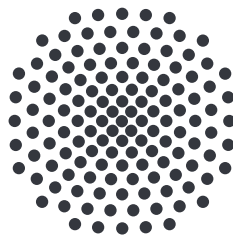


# Näherungen für Breather in Metamaterialien mit schwachen Nichtlinearitäten

Bachelorarbeit von  
**Benedikt Herkommer**

9. August 2017

Prüfer: Priv.-Doz. Dr. Holger Cartarius



1. Institut für Theoretische Physik  
Universität Stuttgart  
Pfaffenwaldring 57, 70550 Stuttgart



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1	Motivation und Einführung in das Thema . . . . .	1
1.2	Aufbau der Arbeit . . . . .	2
<b>2</b>	<b><math>\mathcal{PT}</math>-Symmetrische Quantenmechanik</b>	<b>5</b>
2.1	Der $\mathcal{PT}$ -Operator . . . . .	5
2.2	$\mathcal{PT}$ -symmetrische Systeme . . . . .	6
2.2.1	Eigenzustände linearer Operatoren mit $\mathcal{PT}$ -Symmetrie . . . . .	7
2.2.2	Physikalische Interpretation von komplexen Eigenwerten . . . . .	7
2.2.3	Physikalische Interpretation eines komplexen Potentials . . . . .	8
2.2.4	Nichtlineare Systeme . . . . .	8
<b>3</b>	<b>Optische Metamaterialien</b>	<b>11</b>
3.1	Split-Ring-Resonatoren . . . . .	11
3.2	Dimere . . . . .	12
3.3	Nichtlinearitäten in den Kondensatoren . . . . .	13
3.4	Metamaterialien: Kette aus Dimeren . . . . .	14
3.5	$\mathcal{PT}$ -Symmetrie bei Metamaterialien . . . . .	15
<b>4</b>	<b>Breather</b>	<b>17</b>
4.1	Analytische Lösung für einen Breather: Gross-Pitaevskii Gleichung (GPG) . . . . .	17
4.1.1	Solitonenlösung der GPG . . . . .	18
4.1.2	Breatherlösung der GPG . . . . .	19
4.2	Breather in Metamaterialien . . . . .	19
<b>5</b>	<b>Berechnen der Dispersionsrelation im linearen Fall</b>	<b>21</b>
<b>6</b>	<b>Näherungen für Breather: Dispersionsrelation im Nichtlinearen</b>	<b>25</b>
6.1	Näherungslösung für ebene Wellen im Nichtlinearen . . . . .	25
6.2	Simulation des Systems zur Bestimmung der Dynamik . . . . .	31
6.3	Diskussion der Näherung . . . . .	36
<b>7</b>	<b>Breather bei abnehmenden Nichtlinearitäten</b>	<b>41</b>
7.1	Numerisches Vorgehen zum Auffinden von Breatherlösungen . . . . .	41

7.2 Überprüfen der Existenz von Breatherlösungen bei kleiner werdenden Nichtlinearitäten . . . . .	42
<b>8 Modellsystem zum besseren Verständnis von Breather</b>	<b>45</b>
8.1 Einführung des Modells . . . . .	45
8.2 Anwenden des Modells auf das System in dieser Arbeit . . . . .	47
<b>9 Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>53</b>
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>57</b>
<b>Danksagung</b>	<b>59</b>

# 1 Einleitung

## 1.1 Motivation und Einführung in das Thema

Seit einiger Zeit ist es möglich, künstliche Materialien durch die periodische Anordnung von Schwingkreisen, sogenannte Metamaterialien, herzustellen, die über elektromagnetische Wechselwirkung miteinander gekoppelt sind. Die Schwingkreise werden durch kreisförmige Leiter, die durch einen Schlitz unterbrochen sind, realisiert (genannt Split-Ring-Resonatoren, abgekürzt SRR). Die so konstruierten Metamaterialien weisen erstaunliche optische Eigenschaften auf, die so in der Natur nicht zu finden sind. Das herausragendste Merkmal ist die Beobachtung von negativen Brechungsindizes. Dadurch können die Metamaterialien genutzt werden, um so genannte Super-Linsen [1] oder optische Tarnkappen [2, 3] herzustellen.

Diese Metamaterialien können so konstruiert werden, dass die einzelnen SRR nichtlineare Eigenschaften aufweisen. Desweiteren ist es möglich, zum Beispiel durch Einbringen einer Esaki-Diode in den Schlitz, Schwingkreise mit einem negativen Widerstand zu realisieren [4, 5]. Dadurch können Systeme mit ausgeglichenem Gewinn und Verlust konstruiert werden. Diese Systeme weisen Analogien zur Quantenmechanik, insbesondere zur  $\mathcal{PT}$ -symmetrischen Quantenmechanik, auf, wodurch ihr Formalismus erfolgreich auf diese optischen Systeme angewandt werden kann.

In der  $\mathcal{PT}$ -symmetrischen Quantenmechanik wird die sonst übliche Forderung nach hermiteschen Operatoren fallen gelassen. Diese Forderung resultiert aus der Notwendigkeit reeller Eigenwerte, da diese den möglichen Werten von Observablen entsprechen und komplexe Werte physikalisch keinen Sinn ergeben.  $\mathcal{PT}$  steht für „Parity-Time“.  $\mathcal{PT}$ -Symmetrie bedeutet also, dass das System invariant unter der gleichzeitigen Spiegelung des Ortes und der Zeit ist. Von Bender und Boettcher konnte 1998 gezeigt werden, dass Systeme mit nichthermiteschen Operatoren trotzdem ein reelles Eigenspektrum aufweisen können, sofern das System  $\mathcal{PT}$ -Symmetrie besitzt [6]. Dies kann durch komplexe Potentiale erreicht werden. Physikalisch entspricht ein komplexes Potential einer Quelle beziehungsweise Senke von Teilchen, also einem ausgeglichenem Gewinn und Verlust an Teilchen. Sobald komplexe Eigenwerte gefunden werden, spricht man von einem  $\mathcal{PT}$ -Bruch. Das ist dann der Fall, wenn die zum Eigenwert zugehörige Eigenfunktion nicht mehr  $\mathcal{PT}$ -symmetrisch ist. Quantenmechanische Systeme dieser Art konnten bisher jedoch experimentell noch nicht realisiert werden und dadurch noch keine Bestätigung für

die Korrektheit der Beschreibung gefunden werden. In der Optik wurde diese Theorie jedoch schon in vielen Experimenten bestätigt [7].

Das in dieser Arbeit betrachtete System weist, durch SRR mit ausgeglichenem Gewinn und Verlust, die geforderte  $\mathcal{PT}$ -Symmetrie auf, wodurch es sich mit dem Formalismus der  $\mathcal{PT}$ -symmetrischen Quantenmechanik beschreiben lässt. Bei der Nichtlinearität des Systems handelt es sich um eine Kerr-Nichtlinearität. Durch die nichtlineare Antwort der SRR findet man auf dem System nicht nur ebene Wellen als Lösungen, sondern auch Breather-Lösungen. Breather sind spezielle Formen von Solitonen, die räumlich stationär und in der Zeit periodisch sind. Für diese Breather will man ein besseres Verständnis entwickeln. Insbesondere die Frage, ob es Zusammenhänge zwischen Lösungen im Linearen, wie zum Beispiel ebene Wellen, und den Breatherlösungen im Nichtlinearen gibt, ist von Interesse. Das Ziel dieser Arbeit ist es, diese Frage zu beantworten und für schwache Nichtlinearitäten zu versuchen, eine Näherungslösung für Breather zu finden.

Dazu existieren verschiedene Ansätze, die in dieser Arbeit überprüft werden. Die erste Idee ist, im nichtlinearen Fall eine Näherung für die Dispersionsrelation zu finden und diese zu nutzen, um eine Vorhersage über das Frequenzspektrum von Breather treffen zu können. Dieser Idee liegt die Annahme zu Grunde, dass es einen Übergang von ebenen Wellen zu Breatherlösungen gibt. Es stellt sich jedoch heraus, dass ebene Wellen im Nichtlinearen nur geringfügig von welchen im Linearen abweichen. Um zu überprüfen, wie sich Breather bei abnehmender Nichtlinearität verhalten und ob es zu einem Übergang zu Lösungen kommt, die auch in einem linear antwortenden Metamaterial existieren, wird das System bei unterschiedlichen Nichtlinearitäten simuliert. Man kommt zu dem interessanten Ergebnis, dass die Breather ab einer bestimmten Nichtlinearität aufhören zu existieren. Schlussendlich wird in einem Modellsystem der Mechanismus, welcher für die Entstehung von Breather verantwortlich ist, untersucht und dabei der fundamentale Mechanismus, der hinter der Entstehung von diskreten Breather steckt, herausgearbeitet. Ebenso wird verständlich gemacht, worin sich ebene Wellen und Breather unterscheiden. Die so gewonnenen Erkenntnisse stehen im Einklang mit den zuvor gemachten Beobachtungen. Aus dem gewonnenen Gesamteindruck aller in der Arbeit erarbeiteten Ergebnisse kristallisiert sich die starke Vermutung heraus, dass Breather nicht aus linearen Lösungen entstehen und auch nicht in solche übergehen können, sondern sie ein exklusiv nichtlineares Phänomen sind.

## 1.2 Aufbau der Arbeit

Zuerst wird in Kapitel 2 eine kurze Einführung in die  $\mathcal{PT}$ -symmetrische Quantenmechanik gegeben, da das System dieser Arbeit durch ihren Formalismus beschrieben werden kann und man dadurch weitere Erkenntnisse gewinnen kann.

Als nächstes wird in Kapitel 3 die theoretische Grundlage von Metamaterialien vor-

gestellt. Angefangen von einem einzelnen Split-Ring-Resonator über die Kopplung von zwei SRR, die einen Dimer bilden, bis hin zum 1D-Metamaterial, das aus einer Kette von Dimeren aufgebaut ist. Zudem wird auf die Analogie zwischen optischen und quantenmechanischen Systemen eingegangen und explizit die Zusammenhänge in dem System dieser Arbeit herausgearbeitet.

In Kapitel 4 werden analytische Lösungen von Solitonen und Breather der Gross-Pitaevskii-Gleichung sowie eine Breatherlösung des Systems dieser Arbeit gezeigt.

In Kapitel 5 wird die Dispersionsrelation im Linearen berechnet. Das dient zum einen der Überprüfung der Lösung im Vergleich mit anderen bekannten Lösungen, ist aber auch als nötiger Referenzwert im weiteren Verlauf der Arbeit wichtig.

Kapitel 6 ist der Hauptteil der Arbeit. Das Ziel, Zusammenhänge zwischen linearen und nichtlinearen Lösungen zu finden, wird dort angegangen. Unter der Annahme, dass diese existieren, wird durch Nähern eine Dispersionsrelation für ebene Wellen im nichtlinearen Fall bestimmt. Um diese Näherung zu untersuchen, wird die Dynamik des Systems numerisch berechnet und die Frequenzspektren durch eine Fourier-Analyse bestimmt. Daraus erhält man andere Ergebnisse als aus der Näherung. Die Frage nach Zusammenhängen zwischen linearen und nichtlinearen Lösungen konnte damit noch nicht beantwortet werden.

In Kapitel 7 wird der Frage aus einer anderen Perspektive nachgegangen. Dazu wird numerisch nach Breatherlösungen bei einer festen Nichtlinearität gesucht. Hat man diese gefunden, wird die Nichtlinearität schrittweise verkleinert und es wird wieder nach Breatherlösungen gesucht. Der vermutete Zusammenhang wird dabei nicht gefunden.

Abschließend wird in Kapitel 8 ein Modellsystem betrachtet, um ein besseres Verständnis für Breather zu gewinnen. Mit den dadurch gewonnenen Erkenntnissen wird der Ansatz des Modellsystems auf das ursprüngliche System angewandt. Die Ergebnisse der bisherigen Arbeit werden mit denen aus dem Modellsystem verglichen. Da diese gut übereinstimmen, kann der fundamentale Mechanismus des Systems, der zur Existenz von Breather beziehungsweise ebenen Wellen führt, verstanden werden.





## 2 $\mathcal{PT}$ -Symmetrische Quantenmechanik

In der Quantenmechanik werden Objekte immer durch einen bestimmten Zustand beschrieben. Diese Zustände werden üblicherweise durch einen vollständigen Satz an Basisvektoren  $|\varphi\rangle$  ausgedrückt,

$$|\psi\rangle = \sum_i \langle i|\psi\rangle |\varphi\rangle \quad (2.1)$$

Wendet man einen Operator  $\hat{A}$  auf einen passenden Eigenvektor an, so erhält man die Eigenwertgleichung,

$$\hat{A}|\psi\rangle = a|\psi\rangle \quad (2.2)$$

mit dem Eigenwert  $a$ . Die Eigenwerte entsprechen in der Quantenmechanik den möglichen Werten physikalischer Größen. Da ein komplexer Messwert physikalisch keinen Sinn ergibt, folgt die Forderung nach hermiteschen Operatoren, die immer reelle Eigenwerte ergeben. 1998 wurde von Bender und Boettcher die sogenannte  $\mathcal{PT}$ -symmetrische Quantenmechanik publiziert [6]. Dabei wird die Forderung nach hermiteschen Operatoren fallen gelassen. Diese Operatoren können jedoch in besondern Fällen immer noch auf rein reelle Eigenwerte führen.  $\mathcal{PT}$  steht dabei für „Parity-Time-Symmetrie“, also eine Symmetrie unter Spiegelung in Ort und Zeit. Diese Art der Quantenmechanik ist besonders nützlich, um dynamische Systeme mit ausgeglichenem Verlust und Gewinn zu beschreiben, ohne explizit eine Zeitabhängigkeit berechnen zu müssen, wie dies in der hermiteschen Quantenmechanik der Fall wäre. Im folgenden werde ich mich bei der Formulierung der Gesetze an der Masterarbeit von Dennis Dast orientieren [8].

### 2.1 Der $\mathcal{PT}$ -Operator

Der  $\mathcal{PT}$ -Operator setzt sich zusammen aus dem  $\mathcal{P}$  und  $\mathcal{T}$ -Operator. Angewandt auf einen Zustand agieren sie wie folgt,

$$\mathcal{P} : \hat{x} \rightarrow -\hat{x}, \hat{p} \rightarrow -\hat{p}, \quad (2.3)$$

$$\mathcal{T} : \hat{x} \rightarrow \hat{x}, -\hat{p} \rightarrow \hat{p}, i \rightarrow -i. \quad (2.4)$$

Somit ergibt sich zusammen,

$$\mathcal{PT} : \hat{x} \rightarrow -\hat{x}, \hat{p} \rightarrow \hat{p}, i \rightarrow -i. \quad (2.5)$$

Der  $\mathcal{P}$ -Operator ist linear, der  $\mathcal{T}$ -Operator antilinear,

$$\mathcal{T}(\lambda(f + g)) = \lambda^*(\mathcal{T}(f) + \mathcal{T}(g)). \quad (2.6)$$

Zweifaches Anwenden des  $\mathcal{PT}$ -Operators ergibt,

$$(\mathcal{PT})(\mathcal{PT})|\psi\rangle = (\mathcal{PT})\lambda|\psi\rangle = \lambda^*(\mathcal{PT})|\psi\rangle = \lambda^*\lambda|\psi\rangle = |\lambda|^2|\psi\rangle \stackrel{!}{=} |\psi\rangle. \quad (2.7)$$

Dabei ist  $\lambda$  der Eigenwert des  $\mathcal{PT}$  Operators. Die letzte Gleichheit folgt aus der Konstruktion des  $\mathcal{PT}$ -Operators, nach der ein Zustand nach zweimaligem Anwenden wieder in sich selbst transformiert wird (vergleiche (2.5)). Somit muss für  $\lambda$  folgen

$$|\lambda|^2 \stackrel{!}{=} 1. \quad (2.8)$$

Also muss  $\lambda$  eine komplexe Zahl mit Betrag 1 sein und kann geschrieben werden als

$$\lambda = e^{i\varphi}. \quad (2.9)$$

Weitere Erkenntnisse erhält man durch Einführen einer Phase  $\gamma$ ,

$$\begin{aligned} \mathcal{PT}|\psi\rangle &= e^{i\varphi}|\psi\rangle \\ e^{-i\gamma}\mathcal{PT}|\psi\rangle &= e^{-i\gamma}e^{i\varphi}|\psi\rangle \\ \mathcal{PT}e^{i\gamma}|\psi\rangle &= e^{-2i\gamma}e^{i\varphi} \overbrace{e^{i\gamma}|\psi\rangle}^{|\tilde{\psi}\rangle} \\ \mathcal{PT}|\tilde{\psi}\rangle &= e^{-\hat{\varphi}}|\tilde{\psi}\rangle. \end{aligned} \quad (2.10)$$

$|\tilde{\psi}\rangle$  ist somit ein neuer Eigenzustand mit dem Eigenwert  $\hat{\varphi} = \varphi - 2\gamma$ . Man kann  $\gamma$  nun so wählen, dass  $\hat{\varphi} = 0$  ist. Mit dieser Definition gilt

$$\mathcal{PT}|\tilde{\psi}\rangle = |\tilde{\psi}\rangle. \quad (2.11)$$

Da  $\gamma$  für jedes  $|\tilde{\psi}\rangle$  entsprechend gewählt werden kann, gilt Gleichung (2.11) auch für jedes  $|\psi\rangle$ , so lange dies ein Eigenzustand zum  $\mathcal{PT}$ -Operator ist.

## 2.2 $\mathcal{PT}$ -symmetrische Systeme

Im Gegensatz zur hermiteschen Quantenmechanik sind in der  $\mathcal{PT}$ -symmetrischen Quantenmechanik auch komplexe Potentiale erlaubt. Bedingung für die  $\mathcal{PT}$ -Symmetrie quantenmechanischer Systeme ist, dass der Kommutator des Hamilton-Operators  $\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} +$

$V(\mathbf{r})$  mit dem  $\mathcal{PT}$ -Operator verschwindet,

$$\begin{aligned} [\hat{H}, \mathcal{PT}] &= 0, \\ \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\mathbf{r}) - \frac{\hat{p}^2}{2m} - V^*(-\mathbf{r}) &= 0, \\ V(\mathbf{r}) &= V^*(-\mathbf{r}). \end{aligned} \quad (2.12)$$

Daraus wird ersichtlich, dass ein Potential in  $\mathcal{PT}$ -symmetrischen Systemen einen symmetrischen Real-, und einen antisymmetrischen Imaginärteil haben muss.

### 2.2.1 Eigenzustände linearer Operatoren mit $\mathcal{PT}$ -Symmetrie

Man betrachtet einen linearen Hamilton-Operator  $\hat{H}$  mit Eigenwert  $E$  zur Wellenfunktion  $|\psi\rangle$ ,

$$\hat{H}|\psi\rangle = E|\psi\rangle. \quad (2.13)$$

Wendet man auf diese Funktion den  $\mathcal{PT}$ -Operator an, erhält man

$$\hat{H}\mathcal{PT}|\psi\rangle = \mathcal{PT}\hat{H}|\psi\rangle = \mathcal{PT}E|\psi\rangle = E^*\mathcal{PT}|\psi\rangle. \quad (2.14)$$

Daraus folgt, dass  $E^*$  der Eigenwert zu  $\mathcal{PT}|\psi\rangle$  ist, wenn  $E$  Eigenwert zu  $|\psi\rangle$  ist. Der Eigenwert ist im allgemeinen komplex. Das bedeutet, dass  $\mathcal{PT}|\psi\rangle$  ein weiterer Eigenvektor zum Hamilton-Operator  $\hat{H}$  ist. Wenn jedoch  $|\psi\rangle$  auch ein Eigenzustand zum  $\mathcal{PT}$ -Operator ist, so ist  $\mathcal{PT}|\psi\rangle$  kollinear zu  $|\psi\rangle$  und es existiert ein Eigenwert  $\lambda$ . Damit lässt sich Gleichung (2.14) erweitern zu

$$E\lambda|\psi\rangle = \lambda E|\psi\rangle = \lambda\hat{H}|\psi\rangle = \mathcal{PT}\hat{H}|\psi\rangle = \mathcal{PT}E|\psi\rangle = E^*\lambda|\psi\rangle. \quad (2.15)$$

Daraus wird ersichtlich, dass für  $\mathcal{PT}$ -symmetrische Systeme  $E^* = E$ , also reelle Eigenwerte existieren. Findet man jedoch komplexe Eigenwerte, so spricht man von einem  $\mathcal{PT}$ -Bruch, beziehungsweise von  $\mathcal{PT}$ -gebrochenen Systemen.

### 2.2.2 Physikalische Interpretation von komplexen Eigenwerten

Man betrachtet einen hermiteschen Hamilton-Operator  $\hat{H}$  mit dem bekannten Eigenwert  $E$ . Zu diesem wird ein komplexer Teil  $i\gamma$  addiert und in die zeitabhängige Schrödinger-Gleichung eingesetzt,

$$i\hbar\partial_t|\psi(t)\rangle = (\hat{H} + i\gamma)|\psi(t)\rangle. \quad (2.16)$$

Setzt man den Ansatz  $|\psi(t)\rangle = |\phi\rangle e^{i\lambda t}$  in (2.16) ein, erhält man für  $\lambda = \left(-\frac{E}{\hbar} + \frac{i\gamma}{\hbar}\right)$  und somit für die Wellenfunktion sowie für die Wahrscheinlichkeitsdichte  $\rho$

$$|\psi(t)\rangle = |\phi\rangle e^{-i\frac{E}{\hbar}t} e^{-\frac{\gamma}{\hbar}t} \Rightarrow \rho = \psi^* \psi = |\phi|^2 e^{-\frac{2\gamma}{\hbar}t}. \quad (2.17)$$

Je nach Vorzeichen von  $\gamma$  führt das komplexe Potential also zu einer Zu-, beziehungsweise Abnahme der Amplitude sowie der Wahrscheinlichkeitsdichte.

### 2.2.3 Physikalische Interpretation eines komplexen Potentials

Für weitere Erkenntnisse über die physikalische Interpretation von Systemen mit komplexen Potentialen wird die Kontinuitätsgleichung für diese Systeme betrachtet. Dafür wird die zeitliche Änderung der Wahrscheinlichkeitsdichte  $\rho = \psi^* \psi$  betrachtet. Die Ableitung der Wellenfunktion nach der Zeit wird mithilfe der Schrödingergleichung ersetzt durch  $\partial_t \psi = \frac{-i\hat{H}}{\hbar} \psi$ ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} &= \dot{\psi}^* \psi + \psi^* \dot{\psi} \\ &= -\frac{i}{\hbar} (-\psi \hat{H}^* \psi^* + \psi^* \hat{H} \psi) \\ &= -\frac{i}{\hbar} \left[ -\psi \left( \frac{-\hbar^2 \Delta}{2m} + V^*(\mathbf{r}) \right) \psi^* + \psi^* \left( \frac{-\hbar^2 \Delta}{2m} + V(\mathbf{r}) \right) \right] \\ &= -\frac{i}{\hbar} (V(\mathbf{r}) - V^*(\mathbf{r})) \rho - \underbrace{\frac{i\hbar}{2m} (\psi \Delta \psi^* - \psi^* \Delta \psi)}_{\text{div } \mathbf{j}} \end{aligned} \quad (2.18)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \mathbf{j} = 2\text{Im}V(\mathbf{r})\rho. \quad (2.19)$$

Dieses Ergebnis stellt die Kontinuitätsgleichung dar, wobei  $\mathbf{j}$  ein Wahrscheinlichkeitsstrom ist. Im Gegensatz zur hermiteschen Quantenmechanik ist die Kontinuitätsgleichung jedoch ungleich Null, was bedeutet, dass die Wahrscheinlichkeit nicht erhalten ist. Physikalisch entspricht dies Quellen und Senken von Teilchen.

### 2.2.4 Nichtlineare Systeme

Wie in der vorliegenden Arbeit ist es in der Physik oft von Interesse, sich den nichtlinearen Fall eines Systems anzuschauen. Um die  $\mathcal{PT}$ -symmetrische Quantenmechanik im Nichtlinearen anwenden zu können, muss die Nichtlinearität bestimmte Eigenschaften erfüllen. Der Hamilton-Operator im Nichtlinearen setzt sich aus einem linearen und nichtlinearen Teil zusammen,

$$\hat{H} = \hat{H}_{\text{linear}} + \hat{H}_{\text{nichtlinear}}. \quad (2.20)$$

Der nichtlineare Operator ist eine Funktion der Wellenfunktion,

$$\hat{H}_{\text{nichtlinear}} = f(|\psi\rangle). \quad (2.21)$$

Damit die Nichtlinearität  $\mathcal{PT}$ -symmetrisch ist, muss der Kommutator des Hamilton-Operators mit dem  $\mathcal{PT}$ -Operator wieder verschwinden,

$$\begin{aligned} [\hat{H}, \mathcal{PT}] &= [\hat{H}_{\text{lin}} + f(|\psi\rangle), \mathcal{PT}] \\ &= \underbrace{[\hat{H}_{\text{lin}}, \mathcal{PT}]}_{\stackrel{1)}{=} 0} + [f(|\psi\rangle), \mathcal{PT}] \\ &= f(|\psi\rangle)\mathcal{PT} - \mathcal{PT}f(|\psi\rangle). \end{aligned} \quad (2.22)$$

Die mit 1) markierte Gleichheit ist dann erfüllt, wenn der lineare Hamilton-Operator  $\mathcal{PT}$ -symmetrisch ist. Damit der letzte Teil der Gleichung verschwindet, muss  $|\psi\rangle$  wieder  $\mathcal{PT}$ -symmetrisch sein sowie die Relationen

$$\mathcal{PT}f(|\psi\rangle) = f(\mathcal{PT}|\psi\rangle), \quad (2.23)$$

$$f(|\psi\rangle) = f(e^{i\varphi}|\psi\rangle), \quad (2.24)$$

erfüllt sein. Man betrachtet nun, analog zum linearen System, wieder die Anwendung des  $\mathcal{PT}$ -Operators auf die Eigenwertgleichung  $\hat{H}|\psi\rangle = E|\psi\rangle$ ,

$$\begin{aligned} \mathcal{PT} \left( \hat{H}_{\text{linear}} + f(|\psi\rangle) \right) |\psi\rangle &= \mathcal{PT}E|\psi\rangle, \\ \hat{H}_{\text{linear}}\mathcal{PT}|\psi\rangle + f(\mathcal{PT}|\psi\rangle)\mathcal{PT}|\psi\rangle &= E^*\mathcal{PT}|\psi\rangle. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Dabei ist die Wirkweise des  $\mathcal{PT}$ -Operators auf die Nichtlinearität zu beachten. Diese folgt nicht, wie man aus mathematischer Sicht vermuten würde, der Produktregel von Operatoren. Der  $\mathcal{PT}$ -Operator wirkt auf alle Wellenfunktionen gleichzeitig. Vorstellbar wird dies, indem man  $f(|\psi\rangle)|\psi\rangle$  zu einer neuen Nichtlinearität  $g(\psi) = f(|\psi\rangle)|\psi\rangle$  zusammenfasst. Lässt man den  $\mathcal{PT}$ -Operator darauf wirken, folgt

$$\mathcal{PT}g(|\psi\rangle) = g(\mathcal{PT}|\psi\rangle) = f(\mathcal{PT}|\psi\rangle)\mathcal{PT}|\psi\rangle.$$

Der Grund für diese Wirkweise liegt in der physikalischen Interpretation des Operators: Es ist nicht sinnvoll, nur einen Teil der Wellenfunktion in Ort und Zeit zu spiegeln, während der andere Teil noch in seinem ursprünglichen Zustand gehalten wird.

Analog zum linearen Fall erkennt man, dass allgemein  $E^*$  Eigenwert zur Eigenfunktion  $\mathcal{PT}|\psi\rangle$  ist. Falls  $|\psi\rangle$  ein Eigenzustand zum  $\mathcal{PT}$ -Operator ist, findet man einen Eigenwert  $\lambda$  und es gilt wieder, dass  $E^* = E$ , also reell ist.



# 3 Optische Metamaterialien

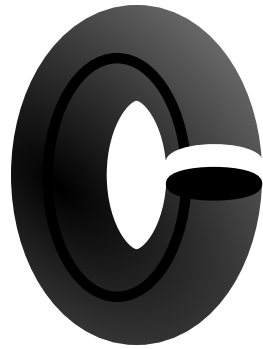
In der vorliegenden Arbeit werden Phänomene in Metamaterialien untersucht. Metamaterialien sind künstlich hergestellte Materialien, welche aufgrund ihrer Zusammensetzung interessante, von natürlichen Materialien sehr verschiedene Wechselwirkungen mit elektromagnetischen Wellen aufweisen, wie zum Beispiel einen negative Brechungsindex. In diesem Kapitel wird der Aufbau der Metamaterialien sowie ihre mathematische Beschreibung dargestellt. Ausgehend von ihren kleinsten Bauteilen, den Split-Ring-Resonatoren, über einen Dimer, welcher als Elementarzelle eines Metamaterials betrachtet werden kann, bis hin zum 1D-Metamaterial. Außerdem wird auf nichtlineare Effekte eingegangen. Abschließend wird eine Verknüpfung zur  $\mathcal{PT}$ -symmetrischen Quantenmechanik hergestellt.

## 3.1 Split-Ring-Resonatoren

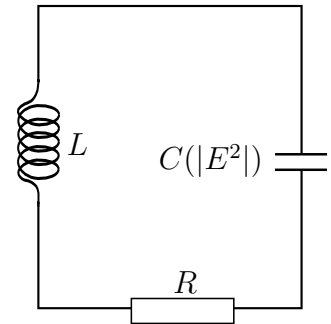
Die elementaren Bauteile von Metamaterialien sind Split-Ring-Resonatoren (SRR). SRR sind entweder kreisförmige oder eckige Leiter mit einem Schlitz dazwischen. Der Schlitz dient als Kondensator, der Leiter als Spule mit einer Windung (vergleiche Abbildung 3.1a). Für die mathematische Beschreibung nutzt man ein Ersatzschaltbild (Abbildung 3.1b) bestehend aus einer Spule mit Induktivität  $L$ , einem Widerstand  $R$  und einem Kondensator mit Kapazität  $C$ . Dadurch lässt sich die Differentialgleichung

$$L\ddot{Q} + R\dot{Q} + QC = U_0 e^{i\omega t}, \tag{3.1}$$

aufstellen. Der Term  $U_0 e^{i\omega t}$  ist dabei eine äußere harmonische Anregung mit der Kreisfrequenz  $\omega$  und der Amplitude  $U_0$ .



(a) Split-Ring-Resonator



(b) Ersatzschaltbild eines Split-Ring-Resonators

Abbildung 3.1: Ein SRR besteht aus einem kreisförmigen Leiter mit einem Schlitz und ist somit Kondensator und Spule zugleich (a). Mathematisch wird er durch ein Ersatzschaltbild, bestehend aus einer Spule mit der Induktivität  $L$ , einem Widerstand  $R$  und einem Kondensator mit der Kapazität  $C$  beschrieben (b). Diese kann durch eine Nichtlinearität von der Feldstärke abhängig sein.

### 3.2 Dimere

Aus der Elektrodynamik ist bekannt, dass beschleunigte Ladungen elektromagnetische Wellen aussenden. Bringt man nun zwei Split-Ring-Resonatoren zusammen, so koppeln diese über jene elektromagnetischen Wellen aneinander. Ein Konstrukt aus zwei SRR bezeichnet man als Dimer. Diese sind die Elementarzellen eines Metamaterials. Dabei kann der Widerstand bei einem SRR positiv und beim anderen negativ gewählt werden, sodass der eine gedämpft und der andere angeregt wird. Ein negativer Widerstand kann experimentell durch negative differentielle Widerstände, wie sie z.B. eine Esaki-Diode besitzt, realisiert werden [4, 5]. Ist der Dimer wie in Abbildung 3.2, aus einem SRR mit der Öffnung nach oben und dem anderen mit der Öffnung nach unten angeordnet, so zeigt sich, dass die magnetische Wechselwirkung gegenüber der elektrischen dominiert, und letztere somit in guter Näherung

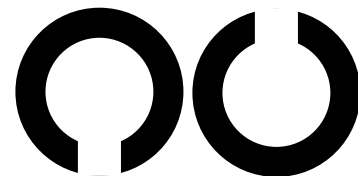


Abbildung 3.2: SRR senden Elektromagnetische Wellen aus. Bringt man zwei von Ihnen zusammen, so koppeln diese und bilden einen so genannten Dimer.



vernachlässigt werden kann [9]. Ein Dimer kann somit über die gekoppelten Differentialgleichungen [10]

$$L\ddot{Q}_1 + R\dot{Q}_1 + Q_1 + M\ddot{Q}_2 = 0, \quad (3.2a)$$

$$L\ddot{Q}_2 - R\dot{Q}_2 + Q_2 + M\ddot{Q}_1 = 0, \quad (3.2b)$$

beschrieben werden. Mit den Substitutionen  $\omega_l = 1/\sqrt{LC_l}$ ,  $\tau = t\omega_l$ ,  $I_c = U_c\omega_l C_l$ ,  $Q_c = C_l U_c$ ,  $I = I_c i$ ,  $\lambda = M/L$  und  $\gamma = RC_l\omega_l$  können die Gleichungen auf eine einheitenlose Form

$$\ddot{q}_1 + \gamma\dot{q}_1 + q_1 + \lambda\ddot{q}_2 = 0, \quad (3.3a)$$

$$\ddot{q}_2 - \gamma\dot{q}_2 + q_2 + \lambda\ddot{q}_1 = 0 \quad (3.3b)$$

gebracht werden [10]. Bei den Substitutionen sind alle Größen mit Index  $l$  die Werte aus dem bekannten linearen System und alle Größen mit Index  $c$  charakteristische Werte für dieses System.

### 3.3 Nichtlinearitäten in den Kondensatoren

Bringt man in den Schlitz eines SRR ein Dielektrikum, so erreicht man eine Nichtlinearität bei der Kapazität des Kondensators. Die Kapazität eines Plattenkondensators beträgt dann

$$C(\epsilon) = \frac{A}{d}\epsilon. \quad (3.4)$$

Dabei ist  $A$  die Fläche der Platten und  $d$  der Plattenabstand. Nach [11] gilt für das Dielektrikum unter Annahme eines Kerr-Dielektrikums

$$\epsilon(|E|^2) = \epsilon_0 \left( \epsilon_l + \alpha \frac{|E|^2}{E_c^2} \right), \quad (3.5)$$

wobei  $\epsilon_0$  die Permittivität im Vakuum,  $\epsilon_l$  die lineare Permittivität,  $E_c$  ein charakteristisches elektrisches Feld und  $\alpha = \pm 1$  eine Konstante ist, die angibt, ob es sich um eine attraktive oder repulsive Nichtlinearität handelt. Mit  $C = \frac{dQ}{dU}$  erhält man durch Intergration von Gleichung (3.4) zusammen mit (3.5)

$$Q = C_l \left( 1 + \alpha \frac{U^2}{3\epsilon_l U_C^2} \right) U. \quad (3.6)$$

Dabei ist  $C_l = \frac{A}{d}\epsilon_0\epsilon_l$ . In dieser Arbeit wird ein System betrachtet, welches von Tsironis et al. im Jahr 2013 erarbeitet wurde [12]. In diesem nutzen sie einen Varaktor, welcher

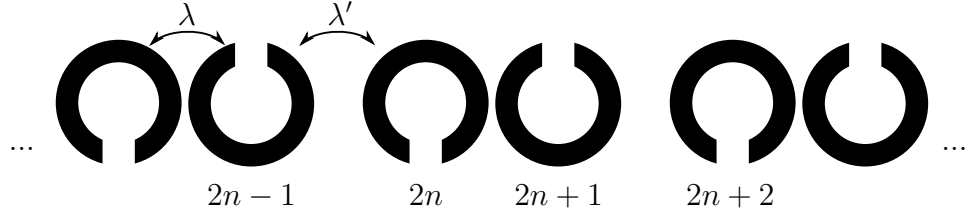


Abbildung 3.3: Eindimensionales Metamaterial. Innerhalb eines Dimers koppeln die SRR mit  $\lambda$ , zwischen zwei Dimeren mit  $\lambda'$ . Die Punkte deuten an, dass das System periodisch fortgesetzt wird.

für die Nichtlinearität verantwortlich ist. Ein Varraktor ist eine Diode, deren Kapazität von der angelegten Spannung abhängig ist. Für die Kapazität gilt

$$C(U_D) = C_l \left(1 - \frac{U_D}{U_p}\right)^{-M}, \quad (3.7)$$

wobei  $U_D$  die Spannung ist, die an der Diode anliegt,  $U_p$  ein intrinsisches Potential und  $M$  ein materialspezifischer Parameter [10]. Mit den Substitutionen aus Gleichung (3.3) erhält man eine Näherung für die Nichtlinearität in Abhängigkeit von der Ladung,

$$f(q_n) \approx q_n + \alpha q_n^2 + \beta q_n^3. \quad (3.8)$$

Der Index  $n$  nummeriert die Ladungen durch,  $\alpha$  und  $\beta$  sind Entwicklungskoeffizienten. Diese haben in der Arbeit von Tsironis et al. Werte von  $\alpha = -0.4$  und  $\beta = 0.08$  [10].

### 3.4 Metamaterialien: Kette aus Dimeren

Bringt man nun viele Dimere zu einer Kette zusammen, erhält man ein eindimensionales Metamaterial. In dem in dieser Arbeit betrachteten System sind die Dimere wie in Abbildung 3.3 zu sehen angeordnet. Dabei ist der Abstand zwischen zwei Dimeren immer etwas größer als der Abstand zwischen den SRR eines Dimers, sodass sich unterschiedliche Kopplungskonstanten  $\lambda$  und  $\lambda'$  ergeben [12]. Es wird nur die Wechselwirkung zwischen den nächsten Nachbarn betrachtet, da die magnetische Wechselwirkung quadratisch mit dem Abstand abfällt [11]. Um das Metamaterial zu beschreiben, erweitert man das Differentialgleichungssystem eines Dimers (3.3). Die Wechselwirkung zwischen den Dimeren wird durch die Kopplungskonstante  $\lambda'$  berücksichtigt. Zudem setzt man für  $q_n$  den Ausdruck (3.8) aufgrund vorhandener Nichtlinearität ein [12]. Dies resultiert in den Differentialgleichungen

$$\lambda' \ddot{q}_{2n} + \lambda \ddot{q}_{2n+2} + \ddot{q}_{2n+1} + \gamma \dot{q}_{2n+1} + q_{2n+1} + \alpha q_{2n+1}^2 + \beta q_{2n+1}^3 = 0, \quad (3.9a)$$

$$\lambda' \ddot{q}_{2n+1} + \lambda \ddot{q}_{2n-1} + \ddot{q}_{2n} - \gamma \dot{q}_{2n} + q_{2n} + \alpha q_{2n}^2 + \beta q_{2n}^3 = 0. \quad (3.9b)$$

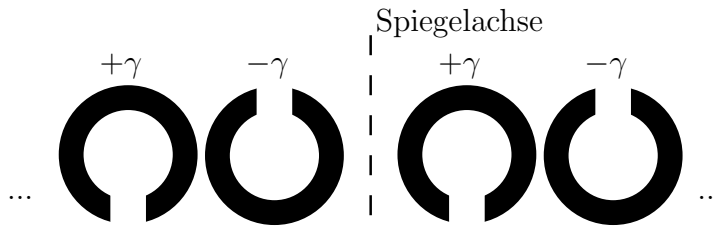


Abbildung 3.4: Bei eindimensionalen Metamaterialien kann  $\mathcal{PT}$ -Symmetrie vorliegen.

### 3.5 $\mathcal{PT}$ -Symmetrie bei Metamaterialien

Bisher konnte noch kein experimenteller Nachweis der  $\mathcal{PT}$ -symmetrischen Quantenmechanik in Bose-Einstein-Kondensaten oder ähnlichen quantenmechanischen Systemen nachgewiesen werden. Zwischen der Optik und der  $\mathcal{PT}$ -symmetrischen Quantenmechanik bestehen jedoch, unter bestimmten Voraussetzungen, viele Analogien, sodass sich der Formalismus der  $\mathcal{PT}$ -symmetrischen Quantenmechanik sehr gut auf optische Systeme übertragen lässt [13]. Dabei entspricht das elektrische Feld des Lichtes der quantenmechanischen Wellenfunktion und der komplexe Brechungsindex dem komplexen Potential. Wichtig ist, dass der Brechungsindex, ebenso wie die Potentiale symmetrisch im Realteil und antisymmetrisch im Imaginärteil ist. [7]. Nach dem Beer'schen Absorptionsgesetz entspricht der Imaginärteil des Brechungsindex einem Verlust beziehungsweise je nach Vorzeichen einem Zuwachs der Wellenfunktion [14]. Dadurch kann erreicht werden, dass das System einen ausgeglichen Gewinn und Verlust besitzt (engl. „balanced gain and loss system“).

Das in dieser Arbeit betrachtete Metamaterial entspricht ebenfalls den Anforderungen, um es mit dem Formalismus der  $\mathcal{PT}$ -symmetrischen Quantenmechanik beschreiben zu können. Durch den Absorptionskoeffizient, der abwechselnd sein Vorzeichen wechselt, erhält man exakt solch ein System mit „balanced gain and loss“ also mit  $\mathcal{PT}$ -Symmetrie. Anschaulich lässt sich dies erklären, in dem man sich überlegt, dass der  $\mathcal{PT}$ -Operator den Ort spiegelt und die gesamte Gleichung komplex konjugiert. Durch die komplexe Konjugation werden bei einer Spiegelung des Raumes die Vorzeichen des Verlust-, beziehungsweise Absorptionskoeffizienten gewechselt. Zeichnet man in das Metamaterial die Spiegelachse wie in Abbildung 3.4 ein, so ist diese Bedingung erfüllt.



## 4 Breather

Die Dispersionsrelation von Wellen lautet im Allgemeinen  $v_{\text{phase}} = d\omega/dk$ . Betrachtet man ein Wellenpaket, bestehend aus unterschiedlichen Frequenzen, so zerfließt dieses mit der Zeit. Treten jedoch nichtlineare Effekte auf, so kann man man Wellenpakete beobachten, die ihre Form beibehalten, da sich die nichtlinearen Effekte und die Dispersion gerade aufheben. Wellen, bei denen das der Fall ist, nennt man Solitonen. Breather sind nun eine spezielle Form von Solitonen, die bei gleichbleibender Form am selben Ort oszillieren. Dies ist eine Bewegung, die an Atmen erinnert, was namensgebend ist. Eine Bedingung für eine Breatherlösung ist

$$q_n(\tau) = q_n(\tau + T_b), \quad (4.1)$$

wobei  $T_b = 2\pi/\Omega$  die Breather-Periode ist und  $\Omega$  die Frequenz der einzelnen Oszillatoren.

### 4.1 Analytische Lösung für einen Breather: Gross-Pitaevskii Gleichung (GPG)

Die GPG ist eine nichtlineare Erweiterung der Schrödinger-Gleichung, die Mehrteilchensysteme durch eine Mean-Field-Näherung beschreibt [15],

$$i\hbar\Psi = \left[ -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V + g|\Psi|^2 \right] \Psi. \quad (4.2)$$

Der Parameter  $g|\Psi|^2$  kann dabei unterschiedliche Werte annehmen. Zudem können auch noch andere Nichtlinearitäten auftreten. Das Betragsquadrat erfüllt die Bedingungen, die an nichtlineare  $\mathcal{PT}$ -symmetrische Systeme gestellt werden ((2.23), (2.24)),

$$\mathcal{PT}|\Psi(\mathbf{r})|^2 = \mathcal{PT}(\Psi(\mathbf{r})\Psi^*(\mathbf{r})) = \Psi^*(-\mathbf{r})\Psi(-\mathbf{r}) = |\Psi^*(-\mathbf{r})|^2 = |\mathcal{PT}\Psi(\mathbf{r})|^2, \quad (4.3)$$

$$|\mathcal{PT}\Psi(\mathbf{r})|^2 = |e^{i\varphi}|^2|\Psi(\mathbf{r})|^2 = |\Psi(\mathbf{r})|^2, \quad (4.4)$$

sofern die Wellenfunktion  $\mathcal{PT}$ -symmetrisch ist. Somit kann die  $\mathcal{PT}$ -symmetrische Quantenmechanik auf die GPG angewendet werden. Im Folgenden werden Solitonen-, und Breather-Lösungen der GPG vorgestellt.

### 4.1.1 Solitonenlösung der GPG

Die dimensionlose, stationäre GPG lautet [16]

$$\Psi(\mathbf{r}) = \frac{1}{\mu} [-\Delta + V_{\text{ext}}(\mathbf{r}) - g|\Psi(\mathbf{r})|^2] \Psi(x). \quad (4.5)$$

Dabei bezeichnet  $\mu$  das chemische Potential, also die Energie, die benötigt wird, um ein Teilchen dem System hinzuzufügen. Betrachtet man eindimensionale, freie Teilchen, reduziert sich die GPG zu

$$\Psi(x) = \frac{1}{\mu} \left[ -\frac{\partial^2}{\partial x^2} - g|\Psi(x)|^2 \right] \Psi(x). \quad (4.6)$$

Eine Lösung, die als „heller“ Soliton bezeichnet wird lautet [17]

$$\Psi(x) = \sqrt{-2\mu} \operatorname{sech}(\sqrt{-g\mu}x). \quad (4.7)$$

Diese Lösung ist in Abbildung 4.1 dargestellt. Im Nichtlinearen lässt sich also für ein freies Teilchen eine stationäre Lösung finden, während im Linearen das Teilchen sofort zerfließt.

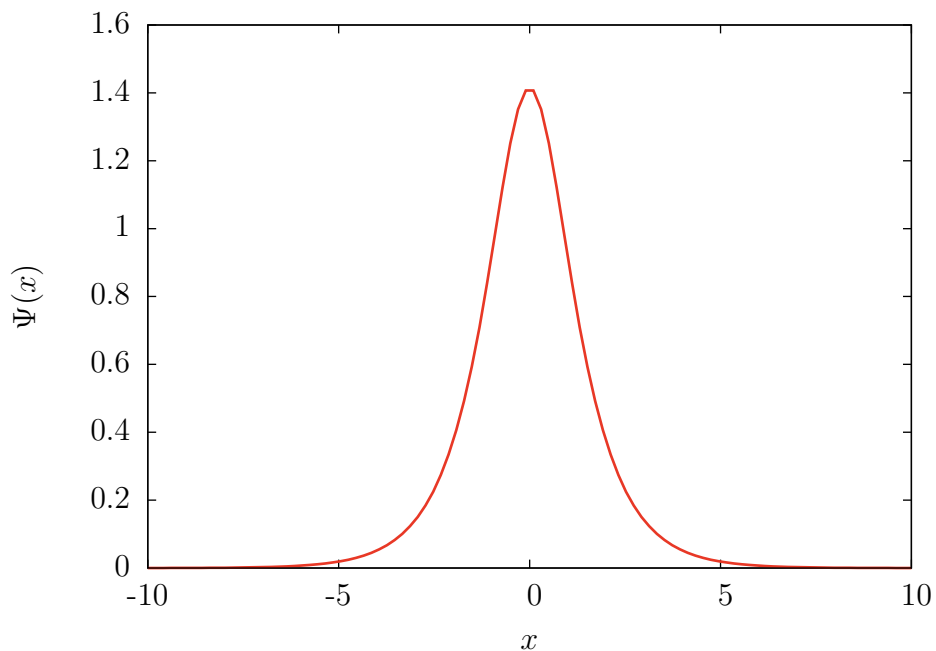


Abbildung 4.1: Lösung der GPG für ein freies Teilchen im nichtlinearen Medium. Bemerkenswert ist, dass es eine stationäre Lösung gibt, das Wellepaket also nicht zerfließt. Die verwendeten Parameter sind  $\mu = -1$ ,  $g = 1$ .

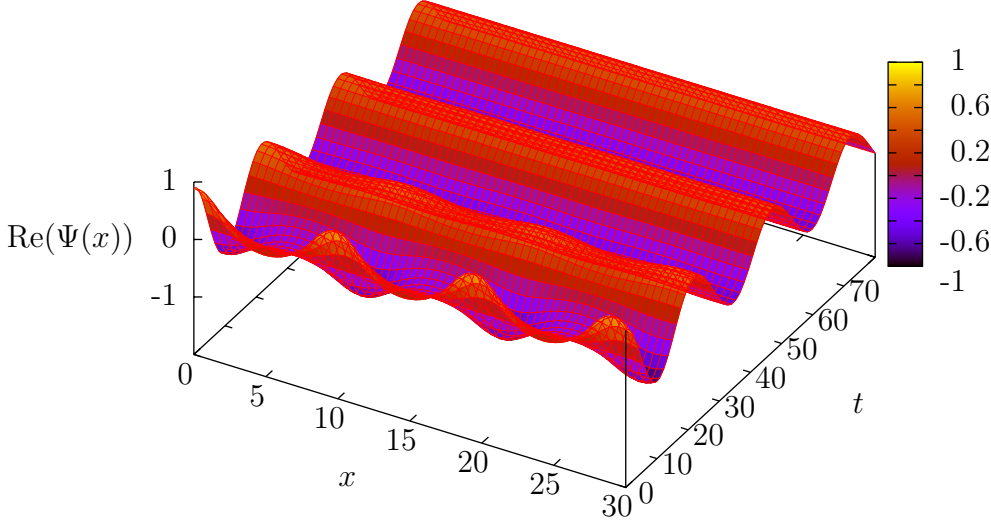


Abbildung 4.2: Eine mögliche Lösung der GPG: Ein Breather des Akhmediev-Typs. Die Parameter sind  $a = 0.5$ ,  $b = 1.3$ .

### 4.1.2 Breatherlösung der GPG

Für die GPG lassen sich ebenfalls Breatherlösungen finden. Dabei gibt es zwei unterschiedliche Kategorien: Entweder sind die Breather im Ort periodisch und in der Zeit lokalisiert (Akhmediev-Typ) [18] oder genau umgekehrt (Kuznetsov-Ma-Typ) [19]. Eine Lösung des Akhmediev-Typs lautet

$$\Psi(x, t) = \left( \frac{2b^2 \cosh(\theta) + 2ib\sqrt{2-b^2} \sinh(\theta)}{2 \cosh(\theta) - \sqrt{2}\sqrt{2-b^2} \cos(afx)} - 1 \right) a e^{ia^2 t}. \quad (4.8)$$

Dabei sind  $a$  und  $b$  Variationsparameter. Für  $b$  gilt die Bedingung  $b < \sqrt{2}$ . In Abbildung 4.2 ist die Funktion abgebildet.

## 4.2 Breather in Metamaterialien

Auch in dem System, das in dieser Arbeit untersucht wird, lassen sich Breather-Lösungen finden. In Abbildung 4.3 ist die Auslenkung der einzelnen SRR bei unterschiedlichen Zeitpunkten zu sehen. Dass die Ladungen nach einer Periode nicht exakt aufeinander liegen, liegt an der numerischen Methode zum Finden der Breather-Lösung. Man erkennt

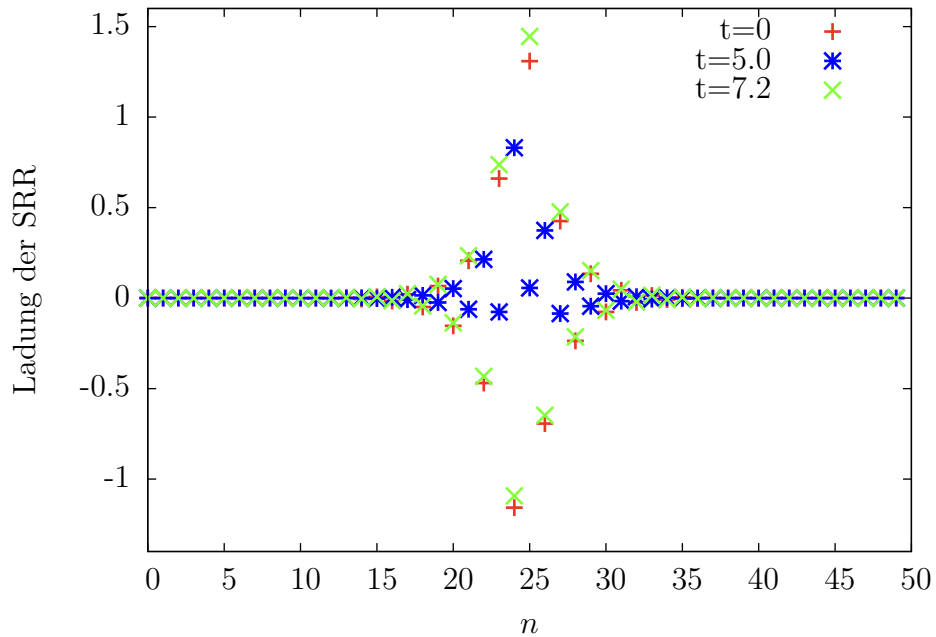


Abbildung 4.3: Breather in einem 1D-Metamaterial. Zu sehen sind die Ladungen der einzelnen SRR zu unterschiedlichen Zeiten. Die Breatherperiode beträgt  $T_B \approx 7.2$  s. Dass die Ladungen nach einer Periode nicht exakt aufeinander liegen, liegt an der numerischen Methode zum Finden der Lösungen.

an diesem Bild sehr gut die starke örtliche Lokalisation und die Oszillation mit der Zeit. Die räumliche Ausdehnung der Breather kann durch Exponential-Funktionen  $e^{\kappa x}$  oder  $e^{-\kappa x}$  beschrieben werden, wobei  $\kappa$  von der Frequenz abhängt. Dadurch kann den Breathern ebenfalls ein Äquivalent zur Wellenlänge zugeordnet werden und dadurch wiederum eine Dispersionsrelation.



## 5 Berechnen der Dispersionsrelation im linearen Fall

Im linearen Fall lässt sich analytisch die Dispersionrelation zwischen Frequenz und Wellenlänge der ebenen Wellen bestimmen. Dies wird im Folgenden kurz demonstriert.

Man betrachtet ein eindimensionales Metamaterial wie in Kapitel 3.4 vorgestellt. Dies kann vollständig beschrieben werden durch die Differentialgleichungen [12],

$$\begin{aligned} \lambda'_M \ddot{q}_{2n} + \lambda_M \ddot{q}_{2n+2} + \lambda_E q_{2n+2} + \lambda'_E q_{2n} + \ddot{q}_{2n+1} + \gamma \dot{q}_{2n+1} + \\ + q_{2n+1} + \alpha q_{2n+1}^2 + \beta q_{2n+1}^3 = \epsilon_0 \sin(\Omega\tau), \end{aligned} \quad (5.1a)$$

$$\begin{aligned} \lambda'_M \ddot{q}_{2n+1} + \lambda_M \ddot{q}_{2n-1} + \lambda_E q_{2n-1} + \lambda'_E q_{2n+1} + \ddot{q}_{2n} - \gamma \dot{q}_{2n} + \\ + q_{2n} + \alpha q_{2n}^2 + \beta q_{2n}^3 = \epsilon_0 \sin(\Omega\tau). \end{aligned} \quad (5.1b)$$

In diesen Gleichungen wurde sowohl die magnetische Wechselwirkung  $\lambda_M$ ,  $\lambda'_M$  als auch die elektrische Wechselwirkung  $\lambda_E$ ,  $\lambda'_E$  sowie ein harmonischer Treiber  $\epsilon_0 \sin(\Omega\tau)$  berücksichtigt. Wie bereits erwähnt, kann nach [9] die elektrische Kopplung vernachlässigt werden. Deshalb wird aus Gründen der Übersichtlichkeit  $\lambda'_E = \lambda_E = 0$  gesetzt und der Index der magnetischen Kopplung nicht geschrieben. Zudem wird ein ungetriebenes, lineares System betrachtet. Dies resultiert dann in Gleichung (3.9) mit  $\alpha = \beta = 0$ . Mit dem Ansatz

$$q_{2n} = A \cdot e^{i(\kappa(2n) - \Omega\tau)}, \quad (5.2a)$$

$$q_{2n+1} = B \cdot e^{i(\kappa(2n+1) - \Omega\tau)} \quad (5.2b)$$

erhält man

$$-\Omega^2 A (\lambda' e^{i(\kappa(2n) - \Omega\tau)} + \lambda e^{i(\kappa(2n+2) - \Omega\tau)}) - B (\Omega^2 + i\Omega\gamma - 1) e^{i(\kappa(2n+1) - \Omega\tau)} = 0, \quad (5.3a)$$

$$-\Omega^2 B (\lambda' e^{i(\kappa(2n+1) - \Omega\tau)} + \lambda e^{i(\kappa(2n-1) - \Omega\tau)}) - A (\Omega^2 - i\Omega\gamma - 1) e^{i(\kappa(2n) - \Omega\tau)} = 0. \quad (5.3b)$$

Beide Gleichungen werden mit  $e^{i(-\kappa 2n + \Omega\tau)}$  multipliziert und zusätzlich Gleichung (5.3a) mit  $e^{-i\kappa}$ ,

$$-\Omega^2 A (\lambda' e^{-i\kappa} + \lambda e^{i\kappa}) - B (\Omega^2 + i\Omega\gamma - 1) = 0, \quad (5.4a)$$

$$-\Omega^2 B (\lambda' e^{i\kappa} + \lambda e^{-i\kappa}) - A (\Omega^2 - i\Omega\gamma - 1) = 0. \quad (5.4b)$$

Diese Gleichungen kann man in Matrizen-Form umschreiben,

$$\begin{pmatrix} -\Omega^2 (\lambda' e^{-i\kappa} + \lambda e^{i\kappa}) & -\Omega^2 - i\Omega\gamma + 1 \\ -\Omega^2 + i\Omega\gamma + 1 & -\Omega^2 (\lambda' e^{i\kappa} + \lambda e^{-i\kappa}) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (5.5)$$

Ein Gleichungssystem ist eindeutig lösbar, wenn die Determinante der Koeffizientenmatrix ungleich Null ist. Eine eindeutige Lösung wäre in diesem Fall jedoch nur die Nulllösung ( $A = B = 0$ ), da die einzelnen Einträge der Matrix linear unabhängig sind. Somit muss gefordert werden, dass die Determinante der Matrix verschwindet. Ausmultipliziert und nach Potenzen von  $\Omega$  sortiert folgt

$$\Omega^4 (1 - \lambda'^2 - \lambda^2 - 2\lambda\lambda' \cos(2\kappa)) + \Omega^2 (\gamma^2 - 2) + 1 = 0. \quad (5.6)$$

Mit dem Additionstheorem  $\cos(2\kappa) = 2\cos^2(\kappa) - 1$  werden die Gleichungen umgeformt zu

$$\Omega^4 (1 - (\lambda - \lambda')^2 - 4\lambda\lambda' \cos^2(\kappa)) + \Omega^2 (\gamma^2 - 2) + 1 = 0. \quad (5.7)$$

Das Lösen der biquadratischen Gleichung liefert

$$\Omega_{1,2}^2 = \frac{(1 - \gamma^2/2) \pm \sqrt{\gamma^4/4 - \gamma^2 + (\lambda - \lambda')^2 + 4\lambda\lambda' \cos^2(\kappa)}}{1 - (\lambda - \lambda')^2 - 4\lambda\lambda' \cos^2(\kappa)}. \quad (5.8)$$

Da es sich um ein periodisches, diskretes System handelt, gilt für  $\kappa$  die Bedingung, dass nach  $2N$  SRR das System wieder dieselbe Amplitude im Ort haben muss. Das bedeutet, dass

$$\begin{aligned} q_{2n} = q_{2n+2N} &\iff A e^{i(\kappa 2n - \Omega\tau)} = A e^{i(\kappa 2(n+N) - 2\pi m - \Omega\tau)}, \\ &\implies \kappa n = \kappa(n + N) - \pi m \iff \kappa = \frac{\pi \cdot m}{N}. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Dabei ist  $m \in \mathbb{N}$ . Die Variable  $\kappa$  kann also die Werte  $-\pi \leq \kappa \leq \pi$  annehmen.

In Abbildung 5.1 ist die positive Wurzel aus Gleichung (5.8) aufgetragen. Dabei ist der obere Ast die Plus-Lösung, der untere Ast die Minus-Lösung. Die benutzten Werte sind  $\gamma = 0.002$ ,  $\lambda = -0.1$ , sowie  $\lambda' = -0.17$  beziehungsweise  $\lambda' = -0.12$ . Die Schaubilder stimmen mit denen aus der Arbeit von Tsironis et al. [12] überein. Gleichung (5.8) stimmt jedoch nicht mit der von ihnen herausgefundenen überein. Es scheint, als sei die Gleichung in der Referenz falsch, da S. Erfort [20] das Ergebnis (5.8) in seiner Arbeit ebenfalls bestätigen konnte.

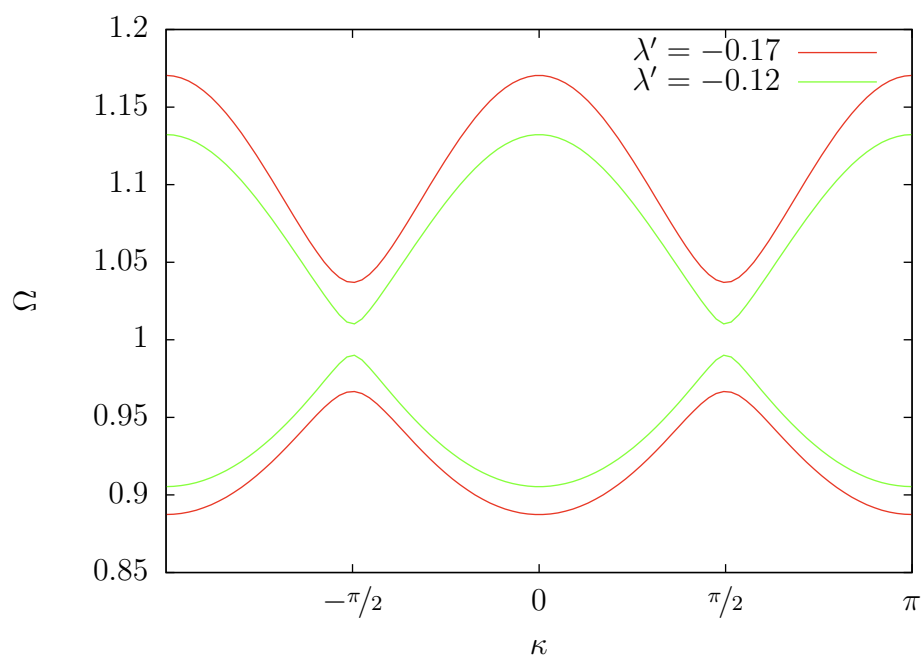


Abbildung 5.1: Dispersionsrelation eines 1D-Metamaterials im linearen, ungetriebenen Fall mit den Werten  $\gamma = 0.002$  und  $\lambda = -0.1$



# 6 Näherungen für Breather: Dispersionsrelation im Nichtlinearen

Das Ziel dieser Arbeit ist es, eine Näherung für Breather bei schwachen Nichtlinearitäten zu finden. Dabei gibt es verschiedene Möglichkeiten, an die Näherung heranzugehen. Es stellt sich die Frage, ob es möglich ist, die Dispersionsrelation von ebenen Wellen für den nichtlinearen Fall zu nähern und diese Näherung zu benutzen, um Aussagen über Breather treffen zu können. Dies impliziert die Annahme, dass es einen Übergang von ebenen Wellen zu Breather und anders herum geben könnte. Im Folgenden wird dieser Frage nachgegangen.

## 6.1 Näherungslösung für ebene Wellen im Nichtlinearen

Im Linearen wurde, um die Dispersionsrelation zu berechnen, ein Ansatz aus ebenen Wellen gewählt. Aus der Arbeit von Tsironis et al. [12] ist bekannt, dass in diesem System im nichtlinearen Bereich Breatherlösungen existieren. Für diese will man, ebenso wie für die ebenen Wellen im Linearen, ein genähertes Frequenzspektrum finden. Um dies zu erreichen, geht man davon aus, dass es einen kontinuierlichen Übergang von ebenen Wellen zu Breatherlösungen gibt und man deshalb mit einem Ansatz aus ebenen Wellen auch eine Aussage über das Frequenzspektrum von Breathern treffen kann. Deshalb wird im Folgenden versucht, für die nichtlineare Differentialgleichung (3.9) durch sinnvolle Näherungen eine Dispersionsrelation für ebene Wellen zu berechnen. Dazu setzt man den Ansatz (5.2) in die Differentialgleichungen (3.9) ein und erhält

$$-\Omega^2 A (\lambda' e^{i(\kappa(2n)-\Omega\tau)} + \lambda e^{i(\kappa(2n+2)-\Omega\tau)}) - B (\Omega^2 + i\Omega\gamma - 1) e^{i(\kappa(2n+1)-\Omega\tau)} + B^2 e^{i(\kappa 2(2n+1)-2\Omega\tau)} + B^3 e^{i(\kappa 3(2n+1)-3\Omega\tau)} = 0, \quad (6.1a)$$

$$-\Omega^2 B (\lambda' e^{i(\kappa(2n+1)-\Omega\tau)} + \lambda e^{i(\kappa(2n-1)-\Omega\tau)}) - A (\Omega^2 - i\Omega\gamma - 1) e^{i(\kappa(2n)-\Omega\tau)} + A^2 e^{i(\kappa 2(2n)-2\Omega\tau)} + A^3 e^{i(\kappa 3(2n)-3\Omega\tau)} = 0. \quad (6.1b)$$

Es ist ersichtlich, dass man die Zeit- und Ortsabhängigkeit nicht mehr, wie es im linearen Fall möglich war, kürzen kann. Um dennoch eine analytische Lösung berechnen zu können, werden die Gleichungen (3.9) durch die Näherung

$$q_n^2 = |q_n|q_n, \quad q_n^3 = |q_n|^2 q_n \quad (6.2)$$

linearisiert. Die Rechtfertigung dieser Näherung liegt darin begründet, dass durch die Nichtlinearität die Ladungen mindestens doppelt so schnell wie im linearen Fall oszillieren und das System dadurch im Zeitmittel nur die Amplitude sieht. Die Differentialgleichungen (6.1) werden dann mit dem Ansatz (5.2) zu

$$-\Omega^2 A (\lambda' e^{-i\kappa} + \lambda e^{i\kappa}) + B (-\Omega^2 - i\Omega\gamma + 1 + \alpha|B| + \beta|B|^2) = 0, \quad (6.3a)$$

$$-\Omega^2 B (\lambda' e^{i\kappa} + \lambda e^{-i\kappa}) + A (-\Omega^2 + i\Omega\gamma + 1 + \alpha|A| + \beta|A|^2) = 0. \quad (6.3b)$$

Im Gegensatz zum linearen Fall ist es aufgrund der quadratisch und kubisch vorkommenden Koeffizienten nicht mehr möglich, die Gleichungen in einer Matrix zusammenzufassen und dadurch nichttriviale Lösungen zu fordern. Die Gleichungen sind jetzt sogar unterbestimmt, da  $A$  und  $B$  ebenso Variablen sind. Um eine Lösung zu finden, ist es notwendig, Annahmen über die Form der Lösung zu treffen und zusätzliche Bedingungen zu schaffen. Ein naheliegender Gedanke ist es, die Amplituden  $A$  und  $B$  in Beziehung miteinander zu setzen. Es ist sinnvoll, zu fordern, dass

1.  $A$  und  $B$  mit einer relativen Phase verknüpft sind, da eine globale Phase (6.3) invariant lässt und
2. ihre Beträge voneinander abhängen, da man Lösungen mit einer vorgegebenen Gesamtintensität sucht.

Diese Forderungen führen zu

$$A = \cos \alpha' M, \quad B = \sin \alpha' M e^{i\varphi}, \quad (6.4)$$

wobei  $\alpha'$  für die Verschiebung der Beträge verantwortlich ist und  $\varphi$  die Phase zwischen den Amplituden festlegt. Mit dieser Definition von  $A$  und  $B$  kann man nach

$$|A|^2 + |B|^2 = M^2 \quad (6.5)$$

über  $M$  die Gesamtintensität der Amplituden eines Dimers festlegen und diese dann auf die Koeffizienten  $A$  und  $B$  verteilen. Doch selbst mit diesen Annahmen sind die Gleichungen nicht mehr analytisch, beziehungsweise falls doch, nur mit unverhältnismäßig großem Aufwand lösbar, weshalb auf eine numerische Nullstellensuche zurückgegriffen wird. Die Annahmen, die man über die Amplituden getroffen hat, haben nun den Vorteil, dass schon eine grobe Lösungsstruktur vorgegeben ist und die Numerik dadurch leichter Lösungen findet, anstatt die Nullstellensuche die Lösung komplett alleine bestimmen zu lassen. Ein Weg, die Gleichungen numerisch zu lösen, ist, eine komplexe Lösung für  $\Omega$  zuzulassen. Da man bei beiden Gleichungen den Real- und Imaginärteil getrennt betrachten kann, erhält man vier Gleichungen und kann die vier Unbekannten, nämlich  $\text{Re}(\Omega)$ ,  $\text{Im}(\Omega)$ ,  $\alpha'$  und  $\varphi$  bestimmen.

Aufgrund der Symmetrie des Systems mit „balanced gain and loss“ und der daraus resultierenden Anwendbarkeit des Formalismus der  $\mathcal{PT}$ -symmetrischen Quantenmechanik

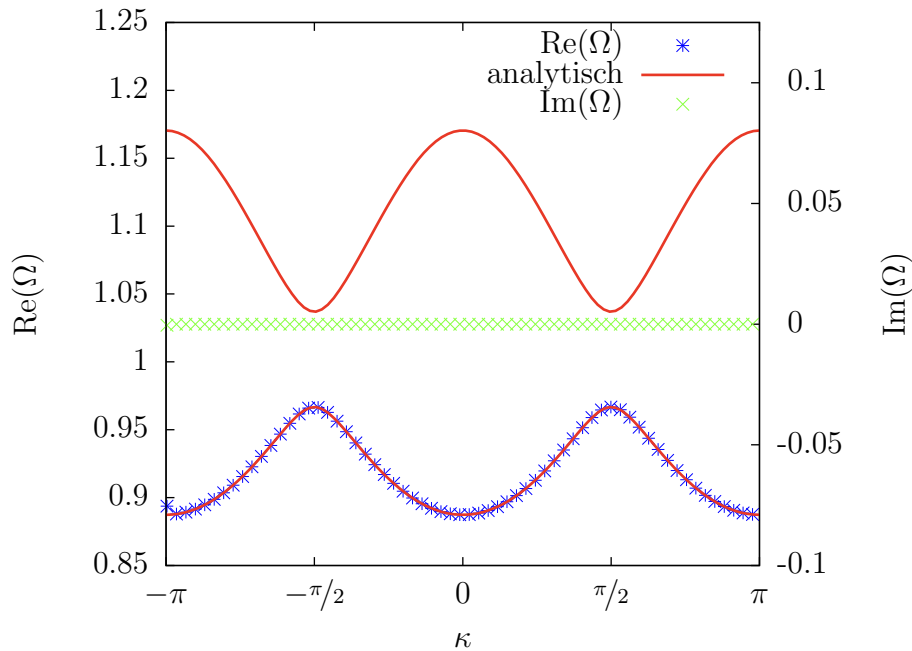
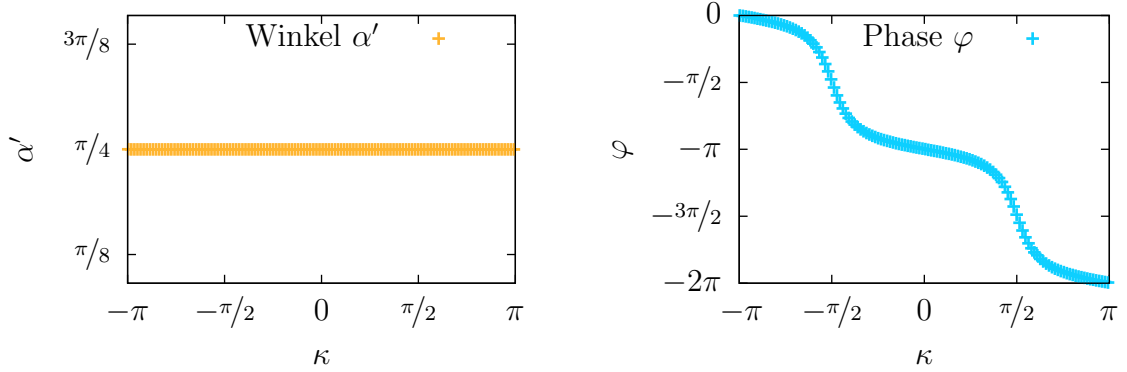


Abbildung 6.1: Ergebnis der Berechnung der Dispersionsrelation mit einer 4-dimensionalen Nullstellensuche im Vergleich zur analytischen Lösung. Die Übereinstimmung ist deutlich zu sehen. Der Imaginärteil bezieht sich dabei auf die Skala am rechten Rand, er ist also gleich Null. Die Parameter sind  $\alpha = 0$ ,  $\beta = 0$ ,  $\gamma = 0.002$ ,  $\lambda = -0.17$ ,  $\lambda' = -0.1$ .

erwartet man, dass man  $\mathcal{PT}$ -symmetrische Lösungen findet, für die der komplexe Anteil der Gleichungen Null ist, da dies sonst einem  $\mathcal{PT}$ -Bruch entsprechen würde. Es stellt sich heraus, dass die Nullstellensuche große Probleme hat, mit diesen vier Freiheitsgraden eine Lösung zu finden. Selbst im linearen Fall bricht sie bei manchen  $\kappa$  ab, ohne eine Lösung gefunden zu haben. Zudem ist es nicht möglich, die analytische Plus-Lösung aus Gleichung (5.8) zu finden, sondern immer nur die Minus-Lösung. Die Ergebnisse der Nullstellensuche sind in den Abbildungen 6.1 und 6.2 dargestellt.

In Abbildung 6.1 sind die numerischen Ergebnisse für  $\Omega$  im linearen Fall im Vergleich zur analytischen Lösung aufgetragen. Es ist deutlich zu sehen, dass die numerische Lösung des Realteils von  $\Omega$  mit der analytischen Lösung übereinstimmt. Der Imaginärteil der numerischen Lösung bezieht sich auf die rechte Skala und ist immer gleich Null, was der Erwartung entspricht. Somit ist die Lösung physikalisch sinnvoll und man kann sich den Ergebnissen für die Phase  $\varphi$  und den Winkel  $\alpha'$  widmen. Der Winkel  $\alpha'$  ist konstant bei  $\pi/4$ , was bedeutet, dass die Amplitude durchgehend gleichmäßig auf  $A$  und  $B$  verteilt wird, da  $\sin(\pi/4) = \cos(\pi/4) = 1/\sqrt{2}$ . Die Phase verändert sich jedoch durchgehend von 0 bis  $2\pi$ . Auch dies ist ein Ergebnis, das sinnvoll erscheint. Diese Erkenntnisse kann man nutzen, um die Freiheitsgrade des Systems zu reduzieren, und so die Dimension der



(a) Der Imaginärteil von Omega sowie  $\alpha'$  auf- (b) Phase zwischen den Amplituden in Abhängigkeit von  $\kappa$ .

Abbildung 6.2: Imaginärteil sowie der Winkel zur Verteilung der Amplitude zwischen  $A$  und  $B$  in a). Die Phase zwischen  $A$  und  $B$  in b).  $A$  und  $B$  sind dabei die Koeffizienten aus Gleichung (5.2). Die Parameter sind  $\alpha = 0$ ,  $\beta = 0$ ,  $\gamma = 0.002$ ,  $\lambda = -0.17$ ,  $\lambda' = -0.1$ .

Nullstellensuche auf zwei zu beschränken. Setzt man in Gleichung (6.3) die Ausdrücke (6.4) ein und  $\alpha' = \pi/4$ , so erhält man

$$-\Omega^2 \hat{M} (\lambda' e^{-i\kappa} + \lambda e^{i\kappa}) + \hat{M} e^{i\varphi} \left( -\Omega^2 - i\Omega\gamma + 1 + \alpha|\hat{M}| + \beta|\hat{M}|^2 \right) = 0, \quad (6.6a)$$

$$-\Omega^2 \hat{M} e^{i\varphi} (\lambda' e^{i\kappa} + \lambda e^{-i\kappa}) + \hat{M} \left( -\Omega^2 + i\Omega\gamma + 1 + \alpha|\hat{M}| + \beta|\hat{M}|^2 \right) = 0, \quad (6.6b)$$

wobei  $\hat{M} = M/\sqrt{2}$  ist. Fordert man jetzt, aufgrund der  $\mathcal{PT}$ -Symmetrie, dass  $\Omega$  reell ist, so reduziert sich (6.6) mit den Abkürzungen  $a = \Omega^2 (\lambda' e^{-i\kappa} + \lambda e^{i\kappa})$  und  $b = -\Omega^2 - i\Omega\gamma + 1 + \alpha|\hat{M}| + \beta|\hat{M}|^2$  zu

$$-a + e^{i\varphi} b = 0, \quad (6.7a)$$

$$-a^* e^{i\varphi} + b^* = 0 \iff -a e^{-i\varphi} + b = 0 \iff -a + b e^{i\varphi} = 0. \quad (6.7b)$$

Man stellt fest, dass der Ausdruck ganz rechts von (6.7b) gleich ist wie (6.7a). Das Gleichungssystem wurde also auf eine komplexe Gleichung mit zwei reellen Unbekannten reduziert, wodurch sich das System numerisch lösen lässt. In Abbildung 6.3 ist das Ergebnis der Nullstellensuche zusammen mit der analytischen Lösung abgebildet. Man sieht, dass die numerische Lösung mit der analytischen übereinstimmt. In Abbildung 6.4 sind die Lösungen der Nullstellensuche für verschiedene Nichtlinearitäten zu sehen. Dabei ist zu sehen, dass die Nichtlinearität primär eine Verschiebung nach oben verursacht, die Form jedoch gleich bleibt.



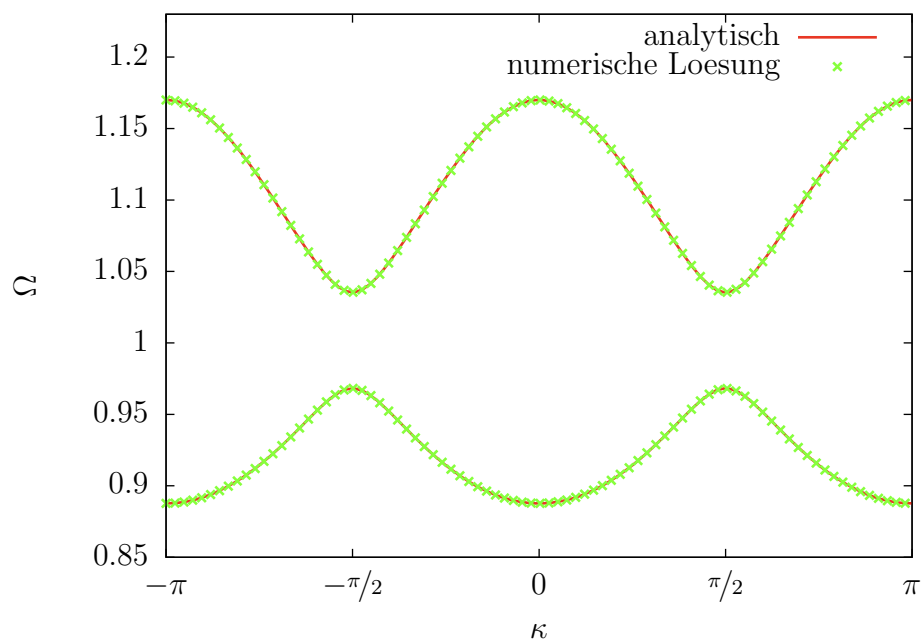


Abbildung 6.3: Vergleich der numerischen mit der analytischen Lösung für  $\Omega$ . Man sieht, dass die Lösungen übereinstimmen. Die Parameter sind  $\alpha = 0$ ,  $\beta = 0$ ,  $\gamma = 0.02$ ,  $\lambda = -0.17$ ,  $\lambda' = -0.1$ ,  $M = 1$ .

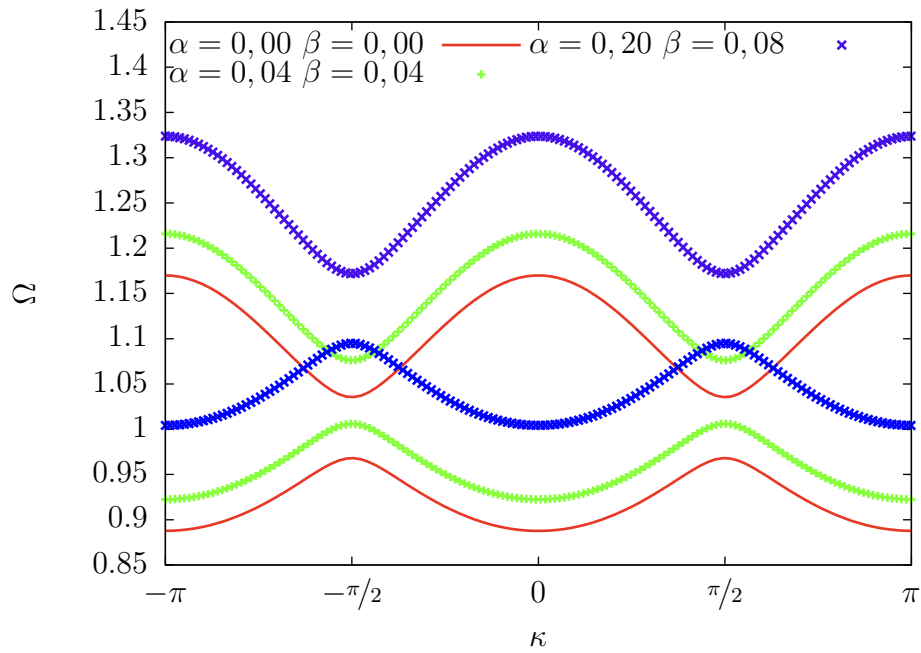


Abbildung 6.4: Lösungen der numerischen Nullstellensuche für verschiedene Nichtlinearitäten im Vergleich. Die rote, durchgezogene Linie ist die lineare, analytisch berechnete Lösung. Die Parameter sind  $\gamma = 0.02$ ,  $\lambda = -0.17$ ,  $\lambda' = -0.1$ ,  $M = 1$ .

## 6.2 Simulation des Systems zur Bestimmung der Dynamik

Um zu überprüfen, ob die Näherung sinnvoll war, wird die Dynamik des Systems für ein vorgegebenes  $\kappa$  berechnet und mithilfe einer Fourier-Transformation die Frequenz der SRR extrahiert. Um dies zu realisieren, wird ein System aus  $N$  SRR simuliert. Dazu werden die  $N$  Differentialgleichungen nach Gleichung (3.9) in eine Matrixform gebracht,

$$\begin{aligned}
 & \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & \lambda & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda' \\ \lambda & 1 & \lambda' & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda' & 1 & \lambda & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \dots & & 0 & \lambda' & 1 & \lambda \\ \lambda' & 0 & \dots & & 0 & \lambda & 1 \end{pmatrix}}_{M_1} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \\ \ddot{q}_3 \\ \vdots \\ \ddot{q}_{2N-1} \\ \ddot{q}_{2N} \end{pmatrix}}_{\ddot{\mathbf{q}}} + \\
 & + \underbrace{\begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\gamma & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & \dots & & & 0 & -\gamma \end{pmatrix}}_{M_2} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \\ \vdots \\ \dot{q}_{2N-1} \\ \dot{q}_{2N} \end{pmatrix}}_{\dot{\mathbf{q}}} + \\
 & + \mathbb{1}\mathbf{q} + \alpha\mathbb{1}\mathbf{q}^{\mathbf{p}2} + \beta\mathbb{1}\mathbf{q}^{\mathbf{p}3} = \mathbf{0}.
 \end{aligned} \tag{6.8}$$

Dabei bezeichnen  $\mathbf{q}^{\mathbf{p}2}$  beziehungsweise  $\mathbf{q}^{\mathbf{p}3}$  Vektoren, die als  $n$ -ten Eintrag  $q_n^2$ , beziehungsweise  $q_n^3$  haben,  $\mathbb{1}$  die Einheitsmatrix und  $\mathbf{0}$  den Nullvektor. Der Eintrag in der oberen rechten, beziehungsweise in der unteren linken Ecke der Matrix  $M_2$  ist notwendig für periodische Randbedingungen, welche die Kette der Oszillatoren zu einem Kreis zusammenschließen und dadurch ein quasi-unendliches System ergeben. Da der Runge-Kutta-Algorithmus nur Differentialgleichungen erster Ordnung integrieren kann, wird Gleichung (6.8) umgeschrieben zu

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \mathbf{q} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ -M_1^{-1} (M_2 \dot{\mathbf{q}} + \mathbb{1}\mathbf{q} + \alpha\mathbb{1}\mathbf{q}^{\mathbf{p}2} + \beta\mathbb{1}\mathbf{q}^{\mathbf{p}3}) \end{pmatrix}. \tag{6.9}$$

Diese Gleichung kann nun numerisch integriert werden. Es ist zu beachten, dass dabei komplexe Trajektorien zugelassen werden, da im linearen Fall und bei der genäherten Gleichung (6.3) auch mit einem komplexen Ansatz gerechnet wurde. Als Startladungsverteilung wurde ein  $\kappa$  nach Bedingung (5.9) ausgewählt, wobei  $N$  gleich der Anzahl der

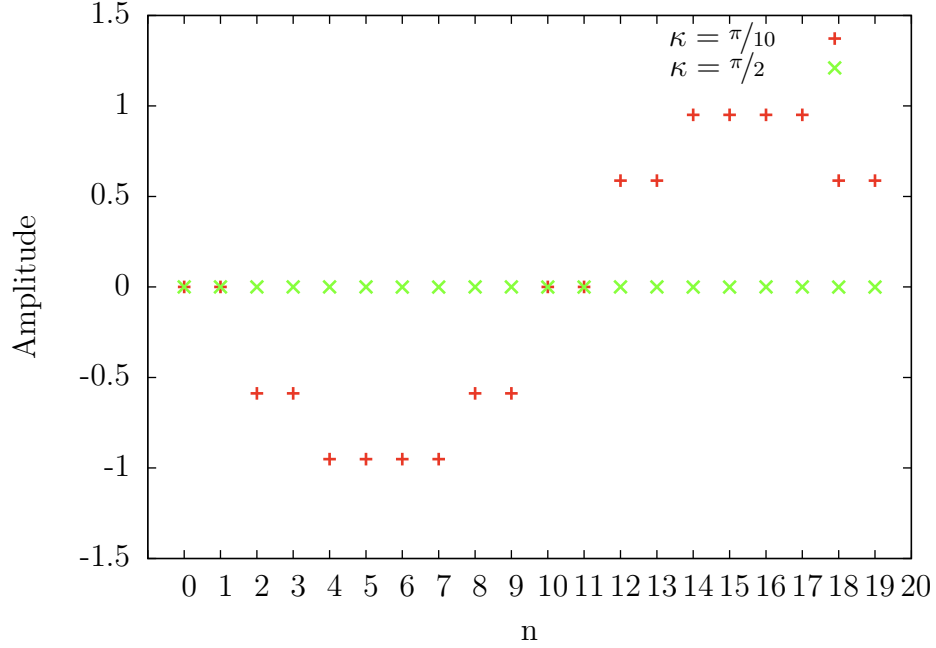
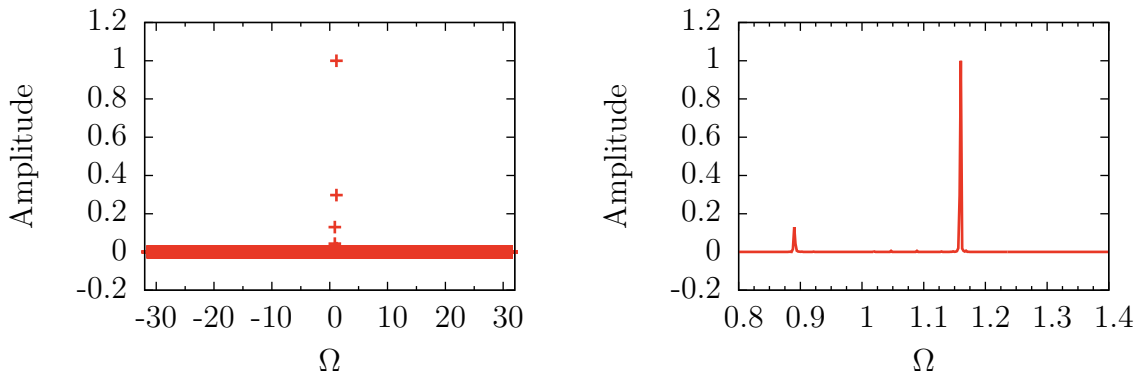


Abbildung 6.5: Startladungsverteilung auf den SRR bei verschiedenen  $\kappa$ . Die Parameter sind  $\alpha = 0.4$ ,  $\beta = 0.4$ ,  $\gamma = 0.02$ ,  $\lambda = -0.17$ ,  $\lambda' = -0.1$ ,  $M = 1$ .

Dimere des Systems gewählt wird (vergleiche Abbildung 6.5). Die Trajektorien der Oszillatoren werden mit einer diskreten Fourier-Transformation (DFT) transformiert und der größte Peak ausgelesen. Ein Beispiel für das Fourier-Spektrum eines Oszillators findet man in Abbildung 6.6. Dieses Vorgehen wird für verschiedene  $\kappa$  und Nichtlinearitäten durchgeführt. Man erhält dadurch für ein  $\kappa$  einen Wert für  $\Omega$ . Im Weiteren wird dieses  $\Omega$  als  $\Omega_{\text{DFT},e}$  bezeichnet. Des Weiteren wird, um die Genauigkeit der Methode zu überprüfen, dasselbe Vorgehen mit den genäherten Differentialgleichungen durchgeführt. Dadurch wird Gleichung (6.9) zu

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \mathbf{q} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ -M_1^{-1} (M_2 \dot{\mathbf{q}} + \mathbb{1} \mathbf{q} + \alpha \mathbb{1} |\mathbf{q}| \mathbf{q} + \beta \mathbb{1} |\mathbf{q}|^2 \mathbf{q}) \end{pmatrix}. \quad (6.10)$$

Das  $\Omega$ , welches aus dieser Methode stammt, wird im Weiteren mit  $\Omega_{\text{DFT},a}$  bezeichnet. In Abbildung 6.7 ist das Ergebnis der beschriebenen Vorgehensweise zusammen mit der analytischen, linearen Dispersionsrelation abgebildet. Man sieht deutlich, dass die Werte gut übereinstimmen. Die Methode funktioniert also prinzipiell. Der Punkt bei  $\kappa = \pi/2$  wurde nicht geplottet. Das hat folgenden Grund: Nach zwei SRR ist bei  $\kappa = \pi/2$  die Startladung wieder genau gleich. Da die Startladungsverteilung beim ersten Dimer mit Null startet (vergleiche Abbildung 6.5), sind dadurch alle SRR beim Start auf 0 gesetzt und es gibt keine beobachtbare Dynamik. Das führt zu einer Unbestimmbarkeit der Frequenzen, was eine starke Abweichung zur Folge hat. Die Werte für  $\Omega_{\text{DFT},a}$  und



(a) Das komplette Spektrum der DFT-Analyse einer Lösung der Bewegungsgleichung. (b) Der relevante Ausschnitt der DFT.

Abbildung 6.6: Fourier-Spektrum der Trajektorie des 10. Oszillators aus den numerisch integrierten Differentialgleichungen (6.9). Bild (a) zeigt das komplette Spektrum. In Bild (b) ist der Ausschnitt ungleich Null zu sehen. Aufgetragen ist das Betragsquadrat des komplexen Spektrums. Das Maximum des Spektrums ist bei  $\Omega_{\text{DFT,e}} = 1.16029$ . Die Parameter sind  $\alpha = 0.04$ ,  $\beta = 0.04$ ,  $\gamma = 0.02$ ,  $\lambda = -0.17$ ,  $\lambda' = -0.1$ ,  $M = 1$ ,  $\kappa = \pi/10$ .

$\Omega_{\text{DFT,e}}$  liegen genau aufeinander. Das liegt daran, dass im linearen Fall die Näherung noch keine Rolle spielt (vergleiche Gleichung (3.9)). In Abbildung 6.8 ist das Ergebnis für  $\alpha = 0,4$  und  $\beta = 0,4$  zu sehen. Man erkennt dabei, dass die Werte für  $\Omega_{\text{DFT,a}}$  sehr gut mit der genäherten, halbanalytischen Methode übereinstimmen, was auch zu erwarten ist, da man im linearen Fall schon gesehen hat, dass die Methode prinzipiell funktioniert. Die Werte, die aus der exakten DGL stammen, sind jedoch deutlich näher an der linearen als an der genäherten Lösung. Dieses Verhalten ist auch bei anderen Nichtlinearitäten zu beobachten, wodurch ein zufälliger Fehler ausgeschlossen werden kann.

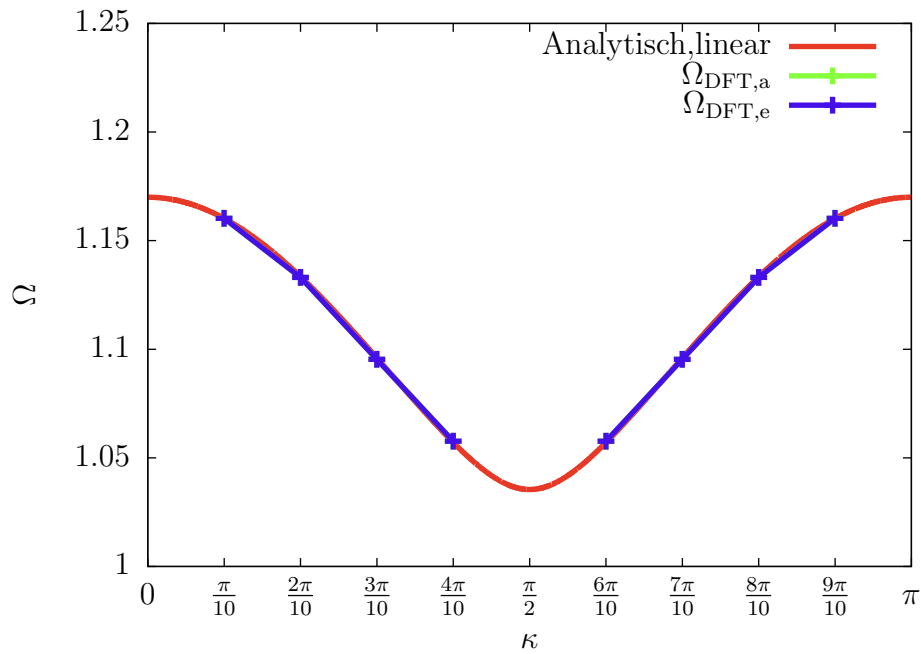


Abbildung 6.7: Vergleich der Werte von  $\Omega_{\text{DFT},a/e}$ , mit der analytischen Rechnung. Man sieht, dass die Werte gut übereinstimmen. Die Abweichung kann durch numerische Fehler erklärt werden. Die Verbindungslinien sind zur besseren Lesbarkeit der Schaubilder gedacht und haben keine physikalische Bedeutung. Die Parameter sind  $\gamma = 0.02$ ,  $\lambda = -0.17$ ,  $\lambda' = -0.1$ ,  $M = 0.5$ ,  $\alpha = 0$ ,  $\beta = 0$ .

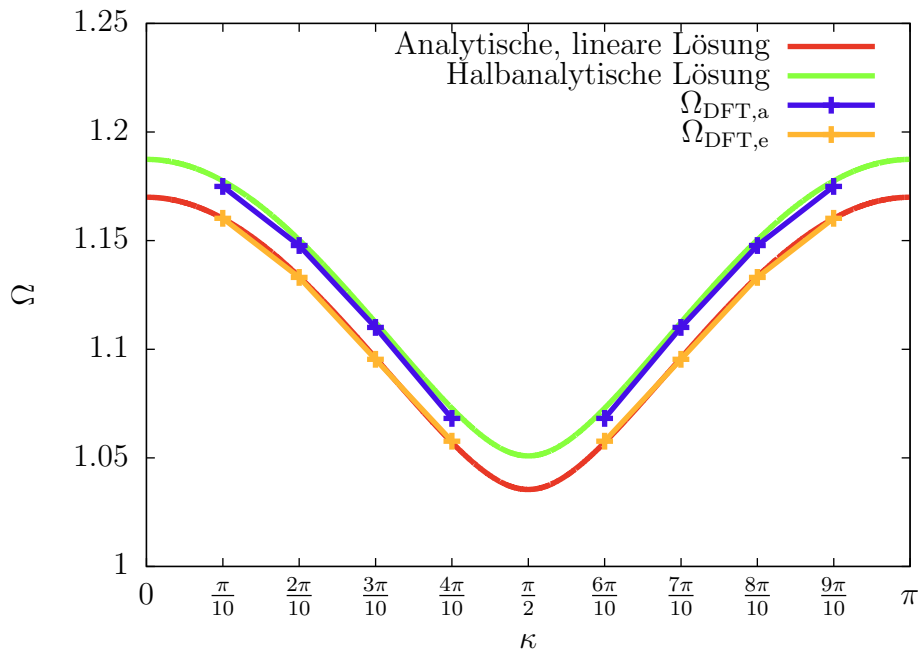


Abbildung 6.8: Vergleich der Werte von  $\Omega_{\text{DFT},a/e}$  mit der halbanalytischen Näherung. Man sieht, dass die Werte aus der genäherten DGL nah an der halbanalytischen Näherung liegen. Die Werte aus der exakten DGL liegen jedoch näher an der linearen Lösung als an der Näherung. Das spricht dafür, dass letztere nicht gut ist. Die Parameter sind  $\gamma = 0.02$ ,  $\lambda = -0.17$ ,  $\lambda' = -0.1$ ,  $M = 0.5$ ,  $\alpha = 0.04$ ,  $\beta = 0.04$ .

### 6.3 Diskussion der Näherung

In Abbildung 6.8 ist zu sehen, dass die Werte für  $\Omega$ , die mit dem Verfahren aus Abschnitt 6.2 berechnet wurden, deutlich näher an der linearen Lösung liegen als an der berechneten Näherung für die Dispersionsrelation. Auch für andere Nichtlinearitäten ergibt sich das gleiche Bild. Um eine Aussage über die Qualität der Näherung treffen zu können, wird das Verfahren aus Abschnitt 6.2 für verschiedene Nichtlinearitäten sowie für eine Amplitude von  $M = 0.5$  und  $M = 1$  durchgeführt. Damit wird anschließend die relative Abweichung von  $\Omega_{\text{DFT},e/a}$  zur berechneten Näherung bestimmt.

In Abbildung 6.9 ist die prozentuale Abweichung von  $\Omega$  relativ zu der halbanalytisch berechneten Näherung bei unterschiedlichen Nichtlinearitäten und einer Amplitude von  $M = 0.5$  abgebildet. Die Werte bei  $\kappa = \pi/2$  sind aus dem weiter oben genannten Grund nicht abgebildet. Als klare Tendenz ist zu erkennen, dass bei steigender Nichtlinearität die Abweichung der Werte von  $\Omega_{\text{DFT},e}$  zunehmen. Die Abweichung von  $\Omega$  zu den Werten von  $\Omega_{\text{DFT},a}$  bleibt hingegen im Bereich von unter 0.5 %. Ein weiterer Aspekt, der auffällt, ist, dass  $\alpha$  einen stärkeren Einfluss auf die Abweichung hat als  $\beta$ . Betrachtet man die Differentialgleichung (3.9), so erscheint dies durchaus plausibel, da die Amplitude kleiner als 1 gewählt wurde und dadurch die Nichtlinearität in höherer Potenz einen kleineren Beitrag liefert.

In Abbildung 6.10 sind die prozentualen Abweichungen von  $\Omega_{\text{DFT},e/a}$  relativ zu der halbanalytisch berechneten Näherung bei unterschiedliche Nichtlinearitäten und einer Amplitude von 1 abgebildet. Die Werte bei  $\kappa = \pi/2$  sind aus dem weiter oben genannten Grund nicht abgebildet. Wie bei einer Amplitude von 0.5 ist die Abweichung der Werte von  $\Omega_{\text{DFT},a}$  deutlich kleiner als die von  $\Omega_{\text{DFT},e}$ . Im Vergleich zu der kleineren Amplitude ist die Abweichung sogar größer.

Zusammenfassend kann man festhalten, dass die Näherung für kleine Nichtlinearitäten und Amplituden etwas besser stimmt als für große. Allerdings möchte man wie in Abschnitt 3.3 erwähnt eine Näherung für Werte von ungefähr  $\alpha = -0.4$ ,  $\beta = 0.08$  haben. In diesem Bereich wird die Näherung dann unbrauchbar. Es stellt sich nun die Frage, weshalb die Näherung so schlecht ist, beziehungsweise weshalb die Fourier-Analyse andere Ergebnisse liefert. Dafür kann man folgende Vermutungen anstellen.

Betrachtet man Gleichung (6.1), so fällt auf, dass sich nicht nur die Zeitabhängigkeit nicht mehr kürzen lässt, sondern auch die Abhängigkeit von der Position  $n$ . Somit hat die Lösung im Nichtlinearen auch eine Abhängigkeit von  $n$ . Diese wird bei der Näherung auch nicht berücksichtigt. Um diese Vermutung zu überprüfen, wird für verschiedene Nichtlinearitäten  $\Omega_{\text{DFT}}$  für alle  $n$  in einem Material bestimmt. Es zeigt sich dabei, dass die Fourier-Transformation für alle  $n$  dasselbe Ergebnis liefert und somit keine  $n$ -Abhängigkeit feststellbar ist.

Betrachtet man die Werte von  $\Omega_{\text{DFT},e}$  sieht man, dass diese nicht sehr stark von der



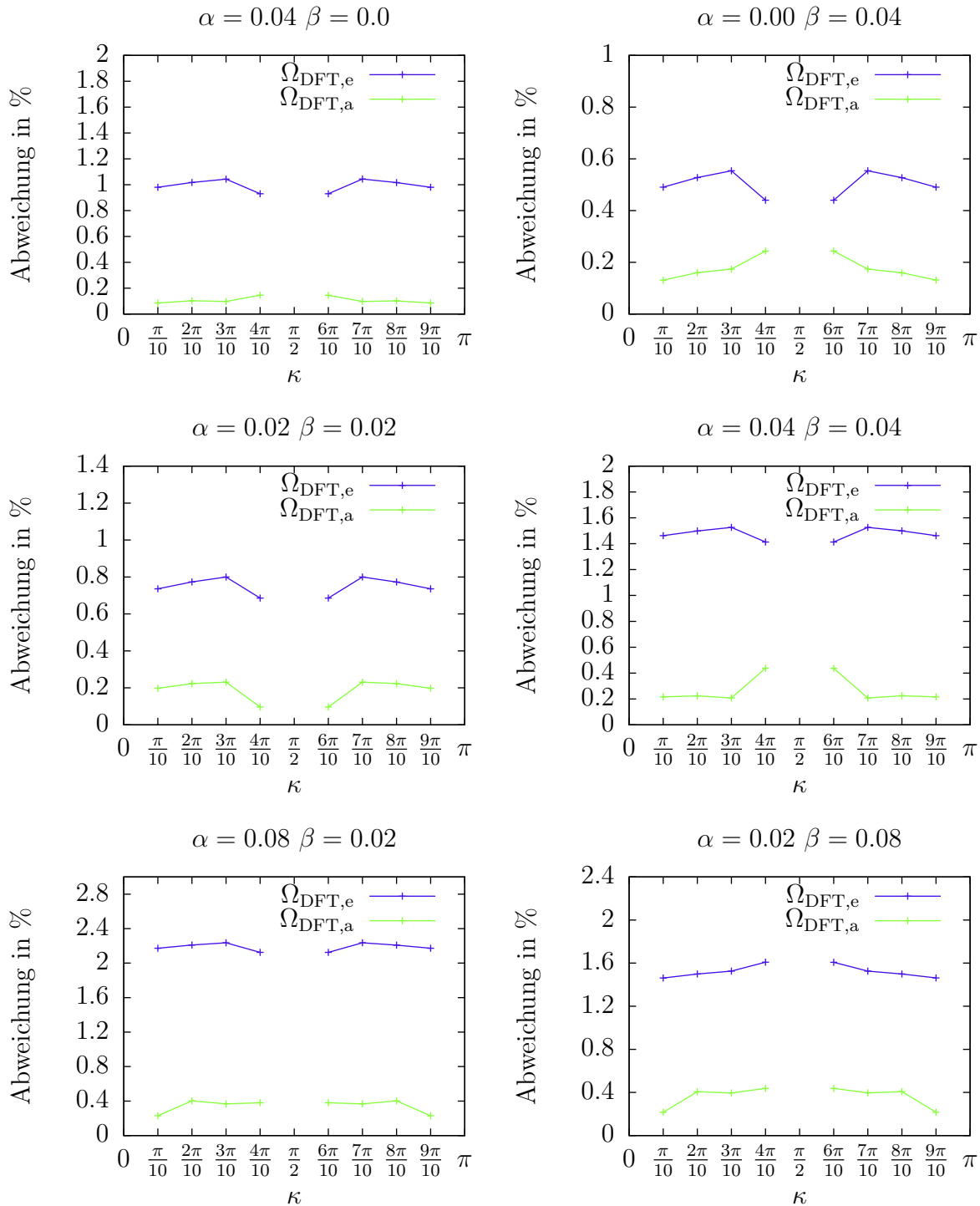


Abbildung 6.9: Abweichung in Prozent von  $\Omega_{\text{DFT},e/a}$  zu den halbanalytisch berechneten Werten der Näherung. Es ist zu erkennen, dass die Abweichung mit steigender Nichtlinearität zunimmt. Die Parameter sind  $\gamma = 0.02$ ,  $\lambda = -0.17$ ,  $\lambda' = -0.1$ ,  $M = 0.5$ .

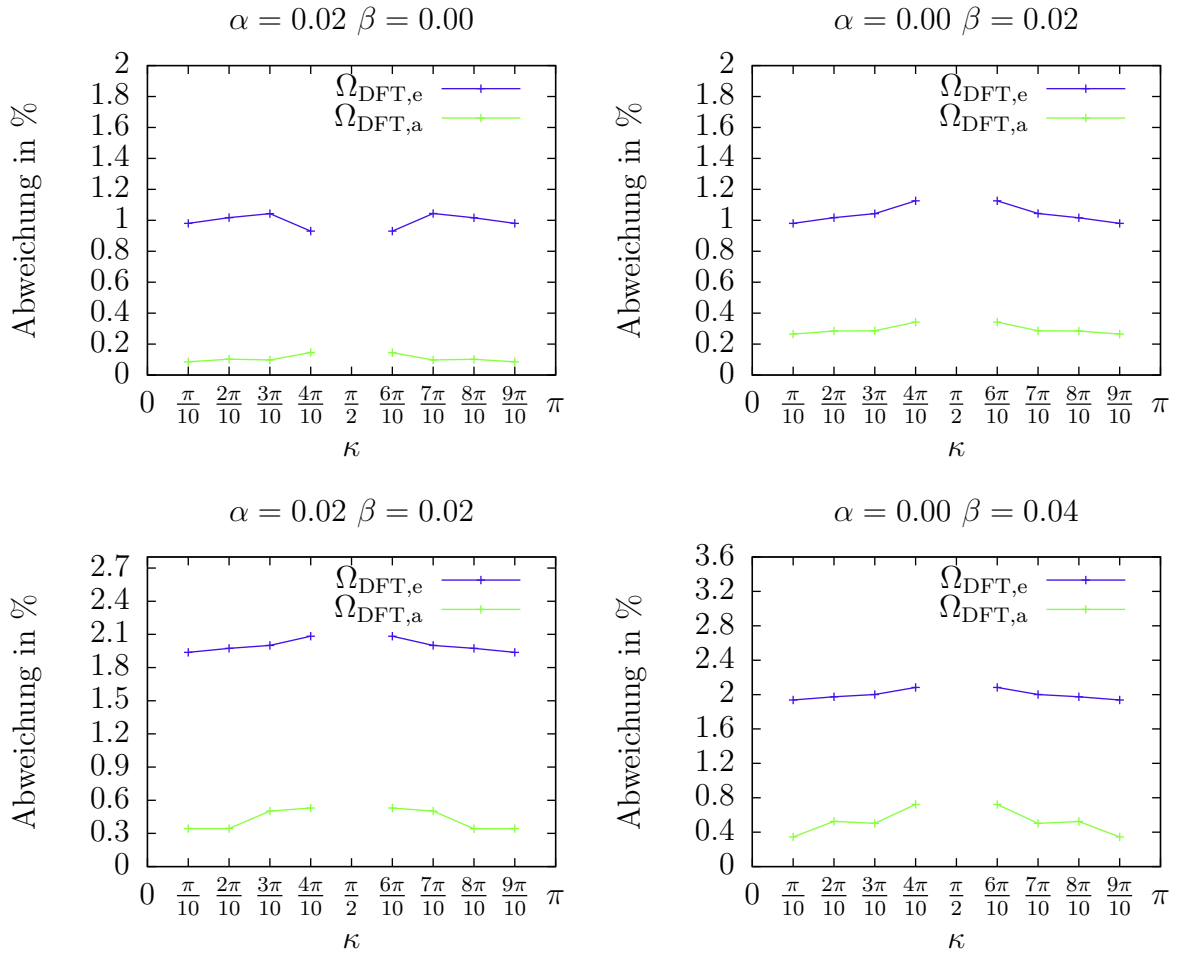


Abbildung 6.10: Prozentuale Abweichung von  $\Omega_{\text{DFT},e/a}$  zu den halbanalytisch berechneten Werten der Näherung. Es ist eine deutliche Abweichung der Werte der genäherten DGL zu den Werten der exakten DGL zu erkennen. Bei größeren Nichtlinearitäten (hier ab  $\alpha = 0.04$ ) sorgt die Näherung in der DGL dafür, dass die Lösungen numerisch instabil wird und man dadurch keine Aussage mehr treffen kann. Die Parameter sind  $\gamma = 0.02$ ,  $\lambda = -0.17$ ,  $\lambda' = -0.1$ ,  $M = 1$ .

linearen Dispersionsrelation abweichen. Die genäherte halbanalytische Lösung weicht hingegen deutlich mehr von der linearen Dispersionsrelation ab. Um diesen Punkt zu untersuchen, wird das System für einen langen Zeitraum ( $\tau = 72000$ ) simuliert und die Differenz der nichtlinearen zur linearen Lösung aufgetragen. Da letztere harmonisch ist, kann man über die Differenz die Abweichung zur Harmonizität erkennen. Es ergibt sich ein periodisches Bild, das wie eine Überlagerung von mehreren Schwingungen aussieht. Insbesondere sind mehrere sehr große einhüllende Frequenzen zu sehen. Diese werden von der Fourier-Transformation bei kürzeren Simulationszeiträumen, wie sie beim Zustandekommen der Werte für Abbildung 6.8 benutzt wurden, nicht richtig erkannt. Zudem zeigt sich, dass die Abweichung von der linearen Lösung erst sehr klein ist, was bedeutet, dass die Grundfrequenz im linearen und nichtlinearen Fall dieselbe ist wie im Nichtlinearen, aber von Frequenzen, die hauptsächlich unterhalb des linearen Bandes liegen, ergänzt werden. Da bei der Fourier-Transformation nur der größte Peak ausgelesen wird, kommt es nicht zu großen Abweichungen von der linearen Lösung.

Ein weiterer Grund könnte sein, dass die Begründung der Näherung nicht gut ist. Es bedarf einer Nichtlinearität höherer Potenz und somit einer schnelleren Oszillation, um zu argumentieren, dass das System nur die Amplitude sieht.

Da die Abweichung im Nichtlinearen offenbar sehr klein ist, stellt sich die Frage, ob die ursprüngliche Annahme, dass es einen kontinuierlichen Übergang von Breatherlösungen zu ebenen Wellen gibt, überhaupt sinnvoll ist. Dieser Punkt ist der entscheidendste, da dieser die grundsätzliche Annahme, die am Anfang des Kapitels getroffen wurde, in Frage stellt. Die Beantwortung dieser Frage ist etwas komplexer und wird deshalb in einem eigenen Kapitel behandelt.



# 7 Breather bei abnehmenden Nichtlinearitäten

Im vorherigen Kapitel wurde für ein nichtlineares System durch geschicktes Nähern mit einem Ansatz aus ebenen Wellen eine Dispersionsrelation berechnet. Das Ziel war, die Idee zu überprüfen, ob man die Dispersionsrelation nutzen kann, um mit ihr näherungsweise eine Frequenzvorhersage für Breather zu finden. Dazu wurde angenommen, dass es einen kontinuierlichen Übergang von ebenen Wellen zu Breather-Lösungen geben könnte. Auf dem Weg des vorherigen Kapitels konnte der Übergang nicht gefunden werden. Von nichtlinearen Differentialgleichungen ist jedoch bekannt, dass mehrere Lösungen unter einer Parameteränderung von einander abzweigen können. Damit ist ein Übergang damit aber noch nicht ausgeschlossen. Daher wird die Frage nun aus der entgegengesetzten Richtung angegangen. Wenn auf diesem Weg auch keine Übergänge gefunden werden können, kann man deren Existenz ausschließen. Dazu wird im nichtlinearen Fall nach Breatherlösungen gesucht. Diese benutzt man, um die Nichtlinearität langsam abzuschalten und bei der kleineren Nichtlinearität ebenfalls nach Breatherlösungen zu suchen.

## 7.1 Numerisches Vorgehen zum Auffinden von Breatherlösungen

Um Breatherlösungen numerisch zu finden, nutzt man das so genannte „Schießverfahren“ [21]. Dieses beschreibt ein numerisches Vorgehen zum Lösen von Differentialgleichungen mit Randbedingungen durch die Zurückführung auf ein Anfangswertproblem. Die zu lösende Differentialgleichung ist in diesem Fall Gleichung (3.9), welche in der numerisch integrierbaren Form aus Gleichung (6.9) vorliegt. Die Randbedingung, die es zu erfüllen gilt, ist die Breatherbedingung (4.1). Das bedeutet, man sucht eine Startladungsverteilung, bei der die Ladungsverteilung nach der Zeit  $T_B$  wieder dieselben Werte annimmt. Dazu wird in folgenden Schritten vorgegangen:

1. Die Differentialgleichung (6.9) wird über einen Zeitraum von  $\tau = 300$  integriert. Danach wird über eine Fourier-Analyse die Frequenz der Oszillatoren und damit die Periodendauer  $T_B$  berechnet.
2. Mithilfe einer hochdimensionalen Nullstellensuche wird nun die Startladungsver-

teilung variiert, sodass die Breatherbedingung (4.1) erfüllt ist.

Die Nullstellensuche benötigt zum Finden der Lösung einen Startwert, der nicht sehr weit von den Nullstellen entfernt ist. Man wählt deshalb einen Parametersatz des Systems, für den eine Lösung bekannt ist, und verändert diesen nur leicht. Dabei wird davon ausgegangen, dass sich die Lösung bei kleiner Variation des Parameters auch nur um kleine Beträge ändert. In diesem Fall ist der zu variierenden Parameter die Kopplung  $\lambda'$  zwischen den Dimeren. Dies resultiert in einer Schleife um die Schritte 1 und 2, in der bei jedem Schritt die Kopplungsstärke erhöht wird. Die Nullstellensuche bekommt in jedem Schritt als Anfangswert die Lösung des vorherigen Schrittes.

## 7.2 Überprüfen der Existenz von Breatherlösungen bei kleiner werdenden Nichtlinearitäten

Die Systemgröße wird mit  $N = 50$  SRR gewählt, wobei jeweils die ersten und die letzten 10 SRR ausschließlich mit verlustbehaftetem (positiven)  $\gamma$  gewählt werden. Dies hat sich als sinnvoll herausgestellt, um überschüssige Energie abzuführen und das System zu stabilisieren (vergleiche [12]). Als Startladungs- und Stromverteilung wählt man

$$q_n(0) = (-1)^{n-1} \operatorname{sech} \left( \frac{n - (N-1)/2}{2} \right), \quad \dot{q}_n = 0 \quad \forall n. \quad (7.1)$$

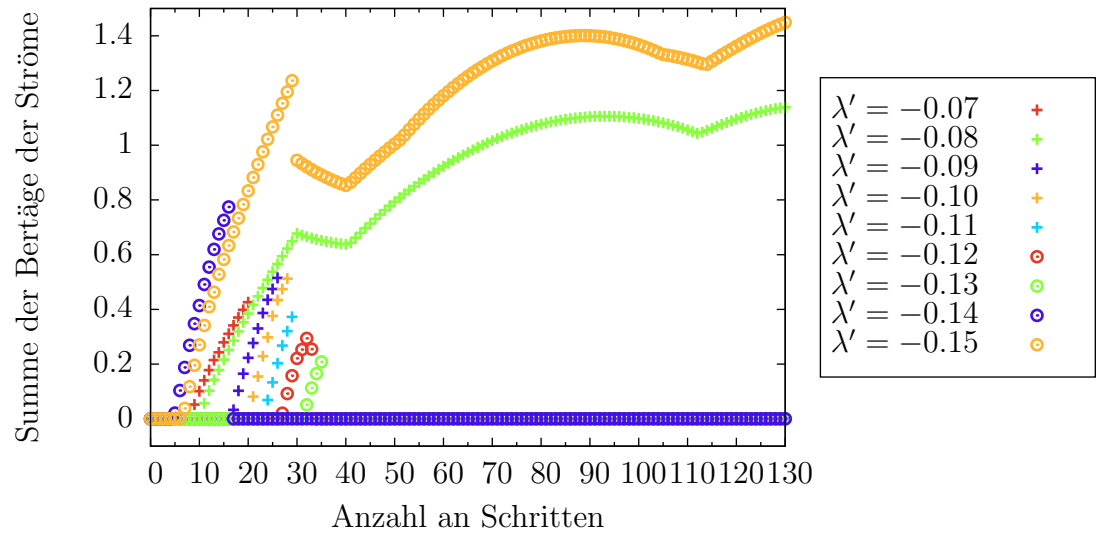
Mit den gefundenen Lösungen wird jetzt wieder dasselbe Verfahren durchgeführt, aber mit dem Unterschied, dass der veränderte Parameter jetzt nicht die Kopplung, die größer, sondern die Nichtlinearität, die kleiner wird, ist. In diesem Fall wird als Funktion für die Nullstellensuche nicht die Differenz der Ladungen, sondern die der Ströme nach einer Periode benutzt. Da die Startwerte für die Ströme auf den SRR gleich Null war, reicht es, der Nullstellensuche den momentanen Wert als zu lösenden Funktion zu übergeben. Sobald die Nullstellensuche keine Lösungen mehr findet, kann man davon ausgehen, dass die Nichtlinearität zu klein ist, als dass noch Breather existieren könnten. Dieses Vorgehen wird für verschiedene Werte von  $\lambda$  sowie  $\lambda'$  durchgeführt. Um zu überprüfen, ob die Nullstellensuche erfolgreich war, wird nach jedem Schritt die Summe der Beträge aller Ströme auf den einzelnen SRR nach einer Periode gespeichert und über der Anzahl an Schritten aufgetragen.

Das Ergebnis ist für  $\lambda = -0.17$  in Abbildung 7.1 zu sehen. Sobald die Summe einen Wert ungleich Null annimmt, findet die Nullstellensuche keine Anfangsbedingung mehr für eine Breatherlösung. Bei den kantenförmigen Abfällen springt die Nullstellensuche auf die triviale Nulllösung, bei der jeder SRR eine Startladung von Null trägt. An den Daten ist zu erkennen, dass die Anzahl der Schritte, in denen die Nichtlinearität verringert werden kann bis keine Lösung mehr gefunden wird, für betragsmäßig größer werdende

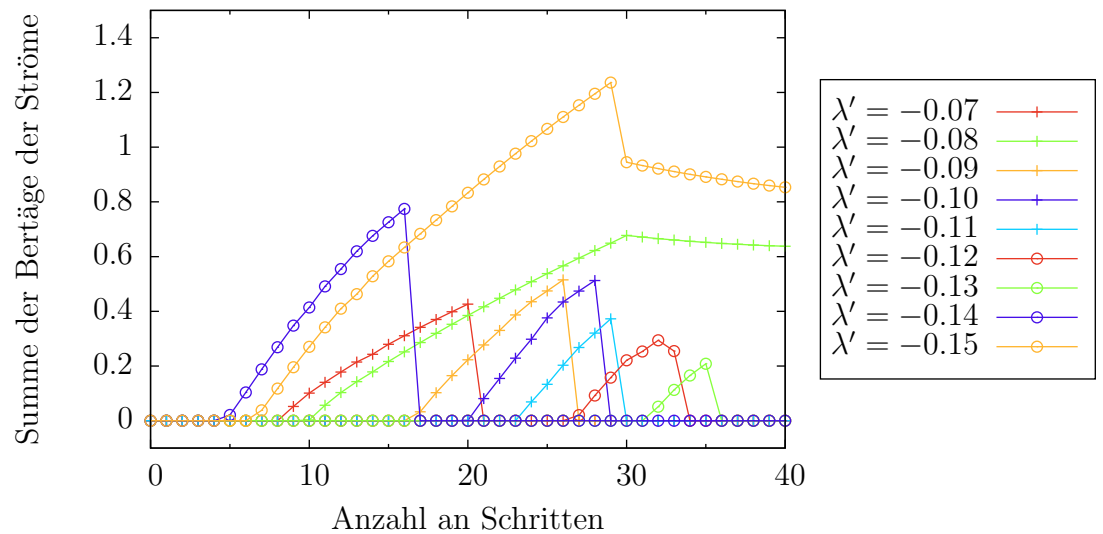
## 7.2 Überprüfen der Existenz von Breatherlösungen bei kleiner werdenden Nichtlinearitäten

---

$\lambda'$  bis zu  $\lambda' = -0.13$  immer ansteigt. Dann gibt es ab  $\lambda' = -0.14$  einen Sprung, ab dem die Nullstellensuche früher zusammenbricht. Danach wird die Schrittzahl wieder größer. Das gleiche Vorgehen wird auch für  $\lambda = -0.2$  durchgeführt und es ergibt sich ein äquivalentes Bild. Die physikalische Aussage dieser Erkenntnisse ist, dass die Breather nur bis zu einer bestimmten Nichtlinearität existieren. Danach ist es nicht mehr möglich, eine Startladungsverteilung zu finden, die die Breatherbedingung (4.1) erfüllt. Zusammenfassend ist das Ergebnis dieser Untersuchung, dass für eine Breatherlösung eine bestimmte Nichtlinearität vorhanden sein muss. Ist die Nichtlinearität zu gering, existieren Breather nicht mehr. Die ursprüngliche Annahme aus Kapitel 6.1 ist also nicht sinnvoll.



(a) Alle Schritte der Schleife.



(b) Interessanter Bereich der Schritte. Die Linien sind nur zur besseren Lesbarkeit gedacht und haben keine physikalische Bedeutung.

Abbildung 7.1: Die Summe der Beträge der Ströme über der Anzahl der Schritte. Die Parameter  $\alpha$  und  $\beta$  werden in 130 äquidistanten Schritten bis auf 0 verkleinert. Die restlichen Parameter sind  $\gamma = 0.02$ ,  $\lambda = -0.17$ . Die Nullstellensuche hat immer dann sinnvolle Startwerte gefunden, wenn die Summe 0 beträgt. Sobald die Summe das erste Mal ungleich Null ist, wurde keine Lösung mehr gefunden. Der scharfkantige Abfall der Summe auf Null bedeutet, dass die Nullstellensuche die triviale Nulllösung findet, dass also alle SRR mit der Ladung 0 starten.



# 8 Modellsystem zum besseren Verständnis von Breather

## 8.1 Einführung des Modells

Nimmt man ein einfaches, diskretes System von gekoppelten Oszillatoren an, so kann man mit diesem viele wichtige Erkenntnisse über das Verhalten der Breather gewinnen. Das Modellsystem stammt dabei aus [22]. In einem kontinuierlichen System lautet die Dispersionsrelation  $\omega = c \cdot \kappa$ , wobei  $c$  die Ausbreitungsgeschwindigkeit beschreibt. Es existiert also für jedes  $\kappa$  ein  $\omega$ . Betrachtet man hingegen ein diskretes, aus äquidistanten, gleichen gekoppelten Oszillatoren aufgebautes System, erhält man ein anderes Ergebnis. Die Oszillatoren werden beschrieben durch

$$\ddot{q}_n = q_{n+1} - 2q_n + q_{n-1}. \quad (8.1)$$

Mit einem Ansatz aus ebenen Wellen (vergleiche (5.2)) erhält man die Dispersionrelation

$$\Omega^2 = 4 \sin^2 \left( \frac{\kappa}{2} \right). \quad (8.2)$$

Die Werte von  $\kappa$  können aufgrund des diskreten Gitters nur Werte zwischen  $-\pi$  und  $\pi$  annehmen (vergleiche (5.9)). Dies ist der Unterschied zu kontinuierlichen Systemen. Die Dispersionsrelation hat bei  $\pi$  ein Maximum  $\Omega_{\max} = 2$ . Eine ebene Welle kann also nur unterhalb der Grenzfrequenz von  $\Omega_{\max} = 2$  existieren. Benutzt man für das System keinen Ansatz aus ebenen Wellen, sondern

$$q_n = u_n e^{i\Omega\tau} \text{ mit } u_n = A \cdot r^n, \quad (8.3)$$

also eine Schwingung mit variierender Amplitude, wie sie am Rand einer Breatherlösung vorkommt, erhält man

$$r^2 - (2 - \Omega^2) r + 1 = 0. \quad (8.4)$$

Diese Gleichung hat die Lösungen

$$r_{+,-} = 1 - \frac{\Omega}{2} \left( \Omega \pm \sqrt{\Omega^2 - 4} \right). \quad (8.5)$$

Treibt man zum Beispiel den ersten Oszillator im System mit einer Frequenz  $q_0 = Ae^{i\Omega\tau}$ , kann man auch Frequenzen außerhalb des linearen Bandes erreichen. Nun muss man zwei Fälle für die Lösung unterscheiden:

1.  $0 \leq \Omega \leq \Omega_{\max}$ ,
2.  $\Omega > \Omega_{\max}$ .

Im ersten Fall liegt  $\Omega$  im Bereich des linearen Bandes. Die Diskriminante ist kleiner als 0. Die Lösung wird somit komplex und kann dargestellt werden als

$$r = A \cdot e^{\pm i\kappa} \text{ mit } \kappa = \arctan\left(\frac{\text{Im}(r)}{\text{Re}(r)}\right) = \arctan\left(\frac{\frac{\Omega}{2}\sqrt{\Omega^2 - 4}}{1 - \frac{\Omega^2}{2}}\right), \quad (8.6)$$

$$\Rightarrow u_n = A \cdot e^{\pm i\kappa n}, \quad (8.7)$$

$$\Rightarrow q_n = A \cdot e^{i(\Omega\tau \pm \kappa n)}. \quad (8.8)$$

Das ist die bereits bekannte Lösung der ebenen Wellen.

Im zweiten Fall wird  $r$  reell. Die Plus-Lösung liegt für negative  $\Omega$  zwischen 0 und  $-1$  und ist für positive Frequenzen immer kleiner als  $-1$ . Negative Frequenzen ergeben physikalisch keinen neuen Fall. Eine Lösung kleiner als  $-1$  ist auch nicht verwertbar, da  $u_n$  für  $n \rightarrow \infty$  sonst divergiert. Bei der negativen Lösung verhält es sich genau anders herum. Für positive Frequenzen gilt für  $r$ :  $-1 < r < 0$ . Also gibt nur die Minus-Lösung bei positiven Frequenzen sinnvolle Ergebnisse. Man erhält damit

$$q_n = Ar^n e^{i\Omega\tau}. \quad (8.9)$$

Führt man jetzt eine Konstante  $\kappa = \ln(-r)$  ein, lässt sich die Lösung umschreiben zu

$$q_n = Ae^{i\Omega\tau + \kappa n}. \quad (8.10)$$

Da  $-r$  immer kleiner 1 ist, wird  $\kappa$  immer negativ und der ortsabhängige Teil der Lösung fällt exponentiell ab, wenn man sich von dem getriebenen Oszillator entfernt. Diese Lösung existiert für alle  $\Omega$ , die außerhalb des linearen Bandes liegen. Dieses  $\Omega$  kann aber in einem linear antwortenden System nicht erreicht werden. Dies ist nur möglich, wenn man von außen künstlich mit einer höheren Frequenz treibt. Um einen stabilen Breather zu bekommen, werden also Frequenzen außerhalb des linearen Bandes angeregt. Die Nichtlinearität ist nötig, um diese Frequenzen zu erreichen.

Zusammengefasst bedeutet das, dass durch das diskrete Gitter eine obere Grenze für die Frequenz im Linearen existiert und dadurch ein verbotenes Band. Erst durch die Nichtlinearität können Frequenzen in diesem verbotenen Band angeregt werden. Dadurch ergibt sich eine reelle räumliche Amplitudenverteilung, die dafür sorgt, dass die Breather in ihrer Form stabil sind.

Diese Erkenntnis bestätigt das Ergebnis aus dem vorherigen Kapitel. Die ebenen Wellen können nur Frequenzen innerhalb des linearen Bandes annehmen. Ein kontinuierlichen Übergang von ebenen Wellen zu Breather ist also definitiv nicht möglich, da bei einer ebenen Wellenlösung die Frequenz im linearen Band liegt und die Amplitude nicht ausreicht, um Frequenzen außerhalb des linearen Bandes anzuregen. Zusammen mit dem Ergebnis aus Kapitel 7 liegt die Vermutung nahe, dass auch kein kontinuierlicher Übergang von Breather zu ebenen Wellen existiert. In Kapitel 7 hat man gesehen, dass die Nullstellensuche die Form der Breather nicht verändert und diese abrupt abbrechen. Dieses Modell legt jedoch nahe, dass die Breather, um ihre Frequenz zu ändern, ihre Form ändern müssen. Da diese aber annähernd konstant bleibt, kann der kontinuierliche Übergang nicht stattfinden.

## 8.2 Anwenden des Modells auf das System in dieser Arbeit

Das im vorherigen Abschnitt vorgestellte Modell lässt sich auch auf das in dieser Arbeit betrachtete System anwenden. Dazu modifiziert man den Ansatz (8.3) zu

$$\begin{aligned} q_{2n} &= u_{2n} e^{i\Omega\tau} \text{ mit } u_{2n} = A \cdot r^{2n}, \\ q_{2n+1} &= u_{2n+1} e^{i\Omega\tau} \text{ mit } u_{2n+1} = B \cdot r^{2n+1}. \end{aligned} \quad (8.11)$$

Setzt man diesen Ansatz in die Differentialgleichung (3.9) mit  $\alpha = \beta = 0$  ein, so erhält man analog zur Rechnung in Kapitel 5

$$\begin{pmatrix} -\Omega^2 (\lambda' r^{-1} + \lambda r^1) & -\Omega^2 - i\Omega\gamma + 1 \\ -\Omega^2 + i\Omega\gamma + 1 & -\Omega^2 (\lambda' r^1 + \lambda r^{-1}) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (8.12)$$

Für nichttriviale Lösungen setzt man die Determinante wieder gleich Null und erhält

$$\begin{aligned} &\Omega^4 (\lambda^2 + \lambda'^2 + \lambda\lambda' (r^{-2} + r^2)) - (\Omega^4 - 2\Omega^2 + \gamma^2\Omega^2 + 1) = 0 \\ \Leftrightarrow &\underbrace{\left(1 - \frac{2}{\Omega^2} + \frac{\gamma^2}{\Omega^2} + \frac{1}{\Omega^4} - (\lambda^2 + \lambda'^2)\right)}_{b(\Omega)} \frac{1}{\lambda\lambda'} = \frac{1}{r^2} + r^2 \\ \Leftrightarrow &r^4 - b(\Omega)r^2 + 1 = 0. \end{aligned} \quad (8.13)$$

Die Lösung dieser Gleichung ist gegeben durch

$$r_{+,-}^2 = \frac{b(\Omega) \pm \sqrt{b(\Omega)^2 - 4}}{2}. \quad (8.14)$$

Wie im zuvor betrachteten System erhält man hier Lösungen für ebene Wellen, wenn die Diskriminante  $b(\Omega) \pm \sqrt{b(\Omega)^2 - 4}$  negativ wird. Dafür werden die Nullstellen des Polynoms numerisch bestimmt (vergleiche Abbildung 8.1). Diese sind

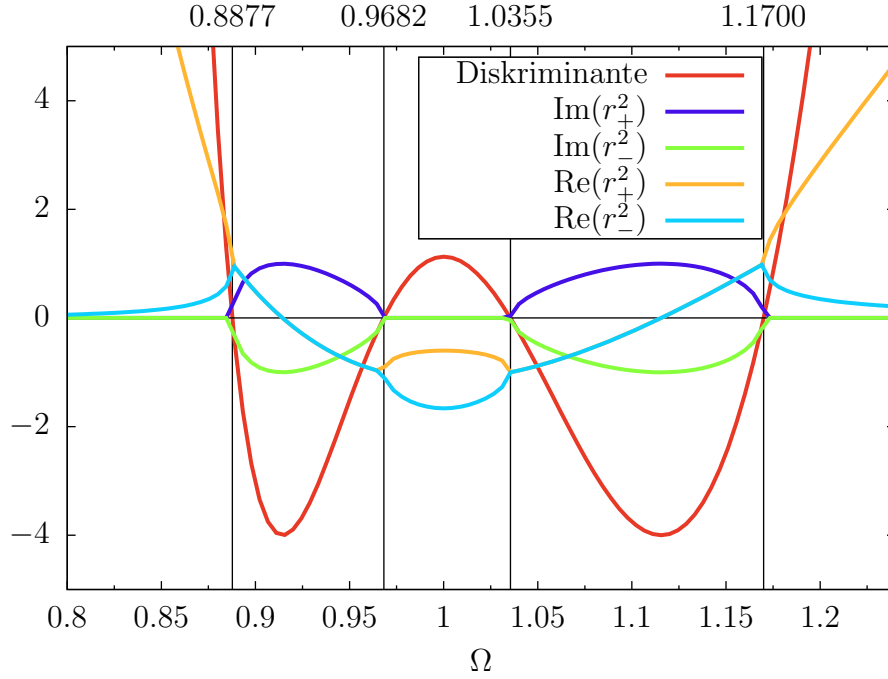


Abbildung 8.1: Lösungen von Gleichung (8.14). Man erkennt, dass die Nullstelle der Diskriminante gleich den Maxima und Minima aus Abbildung 6.3 ist. Bestimmt man in dem Teil mit negativer Diskriminante die komplexe Wurzel aus  $r$  und trägt das Argument über  $\Omega$  auf, erhält man die Umkehrabbildung von 6.3. Die Parameter sind  $\gamma = 0.02$ ,  $\lambda = -0.17$ ,  $\lambda' = -0.1$ .

- $\Omega_1 \approx 0.8877$ ,
- $\Omega_2 \approx 0.9682$ ,
- $\Omega_3 \approx 1.0355$ ,
- $\Omega_4 \approx 1.1700$

und entsprechen exakt den Maxima und Minima der analytisch berechneten Dispersionsrelation (vergleiche Abbildung 6.3). In Abbildung 8.1 sind die Lösungen der Gleichung (8.14) sowie die Diskriminante in Abhängigkeit von  $\Omega$  aufgetragen. Bestimmt man in dem Teil mit negativer Diskriminante die komplexe Wurzel aus  $r$  und trägt das Argument über  $\Omega$  auf, erhält man die Umkehrabbildung von 6.3. Für die Breather sind die reellen Lösungen über  $\Omega = 0.8877$ , beziehungsweise unter  $\Omega = 1.1700$  interessant. Der reelle Bereich zwischen  $\Omega = 0.9682$  und  $\Omega = 1.0355$  ist physikalisch uninteressant, da man aus dem Modellsystem weiß, dass nur über beziehungsweise unterhalb des linearen Bandes Breatherlösungen vorkommen können. In Abbildung 8.2 ist die Wurzel der reellen Lösung von  $r_+^2$  beziehungsweise  $r_-^2$  sowie der natürliche Logarithmus aus den Wurzeln

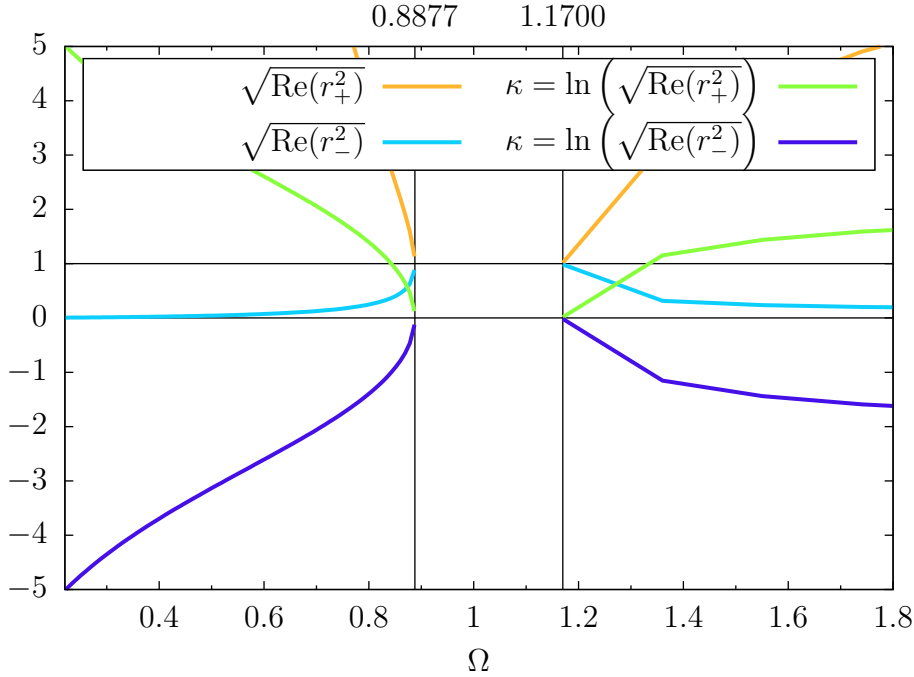


Abbildung 8.2: Die positive Wurzel aus  $r_+^2$  beziehungsweise  $r_-^2$  von Gleichung (8.14) sowie der natürliche Logarithmus aus der Wurzel. Man erkennt, dass nur die Wurzel aus  $r_-^2$  physikalisch sinnvolle Lösungen liefert, da nur dort der Logarithmus einen Wert kleiner als 0 annimmt. Die Parameter sind  $\gamma = 0.02$ ,  $\lambda = -0.17$ ,  $\lambda' = -0.1$ .

zu sehen. Daran ist zu erkennen, dass nur die Minus-Lösung physikalisch sinnvolle Werte liefert, da nach (8.10)  $\kappa$  eine negative Zahl sein muss. Wichtig ist dabei, dass dieser Beschreibung eine lineare Differentialgleichung zu Grunde liegt. Die Lösung ist also nur als Näherung zu verstehen, die hauptsächlich dafür gedacht ist, den Mechanismus, nach dem Breather sich bilden, besser verstehen zu können.

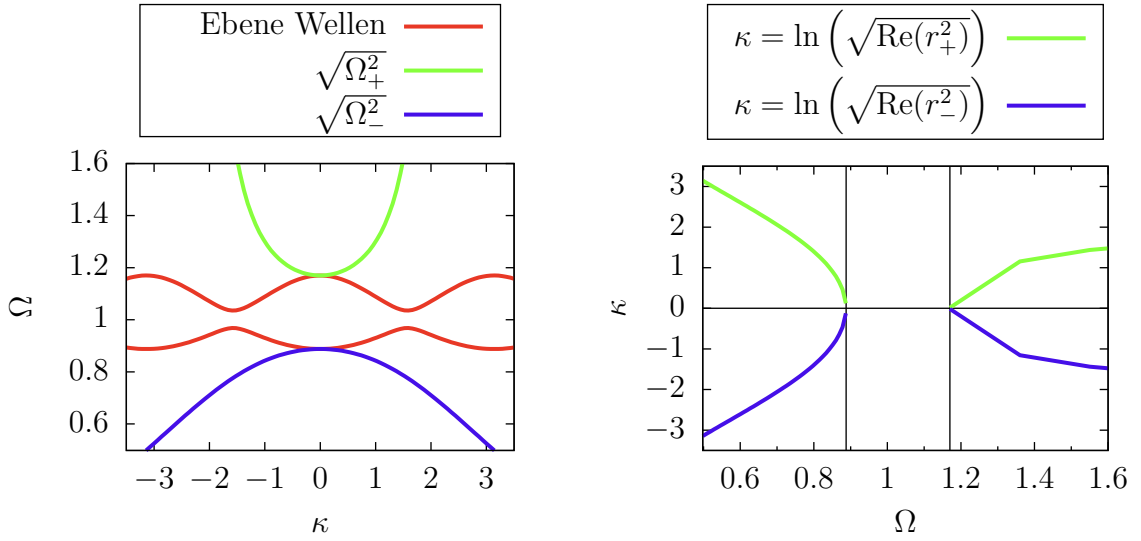
Das Ergebnis legt die Idee nahe, statt Ansatz (5.2) einen der Form

$$\begin{aligned} q_{2n} &= A e^{\kappa 2n} e^{i\Omega\tau}, \\ q_{2n+1} &= B e^{\kappa(2n+1)} e^{i\Omega\tau} \end{aligned} \quad (8.15)$$

zu verwenden. Geht man mit diesem Ansatz exakt analog zu Abschnitt 5 vor, erhält man als Lösung für  $\Omega^2$

$$\Omega_{+,-}^2 = \frac{1 - \gamma^2/2 + \sqrt{\gamma^4/4 - \gamma^2 + (\lambda - \lambda')^2 + 4\lambda\lambda' \cosh^2(\kappa)}}{1 - (\lambda - \lambda')^2 - 4\lambda\lambda' \cosh^2(\kappa)}. \quad (8.16)$$

Diese Funktion ist in Abbildung 8.3 sowie das vorherige Ergebnis im Vergleich dazu zu sehen. Man sieht, dass die Funktionen jeweils die Umkehrfunktionen zueinander sind.



(a) Dispersionsrelation der ebenen Wellen aus Abschnitt 5 sowie das Ergebnis des reellen Ansatzes (8.15) in Abhängigkeit von  $\kappa$ . (b) Der natürliche Logarithmus der positiven Wurzel aus  $r_+^2$  beziehungsweise  $r_-^2$  aus Gleichung (8.14) über der Frequenz aufgetragen.

Abbildung 8.3: Vergleich des Ergebnisses des reellen Ansatzes (8.15) mit dem natürlichen Logarithmus aus der positiven Wurzel aus Gleichung (8.14). Man sieht, dass die Funktionen jeweils die Umkehrfunktionen voneinander sind. Die schwarzen Striche in (b) sind an der Position der Maxima und Minima der Dispersionsrelation der ebenen Wellen. Die Parameter sind  $\gamma = 0.02$ ,  $\lambda = -0.17$ ,  $\lambda' = -0.1$ .

In Abschnitt 4.2 wurde dargestellt, dass die abfallende Flanke der Breather durch eine Exponentialfunktion beschrieben und dadurch den Breather ein Äquivalent zu einer Wellenlänge zugeordnet werden kann. Es besteht nun die Vermutung, dass dieses  $\kappa$ , zumindest näherungsweise, dem aus Abbildung 8.3 entspricht. Um diese Vermutung zu überprüfen, wird an die Flanken der Startladungsverteilung eines numerisch gefundenen Breathers aus Kapitel 7 eine Exponentialfunktion angepasst (vergleiche Abbildung 8.4). Für  $\kappa_1$  beziehungsweise  $\kappa_2$  wurden dafür alle ungeraden Punkte von 0 bis 23 beziehungsweise von 27 bis 49 benutzt. Für  $\kappa_3$  beziehungsweise  $\kappa_4$  alle geraden Punkte von 0 bis 22 beziehungsweise von 26 bis 50. Da die Werte, die man über diesen Weg für  $\kappa$  bekommt, auf jeder Seite unterschiedlich sind, wird von den Werten der Mittelwert berechnet. Dieser beträgt  $\kappa_{\text{MW}} = 0.5660$ . Die Periodendauer des Breathers aus Abbildung 8.4 beträgt  $T_B = 7.14286$ . Daraus folgt für die Frequenz  $\Omega = 2\pi/7.14286 = 0.87965$ . Setzt man das in Gleichung (8.14) und zieht den natürlichen Logarithmus aus der Wurzel der Plus-Lösung, erhält man  $\kappa_{\text{Modell}} = 0.42570$ .

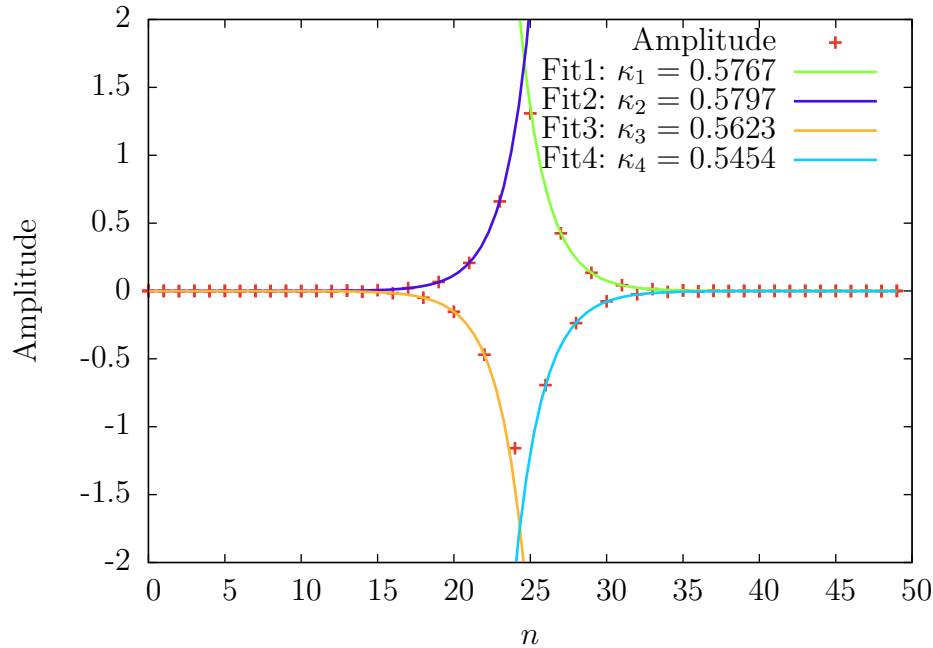


Abbildung 8.4: An die räumliche Form eines numerisch gefundenen Breathers wurde jeweils an die abfallende Flanke eine Exponentialfunktion angepasst. Es ist die Vermutung, dass der Faktor im Exponent ähnlich dem berechneten  $\kappa$  aus Abbildung 8.2 ist. Die Parameter sind  $\gamma = 0.02$ ,  $\lambda = -0.17$ ,  $\lambda' = -0.1$ ,  $\alpha = -0.4$ ,  $\beta = 0.08$ .

Der Gleichung (8.14) liegt eine lineare Differentialgleichung zugrunde. Es ist also zu erwarten, dass diese nur für kleine Amplituden eine sinnvolle Näherung darstellt, da man bei kleiner Amplitude die Nichtlinearität vernachlässigen kann. Die Amplitude für die Anpassung der Exponentialfunktion sind ungefähr 1 und fallen nicht mehr in den Bereich der Näherung. Wenn man für die Anpassung jeweils nur bis zum nächst kleineren Punkt geht, erhält man folgenden Werte:  $\kappa_1 = 0.5770$ ,  $\kappa_2 = 0.5789$ ,  $\kappa_3 = 0.5756$  und  $\kappa_4 = 0.5758$ . Diese Werte liegen deutlich dichter beieinander, sind aber immer noch sehr weit von  $\kappa_{\text{Modell}}$  entfernt. Um dieses Verhalten genauer zu untersuchen, könnte man dieses Verfahren für verschiedene Breatherlösungen bei unterschiedlichen Nichtlinearitäten durchführen, um nach einer Systematik zu suchen. Das geht jedoch über das Ziel dieser Arbeit hinaus.





## 9 Zusammenfassung und Ausblick

Metamaterialien eröffnen, aufgrund ihrer Eigenschaften, wie zum Beispiel einen negativen Brechungsindex, insbesondere in der Optik viele neue Möglichkeiten. Die prominentesten Anwendungen sind Super-Linsen [1] oder optische Tarnkappen [2, 3]. Durch Esaki-Dioden ist es möglich, Metamaterialien mit ausgeglichenem Gewinn und Verlust zu konstruieren [4, 10]. Die so konstruierten Systeme weisen große Analogien zur  $\mathcal{PT}$ -symmetrischen Quantenmechanik auf, wodurch man ihren Formalismus auf das System anwenden kann. Da  $\mathcal{PT}$ -symmetrische quantenmechanische Systeme nur sehr schwer experimentell zu realisieren sind, bieten sich Metamaterialien hervorragend als Testobjekt für diese Theorie an.

In nichtlinearen Metamaterialien kann man die Existenz von Breather, ein Spezialfall von Solitonen, beobachten. Das Ziel dieser Arbeit war es, ein besseres Verständnis für Breather zu entwickeln, insbesondere die Frage zu beantworten, ob es einen Zusammenhang zwischen Lösungen im linearen und im nichtlinearen Bereich der Metamaterialien gibt und gegebenenfalls eine Näherung dafür zu finden. Die einfachsten Lösungen im linearen Fall sind ebene Wellen. Zum Vergleich mit anderen Quellen und als Referenzwert für den weiteren Verlauf der Arbeit wurde deshalb im linearen Fall eine Dispersionsrelation für ebene Wellen analytisch berechnet. Anschließend wurde durch eine Näherung versucht, eine analytische Dispersionsrelation für ebene Wellen im nichtlinearen Bereich herzuleiten. Dies wurde unter der Voraussetzung gemacht, dass es fließende Übergänge zwischen Lösungen von Breather und ebenen Wellen gibt und man dadurch die Dispersionsrelation im Nichtlinearen nutzen kann, um Vorhersagen über das Frequenzspektrum der Breather zu treffen. Es stellte sich jedoch heraus, dass es nicht, oder nur unter unverhältnismäßig großem Aufwand, möglich ist, eine analytische Lösung zu finden. Deshalb wurde ein analytischer Ansatz im letzten Schritt mithilfe einer numerischen Nullstellensuche gelöst. Um die Güte der Näherung zu bestimmen, wurde durch eine Simulation die Dynamik des Systems berechnet und mithilfe einer diskreten Fourier-Transformation das Frequenzspektrum bestimmt. Es stellte sich heraus, dass die Näherung keine gute Übereinstimmung zeigt. Über die Analyse der Dynamik zeigte sich, dass die Hauptfrequenz von ebenen Wellen im Nichtlinearen gleich bleibt und diese durch hauptsächlich kleinere Frequenzen von unterhalb des linearen Bandes überlagert wird. Das System eignet sich offensichtlich nicht, um Vorhersagen für das Frequenzspektrum der Breather treffen zu können.

An die Frage, ob es Übergänge zwischen ebenen Wellen und Breatherlösungen gibt,

wurde schließlich aus einer anderen Perspektive herangegangen. Dazu wurde im nichtlinearen System mithilfe des Schießverfahrens numerisch nach Breatherlösungen gesucht. Die gefundenen Lösungen wurden als Anfangswert für Simulationen benutzt, bei denen die Nichtlinearität schrittweise abgeschaltet und bei jedem Schritt erneut nach Breatherlösungen gesucht wird. Diese Untersuchung hatte als Ergebnis, dass die Breather bis zu einer bestimmten Nichtlinearität existieren und danach abrupt keine Breather mehr gefunden werden können. Außerdem stellt man fest, dass die Form der Breather annähernd gleich bleibt. Dies konnte bei unterschiedlichen Kopplungsstärken bestätigt werden. Das plötzliche Abbrechen der Lösung spricht dafür, dass ein Übergang nicht existiert.

Um den Mechanismus, der für die Entstehung von Breather verantwortlich ist, besser zu verstehen, wurde ein vereinfachtes Modellsystem betrachtet. In diesem wurde in eine lineare Differentialgleichung ein verallgemeinerter Ansatz eingesetzt. Aus diesem folgte, dass Breather nur dann existieren, wenn die einzelnen Oszillatoren mit einer Frequenz außerhalb des linearen Bandes für ebene Wellen schwingen. Im linearen Fall können also keine freien Breather existieren, da die Nichtlinearität benötigt wird, um diese Frequenzen anregen zu können. Im Linearen können nur dann Breatherlösungen erreicht werden, wenn ein Oszillator extern mit einer Frequenz im nichtlinearen Bereich getrieben wird. Zudem wurde in diesem Modell ein Parameter  $\kappa$  eingeführt, der, in einer Exponentialfunktion eingesetzt, den räumlichen Abfall des Breathers beschreibt und dadurch als Äquivalent zur Wellenlänge gesehen werden kann. Dieser Parameter  $\kappa$  steht in Relation zur Frequenz des Breathers, bildet also eine Art Dispersionsrelation. Diese Erkenntnis ist zusammen mit dem vorherigen Ergebnis, dass die Form der Breather konstant bleibt, ein weiteres Indiz dafür, dass kein kontinuierlicher Übergang von Breather zu ebenen Wellen existieren kann, da die Form der Breather sich verändern müsste, damit sie eine andere Frequenz besitzen.

Der verallgemeinerte Ansatz aus dem vorherigen Modellsystem wurde nun auf das System der Arbeit angewandt. Die dadurch erhaltenen Ergebnisse stimmten mit denen aus dem Modellsystem überein. Dies führte zu einem Ansatz, der im Gegensatz zu ebenen Wellen einen reellen, abfallenden anstatt einen komplexen, oszillierenden Ortsteil hat. Mit diesem Ansatz konnte die Umkehrfunktion des Zusammenhangs zwischen Frequenz und dem Parameter  $\kappa$  aus dem Modellansatz bestimmt werden. Der Vergleich der Werte mit einem numerisch exakt bestimmten Breather zeigen jedoch deutliche Abweichungen. Der Rechnung mit dem Ansatz aus dem Modellsystem lag eine lineare Differentialgleichung zu Grunde. Dieses Modell kann also, wenn überhaupt, nur für kleinere Amplituden, bei denen die Nichtlinearität vernachlässigt werden kann, verwendet werden. Da die Amplitude der Breather am Rand schon sehr stark abgefallen sind, wird nur der Rand für den Vergleich herangezogen. Man erhält trotzdem eine deutliche Abweichung und kann den Zusammenhang qualitativ aber nicht quantitativ bestätigen. Der Einfluss der großen Amplitude in der Mitte scheint bestehen zu bleiben.

Zusammenfassend können folgende wichtige Ergebnisse festgehalten werden. Gestützt

---

durch Erkenntnisse aus unterschiedliche Ansätzen kann für die Frage nach der Existenz von Zusammenhängen zwischen linearen Lösungen, wie ebenen Wellen, und nichtlinearen Breatherlösungen die starke Vermutung geäußert werden, dass diese nicht existieren. Des Weiteren konnte durch das Betrachten eines Modellsystems der Mechanismus, der für die Existenz von Breather verantwortlich ist, verstanden werden. Durch Anwenden des Ansatzes des Modellsystems konnten im System dieser Arbeit dieselben Mechanismen bestätigt werden.

Die Erkenntnisse aus dem Modellsystem bieten interessante Ansätze, um in einer weiteren Arbeit Breather in nichtlinearen Metamaterialien zu untersuchen. Zum einen wäre es interessant, ob man den theoretisch vorhergesagten exponentiellen Abfall in einem linearen System, welches extern mit einer Frequenz außerhalb des linearen Bandes getrieben wird, feststellen kann. Das würde die Rechtfertigung für den getroffenen Ansatz liefern. Für den Fall einer positiven Bestätigung könnte man versuchen, eine Näherung für den nichtlinearen Fall zu suchen. Eventuell ist hierbei die Näherung, in der nur die Amplituden für Nichtlinearitäten höherer Potenz betrachtet werden, für Frequenzen oberhalb des linearen Bandes erfolgreich. Des Weiteren wäre es interessant, das Vorgehen aus dem letzten Teil der Arbeit, in dem Werte für  $\kappa$  aus dem Modellsystem mit denen von numerisch exakt gelösten Breather verglichen werden, genauer zu betrachten. Insbesondere könnte sich die Untersuchung lohnen, ob sich eine Systematik erkennen lässt und inwieweit die Nichtlinearität und die Kopplungsstärken einen Einfluss haben.



# Literaturverzeichnis

- [1] J. B. Pendry. Negative Refraction Makes a Perfect Lens. *Phys. Rev. Lett.* 85, 3966–3969 (2000).
- [2] D. Schurig, J. J. Mock, B. J. Justice, S. A. Cummer, J. B. Pendry, A. F. Starr und D. R. Smith. Metamaterial Electromagnetic Cloak at Microwave Frequencies. *Science* 314, 977–980 (2006).
- [3] Wenshan Cai, Uday K. Chettiar, Alexander V. Kildishev und Vladimir M. Shalaev. Optical cloaking with metamaterials. *Nat. Photon.* 1, 224–227 (2007).
- [4] Wangren Xu, Willie J. Padilla und Sameer Sonkusale. Loss compensation in Metamaterials through embedding of active transistor based negative differential resistance circuits. *Opt. Express* 20, 22406–22411 (2012).
- [5] Tao Jiang, Kihun Chang, Li-Ming Si, Lixin Ran und Hao Xin. Active Microwave Negative-Index Metamaterial Transmission Line with Gain. *Phys. Rev. Lett.* 107, 205503 (2011).
- [6] Carl M. Bender und Stefan Boettcher. Real Spectra in Non-Hermitian Hamiltonians Having  $\mathcal{PT}$  Symmetry. *Phys. Rev. Lett.* 80, 5243–5246 (1998).
- [7] Christian E. Rüter, Konstantinos G. Makris, Ramy El-Ganainy, Demetrios N. Christodoulides, Mordechai Segev und Detlef Kip. Observation of parity-time symmetry in optics. *Nat. Phys.* 6, 192–195 (2010).
- [8] D. Dast. *Variationsrechnungen zu Bose-Einstein-Kondensaten in  $\mathcal{PT}$ -symmetrischen Doppelmuldenpotentialen.* Masterarbeit, Universität Stuttgart (2012).
- [9] Frank Hesmer, Eugen Tatartschuk, Oleksandr Zhuromskyy, Anna A. Radkovskaya, Mikahil Shamonin, Tong Hao, Chris J. Stevens, Grahame Faulkner, David J. Edwards und Ekaterina Shamonina. Coupling mechanisms for split ring resonators: Theory and experiment. *Physica Status Solidi(b)* 244, 1170–1175 (2007).
- [10] Nikos Lazarides, Vassilis Paltoglou und G. P. Tsironis. Nonlinear Magnetoinductive Transmission Lines. *Int. J. Bifurc. Chaos* 21, 2147–2159 (2011).

- [11] N. Lazarides, M. Eleftheriou und G. P. Tsironis. Discrete Breathers in Nonlinear Magnetic Metamaterials. *Phys. Rev. Lett.* 97, 157406 (2006).
- [12] N. Lazarides und G. P. Tsironis. Gain-Driven Discrete Breathers in  $\mathcal{PT}$ -Symmetric Nonlinear Metamaterials. *Phys. Rev. Lett.* 110, 053901 (2013).
- [13] S. Longhi. Quantum-optical analogies using photonic structures. *Laser Photon. Rev.* 3, 243–261 (2009).
- [14] W. Demtröder. *Experimentalphysik 2*. Springer, Berlin, Heidelberg (2008).
- [15] Franco Dalfovo, Stefano Giorgini, Lev P. Pitaevskii und Sandro Stringari. Theory of Bose-Einstein condensation in trapped gases. *Rev. Mod. Phys.* 71, 463–512 (1999).
- [16] E. Arnold. *Ausgedehnte räumliche Kopplung von Bose-Einstein-Kondensaten zur Realisierung von Gewinn und Verlust*. Bachelorarbeit, Universität Stuttgart (2017).
- [17] J. Juul Rasmussen und K. Rypdal. Blow-up in Nonlinear Schroedinger Equations-I A General Review. *Physica Scripta* 33, 481 (1986).
- [18] N. N. Akhmediev, V. M. Eleonskii und N. E. Kulagin. Exact first-order solutions of the nonlinear Schrödinger equation. *Theo. Math. Phy.* 72, 809–818 (1987).
- [19] Yan-Chow Ma. The Perturbed Plane-Wave Solutions of the Cubic Schrödinger Equation. *Stud. in Appl. Math.* 60, 43–58 (1979).
- [20] S. Erfort. *Nichtlineare Metamaterialien mit Verstärkungs- und Absorptionseffekten*. Masterarbeit, Universität Stuttgart (2016).
- [21] Claus-Dieter Munz und Thomas Westermann. *Rand- und Eigenwertprobleme gewöhnlicher Differenzialgleichungen*, Seiten 113–172. Springer, Berlin, Heidelberg (2012).
- [22] Kazuyuki Yoshimura, Yusuke Doi und Masayuki Kimura. *Localized Modes in Nonlinear Discrete Systems*, Seiten 119–166. Springer International Publishing, Cham (2015).

# Danksagung

Zum Zustandekommen dieser Bachelorarbeit haben viele Personen, direkt oder indirekt, beigetragen. Dafür möchte ich mich an dieser Stelle herzlich bedanken.

Zuerst möchte ich mich bei Herrn Prof. Dr. Günter Wunner für die Möglichkeit, diese Arbeit an seinem Institut anfertigen zu können, bedanken. Ein weiterer Dank gilt allen Mitgliedern des 1. Instituts für Theoretische Physik für die freundliche Aufnahme und die entspannte Arbeitsatmosphäre.

Ein besonderer Dank geht an Herr Priv.-Doz. Dr. Holger Cartarius für die Bereitstellung des Themas sowie der Betreuung während der gesamten Arbeit. Bei allen Fragen sowohl bezüglich der Bachelorarbeit als auch zu anderen Themen des Studiums hat er sich immer viel Zeit zur Beantwortung genommen, bis auch die letzte Unklarheit beseitigt war.

Ein sehr großes Dankeschön widme ich Elias Arnold, Luca Blessing und Tobias Reinsch. Sie haben in jeglicher Hinsicht dazu beigetragen, dass das Bachelorstudium eine erfolgreiche Zeit war! An Elias, der sich mit mir während der Bachelorarbeit ein Büro geteilt hat, einen besonderen Dank, für die entspannte Atmosphäre und seine Hilfe bei jeglichen Problemen und Fragen.

Zuletzt möchte ich mich bei meinen Eltern Ella und Thomas Herkommer bedanken. Sie haben mir durch ihre Unterstützung in vielerlei Hinsicht dieses Studium erst ermöglicht.





## **Erklärung**

Ich versichere,

- dass ich diese Bachelorarbeit selbständig verfasst habe,
- dass ich keine anderen als die angegebenen Quellen benutzt und alle wörtlich oder sinngemäß aus anderen Werken übernommenen Aussagen als solche gekennzeichnet habe,
- dass die eingereichte Arbeit weder vollständig noch in wesentlichen Teilen Gegenstand eines anderen Prüfungsverfahrens gewesen ist,
- und dass das elektronische Exemplar mit den anderen Exemplaren übereinstimmt.

Stuttgart, den 9. August 2017

*Benedikt Herkommer*