erst für stärker Nichtlinearitäten auf. Es ist zu sehen, dass die kritischen Werte der Dynamik für  $\gamma \ll 1$  alle über der Linie der stationären Lösung liegen, außer  $\kappa = 0$ . Die Ergebnisse der Dynamik für  $\kappa = 0$  stimmen in diesem Bereich gut mit denen der stationären Lösung überein und konvergieren gegen den selben Grenzwert. Für  $\gamma \rightarrow 1$  sinken die kritischen Werte der Dynamik ab, bis sie für alle  $\kappa$  unter der Linie der stationären Lösung liegen. Für  $\gamma$  nahe 1 ähnelt das Verhalten der kritischen Punkte der stationären Lösung gar nicht dem der Dynamik.

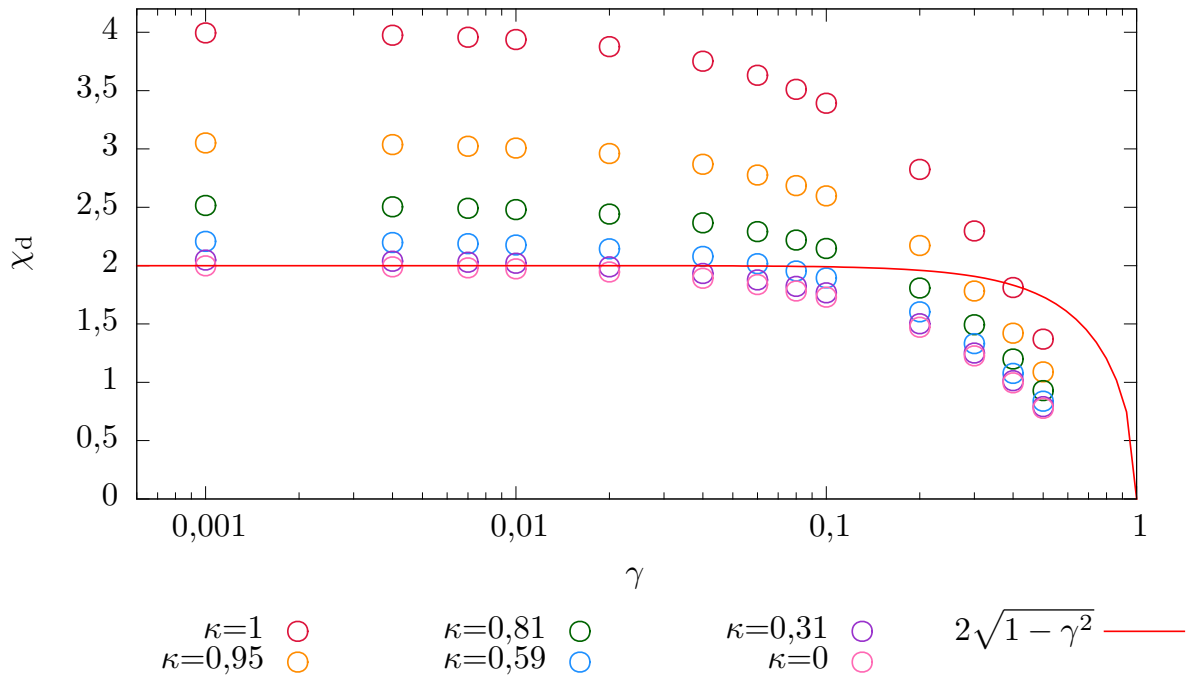


Abbildung 5.1: Der Vergleich zwischen den kritischen Werten der Dynamik (Kreise) und denen der stationären Lösung (durchgezogene Linie). Die kritischen Werte der stationären Lösung konvergieren für  $\gamma \ll 1$  gegen den selben Grenzwert wie die der Dynamik für  $\kappa = 0$ .

### 5.1.1 Erklärung von Abweichungen durch Betrachtung der Dynamik der Norm

Die Abweichung der kritischen Werte der Dynamik für  $\kappa = 0$  von denen der stationären Lösung lässt sich durch die Betrachtung der Norm verstehen. Dafür wird die Norm  $n = |\Psi_1|^2 + |\Psi_2|^2$  der Dynamik für  $\kappa = 0$  im Verlauf der Propagationsrichtung untersucht. Dabei wird die Stärke der Nichtlinearität  $\chi$  so gewählt, dass sie knapp unter dem kritischen Wert  $\chi_d$  liegt, sodass ihre Differenz  $\Delta\chi = 0,001$  lautet. Dadurch kommt es nicht zur Unidirektionalität und es ergibt sich ein Verlauf der Wellen wie in Abbildung 3.4(a). Die Norm zeigt dabei Fluktuationen im Verlauf der Propagationsrichtung. Dabei weicht ihr Maximum von der Norm der Anfangszustände  $n = 1$  ab. Die Größe der maximalen Abweichung wird als Normschwankung  $\Delta n$  bezeichnet. Bei der Untersuchung von verschiedenen  $\gamma$  zeigt sich eine Abhängigkeit der Normschwankung von  $\gamma$ , diese ist in Abbildung 5.2 dargestellt. Für  $\gamma \ll 1$  ist  $\Delta n \approx 0$  und für  $\gamma \rightarrow 1$  steigt  $\Delta n$  stark an. Dieses Verhalten spiegelt das aus Abbildung 5.1 wieder. In dem Bereich, in dem die kritischen Werte der stationäre Lösung mit denen der Dynamik für  $\kappa = 0$  übereinstimmen, ist die Normschwankung  $\Delta n \approx 0$ . Aus der Gleichung (4.34) ist ersichtlich, dass der kritische Werte  $\chi_d$  der stationären Lösung, an dem die  $\mathcal{PT}$ -Symmetrie gebrochen wird, von der Norm  $n$  abhängt. Da die Norm der stationären Lösung  $n = 1$  gewählt wurde, erklärt das die gute Übereinstimmung in diesem Bereich. Für  $\gamma \rightarrow 1$  wird  $\Delta n$  größer und die Norm weicht damit stärker von der stationären Lösung ab, weshalb die kritischen Werte der stationären Lösung erwartungsgemäß nicht mehr denen der Dynamik für  $\kappa = 0$  ähneln.

### 5.1.2 Dynamik mit den Grundzuständen als Anfangswerten

Die Dynamik wurde zuvor immer für rein reelle Anfangszustände betrachtet. Nun soll die Dynamik mit den Grundzuständen der stationären Lösung als Anfangswerte untersucht werden. Dafür werden die Grundzustände (4.13) genau an dem Punkt, an dem die  $\mathcal{PT}$ -Symmetrie gebrochen wird, siehe Abbildung 5.3, herangezogen. Die neuen Anfangswerte sind jetzt nicht mehr rein reell sondern imaginär. Die Betrachtung der Dynamik mit diesen neuen Anfangswerten liefert andere kritische Werte  $\chi_d$ , ab denen die Wellenleiter unidirektionales Verhalten aufweisen, siehe Abbildung 5.4. Die  $\chi_d$  der Dynamik entsprechen für die Grundzustände exakt denen der stationären Lösung. Wird die Norm der Grundzustände wie in Abschnitt 5.1.1 untersucht, ergibt sich erwartungsgemäß für alle  $\gamma$  eine Normschwankung von  $\Delta n = 0$ .

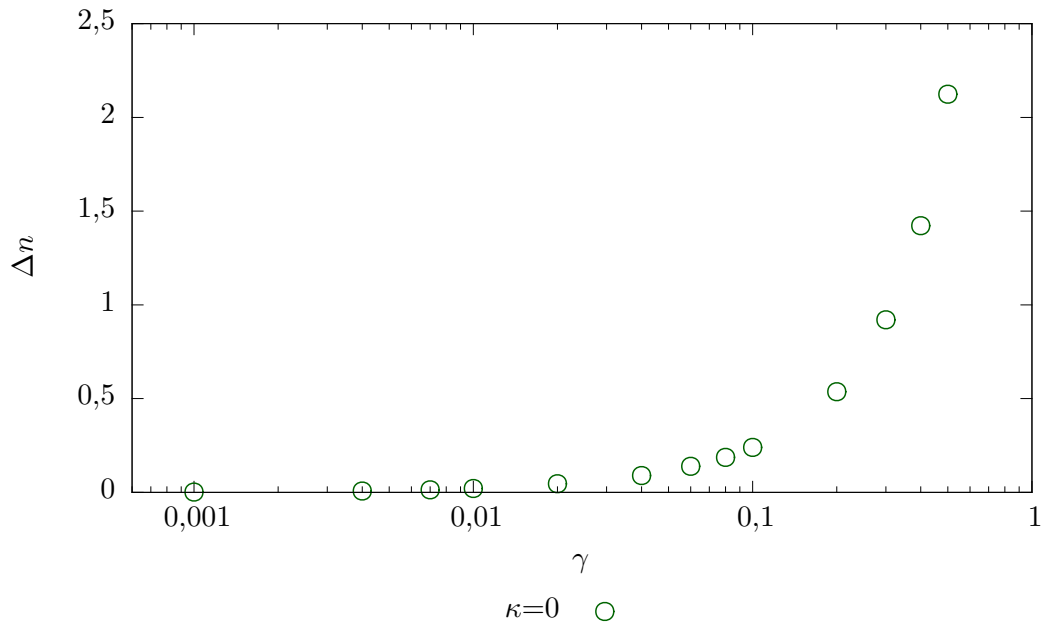


Abbildung 5.2: Die Abweichung  $\Delta n$  der Norm  $n$  von  $n = 1$  für  $\kappa = 0$  für verschiedene Werte von  $\gamma$ . Dabei wird  $\chi$  knapp unter  $\chi_d$  gewählt.

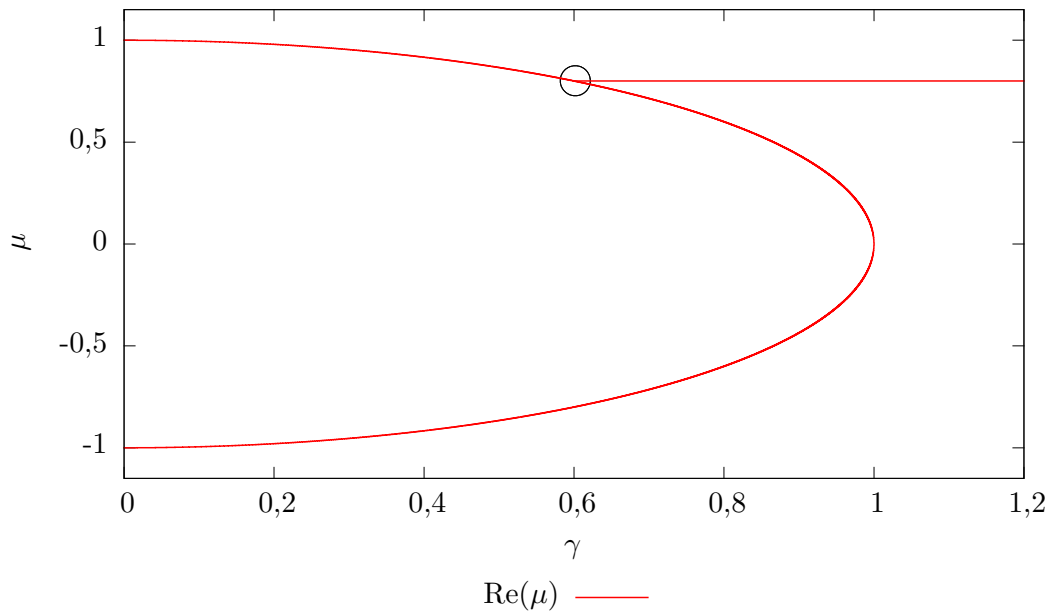


Abbildung 5.3: Die reellen Eigenwerte der stationären Lösung. Der Kreis markiert den Punkt, ab dem die  $\mathcal{PT}$ -Symmetrie gebrochen ist. Die Werte der Grundzustände an diesem Punkt werden als Anfangswerte benutzt.

5.1 Vergleich der kritischen Punkte  $\chi_d$  der Dynamik mit denen der stationären Lösung

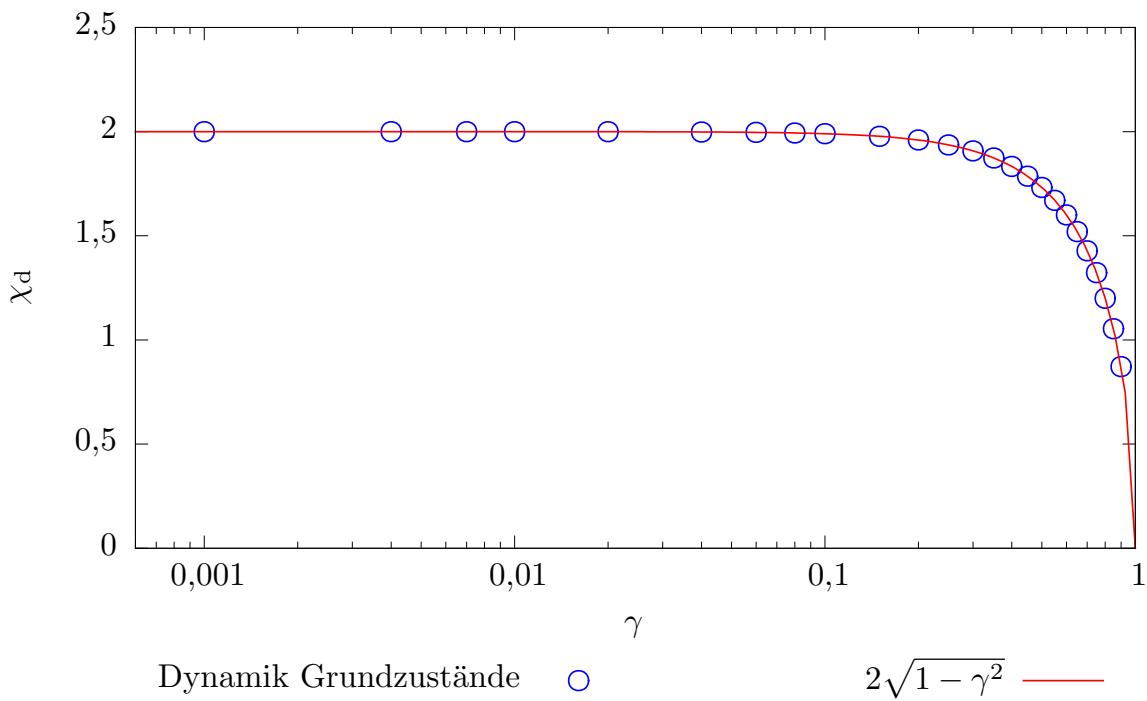


Abbildung 5.4: Vergleich der kritischen Werte der Dynamik der Grundzustände (Kreise) mit denen der stationären Lösung (durchgezogene Linie). Es zeigt sich, dass sie identisch sind.

## 5.2 Diskussion der Ergebnisse

Mit den bisher erhaltenen Ergebnissen kann nun die zentrale Frage dieser Bachelorarbeit nach der Bedeutung stationärer Zustände für die Vorhersage der Unidirektionalität in Wellenleitern angegangen werden. Dabei soll auch auf die Relevanz der Vorhersage von Ramezani und Mitarbeitern [4] eingegangen werden.

### 5.2.1 Stationäre Zustände und Unidirektionalität

Es stellt sich heraus, dass die Anfangswerte der Dynamik bei der Bestimmung der kritischen Werte, ab denen die Wellenleiter unidirektionales Verhalten aufweisen, von großer Bedeutung sind. Für Anfangswerte mit einem großem Intensitätsungleichgewicht  $\kappa$  wird für  $\gamma \ll 1$  eine weitaus stärkere Nichtlinearität für die Unidirektionalität benötigt als für  $\kappa = 0$ . Für  $\gamma \rightarrow 1$  spielen die Anfangswerte für die benötigte Stärke der Nichtlinearität eine geringere Rolle. In welchen Wellenleiter der Großteil der Welle für  $\kappa \neq 0$  eindringt, ist jedoch für die Unidirektionalität nicht von Bedeutung.

Die kritischen Punkte, ab denen die  $\mathcal{PT}$ -Symmetrie der stationären Lösung gebrochen ist, sind auch jene, an denen nach den Ergebnissen der linearen Stabilitätsanalyse ein zuvor stabiler Zustand instabil wird. Ab diesen Punkten wird somit erwartet, dass das System ein neues Verhalten zeigt, die Unidirektionalität der Wellenleiter. Der Vergleich dieser Punkte liefert nur eine exakte Übereinstimmung mit denen der Dynamik, wenn für die Dynamik die Grundzustände als Anfangswerte gewählt werden. Für  $\gamma \ll 1$  haben sie auch eine gute Übereinstimmung mit der Dynamik für alle Anfangswerte mit  $\kappa = 0$  und  $n = 1$ . Dies ergibt sich daher, dass die Anfangswerte für  $\kappa = 0$  und  $n = 1$  den Grundzuständen bis auf einer Phase gleichen.

Die kritischen Werte der stationären Lösung sind somit aufgrund der großen Bedeutung der Anfangswerte der Dynamik nur bedingt für eine Vorhersage der Dynamik in dem Bezirk  $\gamma \ll 1$  brauchbar. Für  $\gamma \rightarrow 1$  sind sie für rein reelle Anfangswerte aufgrund der großen Normschwankung in diesem Bezirk unbrauchbar. Komplexe Anfangswerte der Dynamik, die sich von den Grundzuständen unterscheiden, könnten untersucht werden, um zu überprüfen, ob in diesem Fall die kritischen Werte der stationären Lösungen besser mit denen der Dynamik übereinstimmen.

### 5.2.2 Vergleich mit einer alternativen theoretischen Vorhersage über die Dynamik für $\kappa = \pm 1$

In [4] wurde ebenfalls die Dynamik von nichtlinearen gekoppelten Wellenleitern betrachtet. Die Untersuchung wurde jedoch auf reell Anfangswerte mit einem Intensitätungleichgewicht von  $\kappa = \pm 1$  und einer Norm von  $n = 1$  beschränkt. Die Ergebnisse aus [4] für die Dynamik solcher Anfangswerte entsprechen denen dieser Arbeit. Um jedoch eine theoretische Vorhersage über die kritischen Punkte der Dynamik zu machen, wurde ein anderes Vorgehen benutzt. Dabei wurden die Gleichungen (3.7) und (3.8), die die Dynamik der nichtlinearen gekoppelten Wellenleiter beschreiben, durch Stokes-Parameter formuliert. Dabei entspricht  $S_0 = |\Psi_1|^2 + |\Psi_2|^2$  der Norm. Außerdem wurden neue Erhaltungsgrößen gefunden und auf die Formulierung angewandt. Die kritischen Punkte sind solche, ab denen die Welle nicht mehr zwischen den beiden Wellenleitern hin und her oszilliert, siehe Abbildung 3.4(a), also Unidirektionalität herrscht. Die Bedingung kann in dieser Betrachtungsweise so formuliert werden, dass der kritische Punkt vorliegt, wenn  $S_0$  kein Maximum mehr aufweist. Durch diese Bedingung und die neue Formulierung konnte der Ausdruck

$$\chi_d = 4 - 2\pi\gamma \quad (5.2)$$

für die kritischen Punkte für solche Anfangswerte gewonnen werden. In Abbildung 5.5 ist der Vergleich dargestellt, wobei die durchgezogene Linie der theoretischen Vorhersage der kritischen Punkte (5.2) entspricht und die Kreise denen der Dynamik. Im Vergleich zu Abschnitt 5.1 zeigt sich hier auch für  $\gamma \rightarrow 1$  eine recht gute Übereinstimmung der theoretischen Vorhersage mit der Dynamik. Es sind jedoch trotzdem Abweichungen in diesem Bezirk erkennbar, jedoch sinken die kritischen Punkte der Dynamik nie unter die durchgezogene Linie. Für diese Art von Anfangswerten der Dynamik ist solch ein Vorgehen besser geeignet.

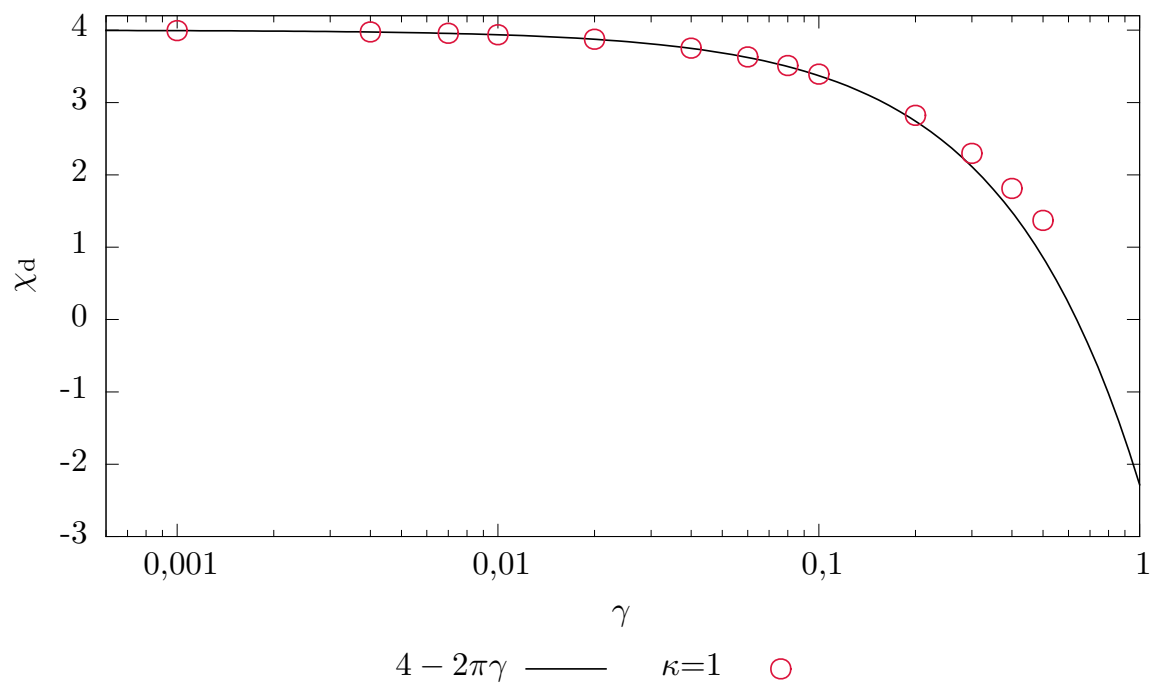


Abbildung 5.5: Vergleich der theoretischen kritischen Punkte (durchgezogene Linie) nach [4] mit denen der Dynamik für  $\kappa = 1$  (Kreise).



## 6 Zusammenfassung

Ziel dieser Arbeit war es, die stationäre Lösung eines Bose-Einstein-Kondensates in einem  $\mathcal{PT}$ -symmetrischen Doppelmuldenpotential zu bestimmen und diese Ergebnisse mit dem Auftreten der Unidirektionalität in nichtlinearen gekoppelten Wellenleitern zu vergleichen. Dafür wurde zunächst die Dynamik von nichtlinearen gekoppelten Wellenleitern untersucht, wobei einer der Wellenleiter einen Zuwachs der Stärke  $\gamma$  erfährt und der andere einen Verlust des selben Koeffizienten. Solch ein System wurde als  $\mathcal{PT}$ -symmetrisch identifiziert. Die Stärke der Nichtlinearität wurde mit  $\chi$  bezeichnet. Die Unidirektionalität konnte beobachtet werden und der kritische Wert der Stärke der Nichtlinearität  $\chi_d$ , ab dem sie auftritt, wurde für verschiedene Werte  $\gamma$  bestimmt. Durch Variation der Anfangsbedingungen wurde eine Abhängigkeit von  $\chi_d$  von ihnen beobachtet. Dafür wurden rein reelle Anfangsbedingungen mit einem verschieden starken Intensitätsungleichgewicht  $\kappa = |\Psi_1|^2 - |\Psi_2|^2$  untersucht. Es zeigte sich, dass die benötigte Stärke der Nichtlinearität, um ein unidirektionales Verhalten für ein festes  $\gamma$  zu erhalten, für  $\kappa = 0$  am geringsten war. Für  $\gamma \rightarrow 1$  sinkt  $\chi_d$  für alle  $\kappa$  ab.

Nach der Untersuchung der Dynamik des optischen Systems der nichtlinearen gekoppelten Wellenleiter wurde das System eines Bose-Einstein-Kondensates in einem  $\mathcal{PT}$ -symmetrischen Doppelmuldenpotential vorgestellt. Die Koeffizienten der Quelle und Senke, die sich in jeweils einer Mulde der Falle des Kondensates befanden, wurden mit  $\pm\gamma$  bezeichnet. Das selbe galt für den Zuwachs/Verlust der Wellenleiter. Die Dynamik des Bose-Einstein-Kondensates wurde durch die Gross-Pitaevskii-Gleichung beschrieben, die die Wechselwirkungen der Bosonen in einen nichtlinearen Term nähert. Die Stärke der Nichtlinearität wurde in Analogie zum optischen System mit  $\chi$  bezeichnet. Für das Kondensat wurde die stationäre Lösung bestimmt. Es ergaben sich drei Bezirke unterschiedlichen Verhaltens, wobei der erste rein reelle Energieeigenwerte aufweist, der zweite sowohl rein reelle wie auch imaginäre und der dritte nur imaginäre. Der Punkt, ab dem imaginäre Eigenwerte auftreten, wurde als Bruch der  $\mathcal{PT}$ -Symmetrie identifiziert und mit  $\chi_d = 2\sqrt{1 - \gamma^2}$  bestimmt. Es wurde vermutet, dass ein Zusammenhang zwischen diesem Punkt, ab dem die  $\mathcal{PT}$ -Symmetrie gebrochen ist, und dem unidirektional Verhalten der Wellenleiter besteht. Die stationäre Lösung wurde auf ihre Stabilität durch das Lösen der Bogoliubov-de Gennes-Gleichungen untersucht und es ergab sich, dass der Zustand einer der reellen Eigenwerte genau an dem Punkt instabil wird, an dem die  $\mathcal{PT}$ -Symmetrie gebrochen wird. Es ergab sich somit keine Stabilitätslücke, wie sie in [7] beobachtet

wurde. Die Bogoliubov-de Gennes-Gleichungen wurden normunabhängig formuliert, um die Auswirkung der Norm auf die Stabilität zu beobachten. Überraschenderweise lieferte diese neue Formulierung dieselben Aussagen über die Stabilität der reellen Eigenwerte. Der Grund dieses Verhaltens könnte eine unbemerkte Symmetrie darstellen.

Daraufhin wurde nach Gemeinsamkeiten der Ergebnisse der Dynamik mit denen der stationären Lösung gesucht. Dafür wurde der Punkt, ab dem die  $\mathcal{PT}$ -Symmetrie der stationären Lösung gebrochen ist, mit dem Punkt, ab dem die Wellenleiter unidirektionales Verhalten aufweisen, verglichen, da ein anderes Verhalten nach dem Bruch erwartet wurde. Es zeigte sich, dass für  $\gamma \ll 1$  der  $\mathcal{PT}$ -Symmetriebruch an dem Punkt stattfindet, ab dem die Wellenleiter für ein Intensitätsungleichgewicht von  $\kappa = 0$  unidirektional sind, für  $\kappa \neq 0$  tritt die Unidirektionalität erst für stärkere Nichtlinearitäten auf. Für  $\gamma \rightarrow 1$  tritt das unidirektionale Verhalten bereits für schwächere Nichtlinearitäten auf, als die  $\mathcal{PT}$ -Symmetrie gebrochen wird. Diese Abweichung der kritischen Punkte der stationären Lösung von der Dynamik wurde durch eine Betrachtung der Norm der Dynamik im Verlauf der Propagationsrichtung veranschaulicht. Dafür wurden  $\chi < \chi_d$  gewählt und es ergab sich erwartungsgemäß eine Fluktuation der Norm im Verlauf der Propagationsrichtung. Die maximale Abweichung dieser Normfluktuationen von der Norm der Anfangswerte  $n = 1$  wurde für verschiedene  $\gamma$  betrachtet. Es zeigte sich, dass diese Abweichung für  $\gamma \rightarrow 1$  größer wird. Da  $\chi_d$  der stationären Lösung für  $n = 1$  bestimmt wurde, erklären sich dadurch die Abweichungen von der Dynamik für  $\gamma \rightarrow 1$ . Außerdem wurde die Dynamik mit den Grundzuständen der stationären Lösung als Anfangswerte untersucht. Die Grundzustände sind im Gegensatz zu den sonst immer gewählten reellen Anfangswerten komplex. Die kritischen Punkte  $\chi_d$  der Dynamik mit den Grundzuständen als Anfangswerten deckten sich exakt mit den kritischen Werten der stationären Lösung. Die Dynamik besitzt für  $\chi < \chi_d$  auch für alle  $\gamma$  eine konstante Norm von  $n = 1$ .

Zuletzt wurden die Ergebnisse diskutiert und eine alternative Vorgehensweise zur Vorhersage der kritischen Werte der Dynamik von Ramezani und Mitarbeitern [4] vorgestellt. Dabei ergab sich, dass die Anfangswerte eine bedeutende Rolle für die kritischen Werte der Dynamik spielen. Die kritischen Punkte der stationären Lösung liefern nur verlässliche Vorhersagen, wenn als Anfangswerte der Dynamik ihre Grundzustände gewählt werden. Ähneln die Anfangswerte den Grundzuständen, ergeben sich gute Ergebnisse für  $\gamma \ll 1$ . Das Vorgehen von Ramezani und Mitarbeitern [4] liefert für reelle Anfangswerte die  $\kappa = \pm 1$  und  $n = 1$  erfüllen, weitaus bessere Ergebnisse als die stationäre Lösung, besonders für  $\gamma \rightarrow 1$ . Ob diese Vorgehensweise auch gute Ergebnisse für andere und möglicherweise komplexe Anfangswerte liefert, müsste untersucht werden. Tut es das nicht, bleibt einem für andere Anfangswerte nichts anderes übrig als die Dynamik numerisch zu lösen, um die kritischen Punkte zu bestimmen.

# Literaturverzeichnis

- [1] Carl M Bender. Making sense of non-Hermitian Hamiltonians. *Reports on Progress in Physics* 70, 947 (2007).
- [2] Carl M Bender. Introduction to  $\mathcal{PT}$ -symmetric quantum theory. *Contemporary Physics* 46, 277–292 (2005).
- [3] Kottos Tsampikos. Optical physics: Broken symmetry makes light work. *Nat Phys* 6, 166–167 (2010). 10.1038/nphys1612.
- [4] Hamidreza Ramezani, Tsampikos Kottos, Ramy El-Ganainy und Demetrios N. Christodoulides. Unidirectional nonlinear  $\mathcal{PT}$ -symmetric optical structures. *Phys. Rev. A* 82, 043803 (2010).
- [5] A. Guo, G. J. Salamo, D. Duchesne, R. Morandotti, M. Volatier-Ravat, V. Aimez, G. A. Siviloglou und D. N. Christodoulides. Observation of  $\mathcal{PT}$ -Symmetry Breaking in Complex Optical Potentials. *Phys. Rev. Lett.* 103, 093902 (2009).
- [6] J Rogel-Salazar. The Gross–Pitaevskii equation and Bose–Einstein condensates. *European Journal of Physics* 34, 247 (2013).
- [7] Andreas Löhle. Stabilitätslücke bei  $\mathcal{PT}$ -symmetrischen Bose-Einstein-Kondensaten (2013).
- [8] H. Huang und H. Hung-Chia. *Coupled Mode Theory: As Applied to Microwave and Optical Transmission*. Taylor & Francis (1984).
- [9] G. New. *Introduction to Nonlinear Optics*. Cambridge University Press (2011).
- [10] W. Nolting. *Grundkurs Theoretische Physik 6: Statistische Physik*. Grundkurs Theoretische Physik. Springer (2014).
- [11] Eva-Maria Graefe. Stationary states of a  $\mathcal{PT}$  symmetric two-mode Bose–Einstein condensate. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* 45, 444015 (2012).

- [12] Eva-Maria Graefe, Hans Jürgen Korsch und Astrid Elisa Niederle. Quantum-classical correspondence for a non-Hermitian Bose-Hubbard dimer. *Phys. Rev. A* 82, 013629 (2010).

# Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich bei allen bedanken, die zu der Vollendung dieser Arbeit beigetragen haben.

Besonders möchte ich mich bei Dr. Holger Cartarius für seine hervorragende Betreuung während des Semesters bedanken. Er hatte immer Zeit für meine Fragen und die Geduld mein Schreiben in die richtige Richtung zu lenken. Ohne ihn wäre diese Bachelorarbeit nicht halb so gut. Meiner Familie möchte ich für das Korrekturlesen danken, das hoffentlich die letzten Fehler vertrieben hat. Prof. Dr. Wunner danke ich für die Möglichkeit meine Bachelorarbeit am 1. Institut für Theoretische Physik schreiben zu können. Zuletzt möchte ich mich bei allen Mitarbeitern des Instituts für das schöne Semester bedanken.



## **Ehrenwörtliche Erklärung**

Ich erkläre,

- dass ich diese Bachelorarbeit selbständig verfasst habe,
- dass ich keine anderen als die angegebenen Quellen benutzt und alle wörtlich oder sinngemäß aus anderen Werken übernommenen Aussagen als solche gekennzeichnet habe,
- dass die eingereichte Arbeit weder vollständig noch in wesentlichen Teilen Gegenstand eines anderen Prüfungsverfahrens gewesen ist,
- dass ich die Arbeit weder vollständig noch in Teilen bereits veröffentlicht habe, es sei denn, der Prüfungsausschuss hat die Veröffentlichung vorher genehmigt
- und dass der Inhalt des elektronischen Exemplars mit dem des Druckexemplars übereinstimmt.

Stuttgart, den 4. September 2015

*Stefan Käser*