Informationstransfer in Quantennetzwerken

Diplomarbeit von
Thomas Haury

20.12.2001

Hauptberichter : Prof. Dr. G. Mahler
Mitberichter : Prof. Dr. R. Friedrich

Institut für Theoretische Physik Teil 1
Universität Stuttgart
Pfaffenwaldring 57, 70550 Stuttgart

Inhaltsverzeichnis

Einleitung **1**

1 Quantentheorie und Quantennetzwerke **3**
1.1 Dichteoperator . . . 3
1.2 Operatordarstellung und Zustandsraum . . . 4
1.2.1 Blochdarstellung . . . 4
1.2.2 Zustandsraum . . . 5
1.2.3 Klassische Unterräume . . . 6
1.3 Quantenoperationen . . . 7
1.3.1 Unitäre Dynamik . . . 7
1.3.2 von Neumann-Messungen . . . 8
1.3.3 Verallgemeinerte Messungen . . . 9
1.3.4 Allgemeine Quantenoperationen . . . 10
1.4 Verschränkung und Separabilität . . . 10
1.5 Quantennetzwerke . . . 11
1.5.1 Cluster-Operatoren und -Darstellung . . . 11
1.5.2 Verschränkungstensoren . . . 12
1.5.3 Transformationsverhalten . . . 14
1.5.4 Nichtlokale unitäre Transformationen . . . 14
1.6 Reine 2-Teilchen-Systeme . . . 15
1.7 Maximal verschränkte 2-Teilchen-Systeme . . . 17
1.7.1 Maximal verschränkte Basis . . . 17
1.7.2 Cluster-Entwicklung maximal verschränkter Zustände . . . 19

2 Informationstheorie **21**
2.1 Klassische Information und Entropie . . . 21
2.2 Quanteninformationstheorie . . . 23
2.3 Klassische Information in Quantensystemen . . . 24
2.3.1 Speicherung klassischer Information . . . 25
2.3.2 Dense-Coding . . . 26
2.3.3 Informationsübertragung durch Korrelationen . . . 26

3 Lokale Messungen in Blochdarstellung **29**
3.1 Messung an einem Subsystem . . . 29
3.1.1 Nicht entarter Messoperator . . . 29
3.1.2 Entarteter Messoperator . . . 34
3.1.3 Verallgemeinerte Messungen . . . 35
3.1.4 Effektiv gemessene Zustände . . . 36
3.2 Messung an 2 Subsystemen . . . 37
3.3 Folge von Messungen . . . 40
3.4 Messung an n Subsystemen . . . 42
3.5 Zusammenfassung . . . 45

4 Anwendungsbeispiele **47**
4.1 Lokale Messungen an maximal verschränkten Zuständen . . . 47
4.2 Quantenteleportation . . . 48
4.3 Entanglement Swapping . . . 51
4.4 Klassische Anwendungsbeispiele . . . 52
4.4.1 Klassischer Hütchenspieler . . . 53
4.4.2 Klassische Teleportation . . . 55
4.5 Anmerkungen . . . 59

5 Transfer von Quanteninformation **63**
5.1 Reversible Messungen . . . 63
5.2 Transfer von Zuständen und Verschränkung . . . 65
5.3 Teleportation mit lokalen Messungen . . . 67
5.3.1 Teleportationsschema . . . 68
5.3.2 Unitäre Transformation . . . 70
5.3.3 Schrittweise Teleportation . . . 70
5.3.4 Fall n=2 . . . 72
5.3.5 Eigenschaften von U_v . . . 73
5.4 Teleportation in Blochdarstellung . . . 75
5.4.1 Transformation U_v . . . 75
5.4.2 Teleportationsschema . . . 76
5.4.3 Klassischer Fall . . . 78

Zusammenfassung **81**

Anhang **83**
A.1 Verschränkungstensor des $|cat\rangle_{00}$-Zustands . . . 83
A.2 Beziehungen der Verschränkungstensoren . . . 85
A.3 Beweis von Gleichung (3.15) . . . 88
A.4 Beispiele der definierten Größen . . . 90

Literaturverzeichnis **91**

Einleitung

Im Jahre 1935 erkannten Einstein, Podolsky und Rosen [1] auf der Suche nach Hinweisen für die Unvollständigkeit der Quantentheorie, dass es für Systeme aus unterscheidbaren Teilchen reine Zustände mit der Eigenschaft gibt, dass eine Messung an einem Teilchen Auswirkung auf die Zustände der anderen Teilchen hat. Man hielt dies für ein Paradox, da die Teilchen räumlich beliebig weit entfernt sein konnten und der Einfluss auf alle Teilchen instantan erfolgt. Einstein sprach von einer 'geisterhaften Fernwirkung'. Zustände mit dieser Eigenschaft werden als verschränkt bezeichnet.

Da der quantenmechanische Zustand nur eine Rechengröße zur Vorhersage von Wahrscheinlichkeiten von Messergebnissen darstellt, aber keine Entsprechung in der Realität besitzt, ist das EPR-Paradox kein wirkliches Problem. Es stellte sich allerdings heraus, dass die Ergebnisse von Korrelationsmessungen an verschränkten Systemen nicht auf klassische Weise erklärbar sind. Aus der Verletzung der Bellschen Ungleichungen [2] durch die Quantentheorie folgt, dass diese Korrelationen nicht durch eine lokale, klassische Theorie beschrieben werden können, was 1982 auch experimentell belegt werden konnte [3]. Will man des Bild einer realen Welt im klassischen Sinne aufrecht erhalten, muss es demnach einen Austausch von Information zwischen den Quantensystemen geben, der über die klassischen Möglichkeiten hinausgeht. Dies ist aber eine reine Interpretationsfrage.

In neuerer Zeit wurden die speziellen Eigenschaften der Quantentheorie, neben verschränkten Zuständen sind dies unter anderem die Komplementarität und der im Vergleich zu klassischen Systemen größere Zustandsraum, als Resource für Informationsverarbeitung und Informationsübermittlung entdeckt. 1993 zeigten Bennett et al. [4], dass es möglich ist, mit verschränkten Zuständen einen unbekannten Quantenzustand zu übertragen. Bei der Teleportation geht der Zustand eines Teilchens ohne direkte physikalische Wechselwirkung sondern nur durch eine Messung und Übertragung klassischer Information auf ein anderes Teilchen über. Die beiden Teilchen können dabei beliebig weit voneinander entfernt sein. Weitere Beispiele sind Quantenkryptographie [5], Densecoding [6] oder Quantencomputing [7].

In dieser Arbeit soll näher untersucht werden, in welcher Weise in Quantensystemen, die aus mehreren, in irgendeiner Form lokalisierbaren Untersystemen bestehen, Information übertragen werden kann. Information kann dabei klassi-

sche Information im Shannon'schen Sinne bedeuten. Es kann sich aber auch wie bei der Teleportation um einen unbekannten Quantenzustand handeln oder um die Auswirkung von lokalen, d.h. auf einzelne Subsysteme beschränkte, Quantenoperationen auf den Zustand der weiteren Subsysteme.

Es wird untersucht, auf welche Art Korrelationen zwischen den Quantensystemen und das Messergebnis bei lokalen Messungen den Zustand der nicht gemessenen Subsysteme bestimmen. Dabei werden sowohl von Neumann- wie auch verallgemeinerte Messungen betrachtet. Außerdem wird untersucht, welche weiteren Eigenschaften sich bei Messungen an mehreren Subsystemen ergeben, insbesondere, wenn die Messbasis nichtlokal ist. Um diese Eigenschaften zu untersuchen, wird der Messformalismus in der Darstellung der Quantenzustände in Cluster-Operatoren untersucht. Dabei soll auch angeschnitten werde, welche Aspekte rein quantenmechanisch sind, und welche auch in der klassischen Vorstellung Platz finden.

Mit diesen Ergebnissen wird näher diskutiert, wie bei der Teleportation der Zustand übertragen wird. Um die Rolle der Korrelationen bei der Teleportation besser zu verstehen, wird ein rein klassisches Teleportationsmodell eingeführt. Außerdem wird eine alternative Möglichkeit der Teleportation vorgestellt und diskutiert, die nur mit lokalen Messungen auskommt.

Kapitel 1

Quantentheorie und Quantennetzwerke

1.1 Dichteoperator

Die allgemeinste Möglichkeit, einen Quantenzustand zu beschreiben, stellt die Dichtematrix dar. Sie enthält die vollständige Information, die aus der Sicht eines Experimentators über ein System vorliegt. Hier seien einige der wichtigsten Eigenschaften aufgeführt. Eine ausführliche Darstellung findet sich unter anderem in [8].

Für reine Zustände ergibt sich die Dichtematrix als der Projektor in den Raum des Zustandes $|\psi\rangle$

$$\hat{\rho}_p = |\psi\rangle \langle\psi| \tag{1.1}$$

Allgemeine Zustände lassen sich als klassische Mischung von Zuständen auffassen.

$$\hat{\rho} = \sum_i p_i \hat{\rho}_i \tag{1.2}$$

Die p_i mit $\sum_i p_i = 1$ lassen sich als Wahrscheinlichkeiten für den Anteil des Zustandes $\hat{\rho}_i$ interpretieren. Für ein gegebenes $\hat{\rho}$ ist die Zerlegung (1.2) nicht eindeutig.

Sind die $\hat{\rho}_i$ die Dichteoperatoren der reinen Zustände einer vollständigen orthogonalen Basis, ist (1.2) die Diagonaldarstellung von $\hat{\rho}$ mit den Eigenwerten p_i. Aus der Interpretation der p_i als Wahrscheinlichkeiten ergeben sich dann folgende notwendigen Bedingungen für eine Dichtematrix:

- $\hat{\rho}^+ = \hat{\rho}$: $\hat{\rho}$ ist hermitisch, da Wahrscheinlichkeiten reelle Zahlen sind
- $\mathrm{Tr}\{\hat{\rho}\} = 1$, da $\sum p_i = 1$
- Eigenwerte $\rho > 0$, da $p_i > 0$

Aus (1.1) und (1.2) ergibt sich: Ein Zustand ist genau dann rein, wenn gilt $\hat{\rho}^2 = \hat{\rho}$, oder äquivalent ein Eigenwert=1 und alle anderen 0, und daher $\mathrm{Tr}\{\hat{\rho}^2\} = 1$

Ist die Dimension des Hilbertraums der reinen Zustände des Systems n, so hat die Dichtematrix $n^2 - 1$ reelle unabhängige Parameter.

lokale Dichtematrix

Für aus mehreren Subsystemen zusammengesetzte Systeme lässt sich als sinnvolle Größe die lokale Dichtematrix einführen. Die lokale Dichtematrix für die Subsysteme A ergibt sich durch partielle Spurbildung über alle anderen Subsysteme B:

$$\hat{\rho}_A = \mathrm{Tr}_B\{\hat{\rho}\} \tag{1.3}$$

Die lokale Dichtematrix $\hat{\rho}_A$ enthält alle Information über das Quantensystem, die lokal in A erreichbar ist, da auf Grund der Linearität Spurbildung über die Subsysteme B und Erwartungswertbildung über einen lokalen Operator in A vertauschen.

1.2 Operatordarstellung und Zustandsraum

Die Elemente der Dichtematrix ρ_{ij} ergeben sich durch Entwicklung des Dichteoperators nach den verallgemeinerten Projektoren [8] $P_{ij} = |i\rangle\langle j|$

$$\hat{\rho} = \sum_{i,j} |i\rangle \rho_{ij} \langle j| \tag{1.4}$$

mit $\rho_{ij} = \langle i| \hat{\rho} |j\rangle$.

1.2.1 Blochdarstellung

Für hermitsche Operatoren ist eine andere Möglichkeit der Darstellung die Entwicklung nach den Generatoren $\hat{\lambda}_i$ der Gruppe $SU(n)$, die zusammen mit der Identität eine hermitsche, orthogonale Operatorbasis bilden. Vorteil hierbei ist im besonderen, dass nur noch $n^2 - 1$ unabhängige reelle Parameter auftreten.

Die λ_i sind wie folgt definiert :

$$\begin{aligned}
\left\{\hat{\lambda}_i\right\} &= \left\{\{\hat{u}_{jk}\}, \{\hat{v}_{jk}\}, \{\hat{w}_l\}\right\} \\
\hat{u}_{jk} &= \sqrt{\frac{n}{2}}(\hat{P}_{jk} + \hat{P}_{kj}) \\
\hat{v}_{jk} &= i\sqrt{\frac{n}{2}}(\hat{P}_{jk} - \hat{P}_{kj}) \\
\hat{w}_l &= \sqrt{\frac{n}{l(l+1)}}(l\hat{P}_{l,l} - \sum_{r=0}^{l-1} \hat{P}_{rr})
\end{aligned} \tag{1.5}$$

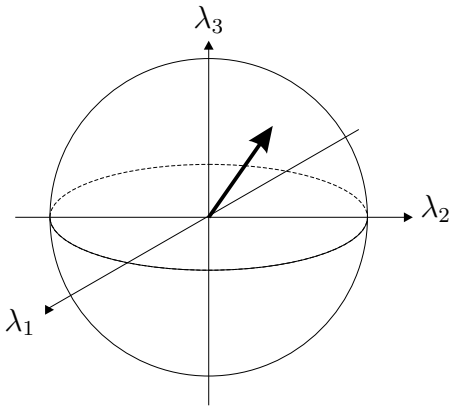


Abb. 1.1: Quantenmechanischer Zustandsraum für $n = 2$

mit $0 \leq j < k \leq n-1$ und $1 \leq l \leq n-1$ ergeben sich $n^2 - 1$ Operatoren. Die hermiteschen, spurlosen λ_i sind orthogonal:

$$\mathrm{Tr}\left\{\hat{\lambda}_i \hat{\lambda}_j\right\} = n\delta_{ij} \tag{1.6}$$

Durch Entwicklung der Dichtematrix nach den SU(n)-Generatoren erhält man die Blochdarstellung:

$$\hat{\rho} = \frac{1}{n}\left(\hat{1} + \sum_{i=1}^{n^2-1} \lambda_i \hat{\lambda}_i\right) \tag{1.7}$$

Die Entwicklungskoeffizienten $\lambda_i = \mathrm{Tr}\{\hat{\rho}\hat{\lambda}_i\}$ bilden den $n^2 - 1$ dimensionalen, reellen Bloch-Vektor. Blochvektor- und Dichtematrix-Beschreibung sind einander äquivalent.

1.2.2 Zustandsraum

Reine Zustände sind Zustände maximaler Blochvektorlänge mit $\lambda_i \lambda_i = n - 1$. Sie liegen also auf dem Rand des Zustandsraums und bilden, da man von jedem reinen Zustand zu jedem anderen über eine kontinuierliche unitäre Transformation gelangen kann, eine zusammenhängende Menge. Da sich jeder gemischte Zustand als konvexe Mischung von reinen Zuständen darstellen lässt und jede Mischung ein möglicher Zustand ist, bilden die Zustände eine konvexe Menge, die durch die reinen Zustände aufgespannt wird.

Für den Fall $n = 2$ lässt sich der Zustandsraum anschaulich durch die Blochkugel darstellen (Abb. 1.1). Die Punkte auf der Oberfläche sind die reinen Zustände, die Punkte innerhalb der Kugel die gemischten. In höheren Dimensionen befinden sich auch gemischte Zustände auf dem Rand des Zustandsraumes.

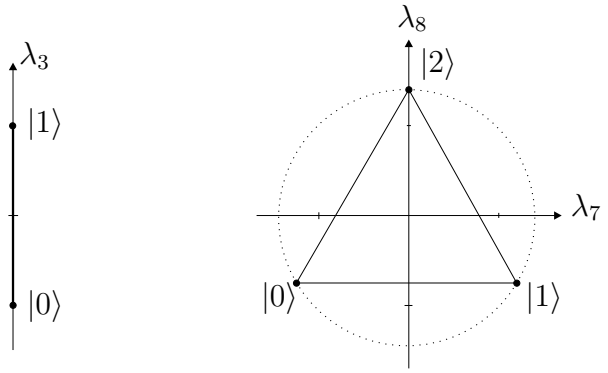


Abb. 1.2: Klassische Unterräume für $n = 1$ und $n = 2$. Die Punkte sind die reinen Zustände.

1.2.3 Klassische Unterräume

Die n Zustände einer vollständigen orthogonalen Basis spannen durch konvexe Linearkombination einen n-1 dimensionalen Unterraum auf. In der Darstellung dieser Basis ist dies der Raum der diagonalen Dichtematrizen, die sich als klassische Mischung der reinen Basiszustände ergeben. In Abb 1.2 ist für n=2 und 3 der klassische Unterraum, der durch die Basiszustände $|0\rangle, |1\rangle, (|2\rangle)$ aufgespannt wird, dargestellt. Die Eckpunkte stellen die reinen Zustände dar, die Punkte innerhalb die gemischten. Der Abstand zu einem Eckpunkt ist proportional zur Wahrscheinlichkeit, bei einer Messung das System in diesem reinen Zustand zu finden. Die Geometrie des Zustandsraumes ergibt für jeden Punkt $\sum_i p_i = 1$. Bei Messungen, die sich auf einen klassischen Unterraum beschränken, verhält sich ein Quantensystem auch im Ensemble rein klassisch.

Ein solcher klassischer Anteil eines Zustandes ergibt sich durch Projektion in den jeweiligen klassischen Unterraum:

$$\hat{\rho}_{kl} = \sum_{k=0}^{n-1} \hat{P}_k \hat{\rho} \hat{P}_k \tag{1.8}$$

Wobei die $\hat{P}_k$ die Projektoren in die Basiszustände sind. In der Darstellung in diesen Basiszuständen entspricht dies einem Löschen der Diagonalelemente der Dichtematrix. Beispielsweise ergibt sich für die Projektion eines beliebigen reinen Zustands $|\chi\rangle = \sum_k a_k |k\rangle$ in den durch die Basis $|k\rangle$ mit $k = 0..n-1$ aufgespannten Unterraum:

$$\hat{\rho}_{kl} = \sum_k |a_k|^2 |k\rangle\langle k| \tag{1.9}$$

Ein solcher klassischer Anteil ist auch der maximale Anteil eines unbekannten Quantenzustands, der nur durch klassische Übermittlung eines Messergebnisses

im Mittel übertragen werden kann. Denn der Sender, üblicherweise Alice genannt, kann das System in der Basis $\hat{P}_k$ messen und dem Empfänger Bob das Ergebnis mitteilen. Dieser präpariert daraufhin sein System im zum Messergebnis gehörenden Zustand $\hat{P}_k$. Im mit den Wahrscheinlichkeiten gewichteten Mittel erhält Bob dann gerade $\hat{\rho}_{kl}$. Siehe auch (1.19).

Fidelity

Ein Maß für die 'Ähnlichkeit' zweier Zustände ist die Fidelity. Für den reinen Zustand $|\psi\rangle$ und den Zustand $\hat{\rho}$ ist sie definiert als:

$$F = \langle\psi|\hat{\rho}|\psi\rangle \tag{1.10}$$

Ist $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$, folgt $F = 1$. Ist ρ der totalgemischte Zustand ist $F = \frac{1}{n}$.

Für die über alle möglichen Zustände gemittelte Fidelity von $\hat{\rho}_{kl}$ mit dem ursprünglichen Zustand $|\chi\rangle$ ergibt sich [9]:

$$F = \frac{2}{n+1} \tag{1.11}$$

1.3 Quantenoperationen

Alle Möglichkeiten der Dynamik eines Quantensystems lassen sich auf unitäre Transformationen und Projektionsmessungen zurückführen.

1.3.1 Unitäre Dynamik

Die unitäre Dynamik der Dichtematrix wird durch die Liouville-Gleichung

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\hat{\rho} = \left[\hat{H}, \hat{\rho}\right] \tag{1.12}$$

gegeben. Dabei enthält der Hamiltonoperator $\hat{H}$ die physikalische Beschreibung des Systems.
Die Lösung der Liouville-Gleichung kann als

$$\hat{\rho}(t) = \hat{U}(t)\hat{\rho}_0\hat{U}(t)^+ \tag{1.13}$$

mit dem Anfangszustand $\hat{\rho}_0$ geschrieben werden. Der unitäre Zeitentwicklungsoperator $\hat{U}(t)$ ergibt sich dabei formal als

$$U(t) = \hat{T}e^{-i/\hbar\int_0^t dt'\hat{H}(t')} \tag{1.14}$$

$\hat{T}$ ist dabei der Zeitordnungsoperator. Ist $\hat{H}$ zeitunabhängig gilt:

$$U(t) = e^{-i/\hbar\hat{H}t} \tag{1.15}$$

Ist man nur an den Auswirkungen einer unitären Transformation auf einen Zustand interessiert, betrachtet man (1.13) mit dem gewünschten $\hat{U}$. In realen physikalischen Systemen ist dieses $\hat{U}$ dann durch eine zeitliche Entwicklung mit entsprechendem $\hat{H}$ zu implementieren.

1.3.2 von Neumann-Messungen

Eine Messung wird durch einen hermitschen Operator $\hat{A}$, der mit der zu messenden Observable A korrespondiert, beschrieben. In Spektraldarstellung dargestellt gilt:

$$\hat{A} = \sum_i a_i \hat{P}_i \tag{1.16}$$

mit den Eigenwerten a_i als möglichen Messergebnissen. Die $\hat{P}_i$ sind die Projektoren in den zum Eigenwert a_i gehörenden Unterraum mit $\sum_i \hat{P}_i = \hat{1}$. Für nicht entartete Eigenwerte gilt $\hat{P}_i = |a_i\rangle \langle a_i|$. Die Anzahl der Messergebnisse ist also auf die Dimension des Hilbertraums beschränkt. Wird nun eine Messung der Observable A durchgeführt, so liefert die Messung mit der Wahrscheinlichkeit p_i das Ergebnis a_i. Für die Wahrscheinlichkeiten gilt:

$$p_i = \mathrm{Tr}\{\hat{\rho}\hat{P}_i\} \tag{1.17}$$

Nach dem Projektionspostulat geht der Zustand nach der Messung in den Zustand

$$\hat{\rho}' = \frac{1}{p_i}\hat{P}_i\hat{\rho}\hat{P}_i \tag{1.18}$$

Die Messung wirkt sich also durch eine nichtlineare Projektion in den zum Messergebnis gehörenden Unterraum aus. Ist der gemessene Eigenwert nicht entartet, geht das System in den reinen Zustand $\hat{\rho}' = |a_i\rangle \langle a_i|$ über.

Für den Fall, dass eine Messung durchgeführt wurde, das Ergebnis aber nicht bekannt ist, oder der Messung an einem Ensemble gleich präparierter Systeme, geht der Zustand in eine mit den Messwahrscheinlichkeiten gewichtete Mischung der Einzelergebnisse über. Dies entspricht einer klassischen Erwartungswertbildung. Man erhält:

$$\hat{\rho}' = \sum_i p_i \hat{\rho}_i' = \sum_i \hat{P}_i\hat{\rho}\hat{P}_i \tag{1.19}$$

Die Operation ist linear und entspricht der Projektion des Zustands in den durch die Eigenzustände des Messoperators aufgespannten klassischen Unterraums.

Ist $\hat{\rho}$ ein reiner Zustand $|\psi\rangle$, ergibt sich:

$$p_i = \langle\psi|\hat{P}_i|\psi\rangle \quad , \quad |\psi'\rangle = \frac{1}{\sqrt{p_i}}\hat{P}_i|\psi\rangle \tag{1.20}$$

Für das Ergebnis der Messung und den Zustand $\hat{\rho}'$ ist nur der in den durch die Projektoren $\hat{P}_i$ aufgespannten klassischen Unterraum projizierte Anteil des Zustands entscheidend, denn es gilt:

$$p_i = \mathrm{Tr}\{\hat{\rho}\hat{P}_i\} = \mathrm{Tr}\Big\{\sum_k \hat{P}_k\hat{\rho}\hat{P}_k\hat{P}_i\Big\} \tag{1.21}$$

und

$$\hat{\rho}' = \frac{1}{p_i}\hat{P}_i\sum_k \hat{P}_k\hat{\rho}\hat{P}_k\hat{P}_i \tag{1.22}$$

1.3.3 Verallgemeinerte Messungen

Von Neumann-Messungen stellen nicht den allgemeinsten Fall einer Messung dar. Durch Einbeziehung von Hilfssystemen lassen sich verallgemeinerte Messungen realisieren. Dabei ist die Anzahl der Messergebnisse nicht mehr auf die Dimension des gemessenen Systems beschränkt. Die allgemeinste Form einer Messung bieten die sogenannten 'positve operator-valued measures' (POVM) [10][11]. Dies ist ein Satz $\{\hat{E}_\alpha\}$ von Operatoren, die folgende Eigenschaften erfüllen:

- $\sum_\alpha \hat{E}_\alpha = 1$
- Alle $\hat{E}_\alpha$ sind hermitsch
- Alle Eigenwerte der $\hat{E}_\alpha \geq 0$

Damit ist die Größe

$$p_\alpha = \mathrm{Tr}\{\hat{\rho}\hat{E}_\alpha\} \geq 0 \tag{1.23}$$

reell, und es gilt $\sum_\alpha p_\alpha = 1$. Die p_i lassen sich demnach als Wahrscheinlichkeiten interpretieren. Die $\{\hat{E}_\alpha\}$ müssen nicht orthogonal, und es können beliebig viele sein. Die Messung für jeden Satz dieser Operatoren lässt sich folgendermaßen realisieren [10]: Zunächst nimmt man zu dem zu messenden System ein Hilfssystem (ancilla) dazu. Es kann so viele Dimensionen haben wie nötig. Dann lässt man das Gesamtsystem sich unitär entwickeln und misst das Hilfssystem.

Um den Zustand zu ermitteln, in den das System nach der Messung übergeht, definiert man die Operatoren $M_{\beta\alpha}$:

$$\hat{E}_\alpha = \sum_\beta \hat{M}^+_{\beta\alpha}\hat{M}_{\beta\alpha} \tag{1.24}$$

Dann ergibt sich:

$$\hat{\rho}' = \frac{1}{p_\alpha}\sum_\beta \hat{M}_{\beta\alpha}\hat{\rho}\hat{M}^+_{\beta\alpha} \tag{1.25}$$

Da die $\{M_{\beta\alpha}\}$ nur die Bedingung (1.24) erfüllen müssen, ist der Zustand nach der Messung von der genauen Realisierung der Messung abhängig.

Eine Messung, bei der für jedes α nur ein β in (1.24) existiert, heißt effizient. Dann werden reine Zustände auf reine Zustände abgebildet. Für den reinen Zustand $|\psi\rangle$ folgt dann:

$$p = \langle\psi|\hat{E}_\alpha|\psi\rangle \quad , \quad |\psi'\rangle = \frac{1}{\sqrt{p_\alpha}}\hat{M}_\alpha|\psi\rangle \tag{1.26}$$

1.3.4 Allgemeine Quantenoperationen

Die allgemeinsten Quantenoperationen sind nur durch die Bedingung beschränkt, eine Dichtematrix wieder auf eine Dichtematrix abzubilden. Dies ist durch die sogenannten 'vollständig positiven Operator Abbildungen' gegeben [12][10]. Die Abbildung sind mit dem Superoperator $\mathcal{E}(\hat{\rho})$ gegeben durch:

$$\hat{\rho} \to \hat{\rho}' = \frac{\mathcal{E}(\hat{\rho})}{\mathrm{Tr}\{\mathcal{E}(\hat{\rho})\}} \tag{1.27}$$

Jeder Superoperator $\mathcal{E}(\hat{\rho})$ ist dabei darstellbar als:

$$\mathcal{E}(\hat{\rho}) = \sum_\mu \hat{N}_\mu \hat{\rho} \hat{N}_\mu^+ \tag{1.28}$$

Darunter fallen unitäre Transformationen, verallgemeinerte Messungen und Wechselwirkungen mit der Umgebung. Es lässt sich zeigen, dass jedes sich $\mathcal{E}(\hat{\rho})$ durch Ankopplung eines Hilfssystems, unitäre Transformationen des Gesamtsystems und Projektionsmessungen realisieren lässt.

Im speziellen Fall, dass gilt $\sum_\mu \hat{N}_\mu^+ \hat{N}_\mu = 1$ ist $\mathcal{E}(\hat{\rho})$ spurerhaltend, und damit die gesamte Abbildung linear. Dies ist der Fall für alle durch unitäre Prozesse realisierbaren Abbildungen. Aber auch für jede Art von Messungen, wenn das Messergebnis unbekannt bleibt, wie auch für Ensemblemessungen. Denn dann muss über alle möglichen Messwerte klassisch gemittelt werden und es gilt:

$$\hat{\rho}' = \sum_\alpha p_\alpha \hat{\rho}'_\alpha = \sum_{\alpha,\beta} \hat{M}_{\beta,\alpha} \hat{\rho} \hat{M}_{\beta,\alpha}^+ \tag{1.29}$$

Die $\hat{M}_{\alpha\beta}$ erfüllen die Beziehung $\sum_{\alpha,\beta} \hat{M}_{\beta,\alpha}^+ \hat{M}_{\beta,\alpha} = \hat{1}$.

1.4 Verschränkung und Separabilität

Ein Quantenzustand, bestehend aus 2 Subsystemen heißt separabel, wenn es möglich ist, ihn nur durch lokale Operationen an den beiden Subsystemen zu präparieren. Ein separabler Zustand enthält also höchstens klassische Korrelationen zwischen den Subsystemen. Dies führt zu einer Dichtematrix, die darstellbar ist als klassische Mischung von Produktzuständen [13] [14]:

$$\hat{\rho} = \sum_i p_i \hat{\rho}_i^1 \otimes \hat{\rho}_i^2 \tag{1.30}$$

mit $\sum_i p_i = 1$. Alle Dichtematrizen, die sich nicht in dieser Form darstellen lassen, heißen verschränkt. Verschränkte Zustände enthalten Korrelationen, die nicht klassisch interpretierbar sind. Für reine Zustände vereinfacht sich die Bedingung für Separabilität auf:

$$\hat{\rho}_p = \hat{\rho}_p^1 \otimes \hat{\rho}_p^2 \tag{1.31}$$

wenn $\hat{\rho}_p, \hat{\rho}_p^1$ und $\hat{\rho}_p^2$ reine Zustände sind.

Beispiel: Werner-Zustände

Werner-Zustände sind definiert als Mischung eines maximal verschränkten Zustandes mit dem total gemischten Zustand:

$$\hat{\rho} = (1-x)\frac{1}{n}\hat{1} + x|\psi\rangle\langle\psi| \tag{1.32}$$

n ist dabei die Dimension des Raumes, $|\psi\rangle$ ein maximal verschränkter Zustand (s. Abschnitt 1.7). Es lässt sich zeigen, dass diese Zustände separabel sind für [15]:

$$x \leq \frac{1}{1+n} \tag{1.33}$$

1.5 Quantennetzwerke

Ein System, bestehend aus mehreren einzelnen unterscheidbaren Quantensystemen bildet ein Quantennetzwerk. Die Unterteilung in Untersysteme ist dabei durch die jeweilige physikalische Fragestellung bedingt. Beispielsweise können in einem System aus mehreren Spins die einzelnen Spins als Subsysteme aufgefasst werden. Die Beschreibung von Quantennetzwerken erfolgt im Produkthilbertraum aus den Hilberträumen der einzelnen Subsysteme.

$$H_{Netz} = H^{(1)} \otimes H^{(2)} \otimes \cdots \otimes H^{(N)} \tag{1.34}$$

Seine Dimension $\mathcal{N}$ ergibt als Produkt der Dimensionen der Subsysteme. $\mathcal{N} = \prod_\mu n^\mu$. Eine Operatorbasis bilden die Produkte der Übergangsoperatoren der einzelnen Subsysteme:

$$P_{ij}^{(1)} \otimes P_{kl}^{(2)} \otimes \cdots \otimes P_{mn}^{(N)} = |i\rangle\langle j| \otimes |k\rangle\langle l| \otimes \cdots \otimes |m\rangle\langle n| \tag{1.35}$$

1.5.1 Cluster-Operatoren und -Darstellung

Eine sinnvolle Basis zur Darstellung von Operatoren in Quantennetzwerken stellen Clusteroperatoren dar. Sie sind definiert als das Produkt der Subsystembasisoperatoren. Im Falle hermitscher Operatoren bieten sich als lokale Basisoperatoren die Generatoren der SU(n)-Gruppe an. Die m-Clusteroperatoren ergeben sich als:

$$
\begin{aligned}
m = 0 \;&:\; \hat{1} \\
m = 1 \;&:\; \hat{\lambda}^{(1)}\,,\; \hat{\lambda}^{(2)}\,,\; \ldots\,,\; \hat{\lambda}^{(N)} \\
m = 2 \;&:\; \hat{\lambda}^{(1)} \otimes \hat{\lambda}^{(2)}\,,\; \hat{\lambda}^{(1)} \otimes \hat{\lambda}^{(3)}\,,\; \ldots\,,\; \hat{\lambda}^{(N-1)} \otimes \hat{\lambda}^{(N)} \\
m = 3 \;&:\; \hat{\lambda}^{(1)} \otimes \hat{\lambda}^{(2)} \otimes \hat{\lambda}^{(3)}\,,\; \ldots\,,\; \hat{\lambda}^{(N-2)} \otimes \hat{\lambda}^{(N-1)} \otimes \hat{\lambda}^{(N)} \\
&\vdots
\end{aligned}
\tag{1.36}
$$

Wobei die Operatoren in den nicht aufgeführten Subsystemen als Identität wirken. Der Vorteil dieser Basis ist, dass man an einer Entwicklung leicht lokale, bilokale und alle höheren Anteile erkennen kann. Man erhält eine hierarchische Struktur bezüglich der beteiligten Subsysteme.

Die Entwicklung des Dichteoperators nach Clusteroperatoren ergibt sich als:

$$
\hat{\rho} = \frac{1}{\mathcal{N}}(\hat{1} + \lambda_i^\mu \hat{\lambda}_i^\mu + \underset{\mu<\nu}{K_{ij}^{\mu\nu}}\, \hat{\lambda}_i^\mu \hat{\lambda}_j^\nu + \underset{\mu<\nu<\sigma}{K_{ijk}^{\mu\nu\sigma}}\, \hat{\lambda}_i^\mu \hat{\lambda}_j^\nu \hat{\lambda}_k^\sigma + \cdots) \tag{1.37}
$$

Der Übersicht halber wird die Summenkonvention verwendet, d.h. sowohl über die griechischen Subsystemindizes wie auch über die deutschen Indizes wird summiert. Die griechischen Indizes laufen dabei unter Berücksichtigung der explizit angegebenen Nebenbedingungen von $1 < \mu < N$, für die deutschen gilt $1 < i < {n_\mu}^2 - 1$.

Die Entwicklungskoeffizienten ergeben sich aus:

$$
\begin{aligned}
\lambda_i^\mu &= \mathrm{Tr}\left\{\hat{\rho}\hat{\lambda}_i^\mu\right\} \\
K_{ij}^{\mu\nu} &= \mathrm{Tr}\left\{\hat{\rho}\hat{\lambda}_i^\mu \hat{\lambda}_j^\nu\right\} \\
K_{ijk}^{\mu\nu\sigma} &= \mathrm{Tr}\left\{\hat{\rho}\hat{\lambda}_i^\mu \hat{\lambda}_j^\nu \hat{\lambda}_k^\sigma\right\} \\
&\vdots
\end{aligned}
\tag{1.38}
$$

Der Zustand des Netzwerks ist vollständig durch diese reellen Koeffizienten definiert. Die lokalen Kohärenzvektoren λ^μ sind dabei durch die auf ein Subsystem reduzierten Dichteoperatoren bestimmt. Sie enthalten die vollständige lokal erreichbare Information des Quantennetzwerks. Die $K^{\mu\nu}$ enthalten die Korrelationen zwischen zwei Subsystemen. Entsprechend enthalten die weiteren $K_{ij..}^{\mu\nu..}$ alle höheren Korrelationen.

1.5.2 Verschränkungstensoren

Die Korrelationstensoren enthalten auch noch Korrelationen niedrigerer Ordnung. Um die reinen Korrelationen anzugeben, ist es deshalb sinnvoll die Verschrän-

kungstensoren [16]

$$\begin{aligned} M_{ij}^{\mu\nu} &= K_{ij}^{\mu\nu} - \lambda_i^\mu \lambda_j^\nu \\ M_{ijk}^{\mu\nu\sigma} &= K_{ijk}^{\mu\nu\sigma} - \lambda_i^\mu M_{jk}^{\nu\sigma} - \lambda_j^\nu M_{ik}^{\mu\sigma} - \lambda_k^\sigma M_{ij}^{\mu\nu} - \lambda_i^\mu \lambda_j^\nu \lambda_k^\sigma \\ &\vdots \end{aligned} \tag{1.39}$$

zu definieren, indem man von den $K^{\mu\nu\cdot\cdot}$ alle niedrigeren Korrelationen abzieht. Allgemein lässt sich dies auf das Problem der Partitionierung einer finiten Menge [17] zurückführen. Denn die niedrigeren Korrelationen stellen gerade die Summe aller Möglichkeiten dar, die Menge der Indizes zu partitionieren und damit in kleinere Korrelationen aufzuteilen [18]. Für m-Subsystemkorrelationen gilt :

$$K_{jk..}^{\mu\nu..} = \sum_{i=1}^{m} \mathcal{P}_m^i (M_{jk..}^{\mu\nu..}) \tag{1.40}$$

Dabei ist $\mathcal{P}_m^i(M_{jk..}^{\mu\nu..})$ die Summe aller möglichen Produkte aus i Verschränkungstensoren, die sich durch Partionierung der Subsystemindizes von $M_{jk..}^{\mu\nu..}$ in i Teile ergeben. Beispiel:

$$\begin{aligned} P_3^1(M_{ijk}^{123}) &= M_{ijk}^{123} \\ P_3^2(M_{ijk}^{123}) &= \lambda_i^1 M_{jk}^{23} + \lambda_j^2 M_{ik}^{13} + \lambda_k^3 M_{ij}^{12} \\ P_3^3(M_{ijk}^{123}) &= \lambda_i^1 \lambda_j^2 \lambda_k^3 \end{aligned} \tag{1.41}$$

Die $M^{\mu\nu\cdot\cdot}$ sind so gewählt, dass nur dann $M^{\mu\nu\cdot\cdot} \neq 0$, wenn sich die auf $M^{\mu\nu\cdot\cdot}$ beziehenden Subsysteme nicht als Produkt $\hat{\rho} = \hat{\rho}_{12..} \otimes \hat{\rho}_{\mu\nu..}$ schreiben lassen.

Im Fall reiner Zustände geben die $M^{\mu\nu\cdot\cdot}$ direkt die Verschränkungseigenschaften des Netzwerks an. Als Maß für die Größe der jeweiligen Verschränkung lässt sich daher die unter lokalen unitären Transformationen invariante Größe

$$\beta^{\mu\nu\lambda..} = \sum_{ijk..} M_{ijk..}^{\mu\nu\lambda..} M_{ijk..}^{\mu\nu\lambda..} \tag{1.42}$$

verwenden.

Für allgemeine Zustände bedeutet $\beta \neq 0$ nicht automatisch Verschränkung im Sinne von Abschnitt 1.4, sondern die m-Verschränkungstensoren geben lediglich die reinen m-Teilchenkorrelationen an. Die reinen m-Teilchenkorrelationen lassen sich für alle Arten von Zuständen angeben, auch für rein klassische Systeme. Auch Teile eines größeren reinen Zustands sind im allgemeinen gemischt. Trotzdem soll, auch wenn nicht ausdrücklich reine Zustände behandelt werden, für die $M^{\mu\nu\cdot\cdot}$ weiterhin der Terminus 'Verschränkungstensor' verwendet werden, was dann nicht bedeuten soll, dass es sich tatsächlich um verschränkte Zustände im Sinne von Abschnitt 1.4 handelt. Nur für reine Zustände ist der Verschränkungstensor, der alle Subsysteme enthält direkt mit den Verschränkungseigenschaften identifizierbar.

1.5.3 Transformationsverhalten

Die Operatoren $\hat{\lambda}_i$ verhalten sich unter lokalen unitären Transformationen vektoriell:

$$\hat{\lambda}_i' = \hat{U}^+ \hat{\lambda}_i \hat{U} = c_{ij} \hat{\lambda}_j \tag{1.43}$$

mit

$$c_{ij} = \frac{1}{n} \mathrm{Tr}\{\hat{U}^+ \hat{\lambda}_i \hat{U} \hat{\lambda}_j\} \tag{1.44}$$

Da $\hat{U}$ unitär ist, ist c_{ij} eine orthogonale Transformationsmatrix also $c_{ij}c_{ik} = \delta_{jk}$ [19]. Für n=2 sind dies alle Drehungen SO(3) im 3 dimensionalen Raum. Daraus ergibt sich für das Transformationsverhalten der Koeffizienten des Kohärenzvektors für eine lokale unitäre Transformation im Subsystem μ:

$$\lambda_i^{'\mu} = \mathrm{Tr}\{\hat{\lambda}_i^\mu \hat{U} \hat{\rho} \hat{U}^+\} = \mathrm{Tr}\{\hat{U}^+ \hat{\lambda}_i^\mu \hat{U} \hat{\rho}\} = c_{ij}^\mu \lambda_j^\mu \tag{1.45}$$

$$K_{ik}^{'\mu\nu} = \mathrm{Tr}\{\hat{\lambda}_i^\mu \hat{\lambda}_k^\nu \hat{U} \hat{\rho} \hat{U}^+\} = \mathrm{Tr}\{\hat{U}^+ \hat{\lambda}_i^\mu \hat{U} \hat{\lambda}_k^\nu \hat{\rho}\} = c_{ij}^\mu K_{jk}^{\mu\nu} \tag{1.46}$$

$$\vdots \tag{1.47}$$

Die λ_i^μ verhalten sich also unter lokalen unitären Transformationen vektoriell. In den Korrelationstensoren transformiert sich die zum Subsystem μ gehörende Komponente wie dieses Subsystem. Die restlichen Komponenten bleiben unberührt. Für die $M_{ik}^{\mu\nu}$ ergibt sich das gleiche Transformationsverhalten, denn

$$M_{ik}^{'\mu\nu} = K_{ik}^{'\mu\nu} - \lambda_i^{'\mu} \lambda_k^{'\nu} = c_{ij}^\mu K_{jl}^{\mu\nu} - c_{ij}^\mu \lambda_j^\mu \lambda_l^\nu = c_{ij}^\mu M_{jl}^{\mu\nu} \tag{1.48}$$

Aus diesem Transformationsverhalten ergibt sich, dass kovariant formulierte Gleichungen invariant unter lokalen unitären Transformationen sind. Dabei ist zu beachten, da sich die Indizes auf unterschiedliche Räume beziehen, dass nur Indizes des gleichen Subsystems kontrahiert werden dürfen.

Allgemeine, lokale und spurerhaltenden Quantenoperationen lassen sich ebenfalls in diese Form durch eine Transformationsmatrix mit

$$c_{ij} = \frac{1}{n} \sum_k \mathrm{Tr}(\hat{\lambda}_i \hat{N}_k \hat{\lambda}_j \hat{N}_k^+) \tag{1.49}$$

darstellen. Die c_{ij} sind im allgemeinen nicht mehr orthogonal.

1.5.4 Nichtlokale unitäre Transformationen

Bei nichlokalen unitären Transformationen werden die Blochvektorkomponenten gemischt. Ist $\hat{U}^{12}$ eine unitäre Transformation, die auf die Subsysteme 1 und 2

wirkt, so gibt sich mit (1.38) für die Entwicklungskoeffizienten von $\hat{\rho}' = \hat{U}^{12}\hat{\rho}\hat{U}^{12+}$:

$$\begin{aligned} \lambda_i^{1\prime} &= c_{ij}^{11}\lambda_j^1 + c_{ij}^{12}\lambda_j^2 + c_{ijk}^{1(12)}K_{jk}^{12} \\ \lambda_i^{2\prime} &= c_{ij}^{21}\lambda_j^1 + c_{ij}^{22}\lambda_j^2 + c_{ijk}^{2(12)}K_{jk}^{12} \\ K_{ij}^{12\prime} &= c_{ijk}^{(12)1}\lambda_k^1 + c_{ijk}^{(12)2}\lambda_k^2 + c_{ijkl}^{(12)(12)}K_{kl}^{12} \end{aligned} \tag{1.50}$$

Die Koeffizienten lassen sich zusammenfassen als:

$$c_{\alpha\beta}^{xy} = \frac{1}{n_1 n_2}\mathrm{Tr}\{\hat{U}^+\hat{\omega}_\alpha^x\hat{U}\hat{\omega}_\beta^y\} = c_{\beta\alpha}^{yx\,-1} \tag{1.51}$$

Wobei sich alle Koeffizienten durch die Möglichkeiten durch $x, y = 1, 2, (12)$ und $\hat{\omega}_\alpha^x = \hat{\lambda}_i^1, \hat{\lambda}_i^2, \hat{\lambda}_i^1\hat{\lambda}_j^2$ ergeben.

In den anderen Koeffizienten, die auch die Subsysteme 1 oder 2 enthalten, transformiert sich der Anteil von Subsystem 1 und 2 entsprechend. So gilt:

$$\begin{aligned} K_{ij..}^{1\mu..\prime} &= c_{il}^{11}K_{lj..}^{1\mu..} + c_{il}^{12}K_{lj..}^{2\mu..} + c_{ilm}^{1(12)}K_{lmj..}^{12\mu..} \\ K_{ij..}^{2\mu..\prime} &= c_{il}^{21}K_{lj..}^{1\mu..} + c_{il}^{22}K_{lj..}^{2\mu..} + c_{ilm}^{2(12)}K_{lmj..}^{12\mu..} \\ K_{ijm}^{12\mu..\prime} &= c_{ijl}^{(12)1}K_{l..}^{1\mu..} + c_{ijl}^{(12)2}K_{l..}^{2\mu} + c_{ijlk}^{(12)(12)}K_{lkm..}^{12\mu} \end{aligned} \tag{1.52}$$

Es werden also jeweils die Korrelationstensoren gemischt, die 1,2 und ansonsten die gleichen Subsysteme enthalten. Die Korrelationstensoren, die weder 1 und 2 enthalten, bleiben unverändert. Obwohl die Transformation lokal auf die Subsysteme 1 und 2 beschränkt ist, wirkt sie sich auch auf die Korrelationen mit den restlichen Subsystemen aus.

1.6 Reine 2-Teilchen-Systeme

Allgemein findet man für jeden reinen 2-Subsystem-Zustand $|\psi\rangle$ 2 lokale unitäre Transformationen $\hat{U}^1$ und $\hat{U}^2$, dass gilt:

$$|\psi'\rangle = \hat{U}^1\hat{U}^2|\psi\rangle = \sum_{i=0}^{n-1} a_i|ii\rangle \tag{1.53}$$

mit n reellen positiven Koeffizienten a_i. n ist die Dimension des kleineren Subsystems. Dies ist die sogenannte Schmidt-Zerlegung [10]. Lässt man für die a_i auch komplexe Zahlen zu, erhält man:

$$|\psi'\rangle = \sum_{i=0}^{n-1} e^{-i\varphi_i}a_i|ii\rangle \tag{1.54}$$

Dies kann aus (1.53) immer durch eine lokale Transformation der Form

$$\hat{U}_\varphi = \sum_i e^{-i\varphi_i}|i\rangle\langle i| \tag{1.55}$$

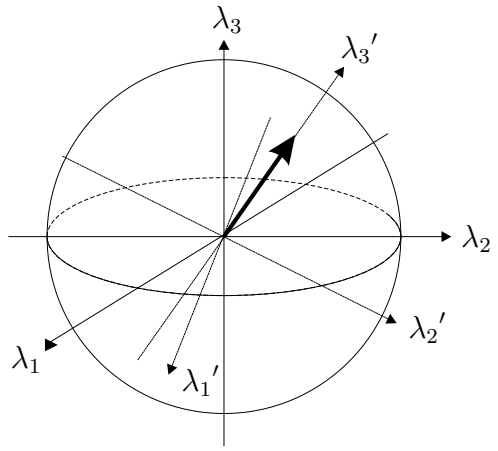


Abb. 1.3: 'Mitbewegtes' Koordinatensystem λ'

erreicht werden, wobei das Ergebnis unabhängig ist, auf welches Subsystem $\hat{U}_\varphi$ angewandt wird. Für die lokalen Dichteoperatoren ergibt sich dann:

$$\hat{\rho}_1 = \hat{\rho}_2 = \sum_i |a_i|^2 |i\rangle\langle i| \tag{1.56}$$

Sie sind unabhängig von den Phasen. Daher ändert die Transformation $\hat{U}_\varphi$ die lokalen Größen nicht. Die Freiheitsgrade dieser Phasen sind also nur in den Verschränkungseigenschaften sichtbar.

Für ein System aus zwei 2-Niveau-Systemen lässt sich dies im Blochvektorbild anschaulich darstellen. Entwickelt man den Zustand $|\psi\rangle = \cos\alpha|00\rangle + \sin\alpha e^{-i\varphi}|11\rangle$ in SU(2)-Clusteroperatoren, erhält man:

$$M_{ij} = \begin{pmatrix} \sqrt{1-\lambda^2}\cos\varphi & \sqrt{1-\lambda^2}\sin\varphi & 0 \\ \sqrt{1-\lambda^2}\sin\varphi & -\sqrt{1-\lambda^2}\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda^2 \end{pmatrix}, \ \lambda^1 = \lambda^2 = (0,0,\lambda) \tag{1.57}$$

Für einen allgemeinen Zustand kann man die Transformationen $\hat{U}^1$ und $\hat{U}^2$ als eine Transformation in ein 'mitbewegtes' Koordinatensystem auffassen, bei dem der Blochvektor immer in λ_3-Richtung zeigt. In diesem Koordinatensystem haben die Entwicklungskoeffizienten immer die Form (1.57). Die Transformation $\hat{U}_\varphi$ entspricht einer Drehung um die λ_3'-Achse, also einer Drehung um die Richtung der Blochvektors, die natürlich lokal nicht bemerkbar ist.

Im Verschränkungstensor ist die Richtung der Blochvektoren ausgezeichnet. Erst im maximal verschränkten Zustand mit $\lambda = 0$ sind alle Richtungen gleichberechtigt. Es lässt sich auch kein lokaler Blochvektor mehr definieren.

Die 6 Freiheitsgrade eines reinen 2x2-Zustands lassen sich auffassen als je 2 Freiheitsgrade für die Richtungen der beiden lokalen Blochvektoren, ein Freiheitsgrad beschreibt den Grad der Verschränkung, ausgedrückt durch die lokale

Blochvektorlänge λ, und der letzte beschreibt eine relative Phase bei lokalen Drehungen um die Richtung der Blochvektoren. Dieser Freiheitsgrad ist lokal nicht sichtbar, sondern nur im Verschränkungstensor.

Für höhere Dimensionen erhält man ein ähnliches Bild. Die lokalen Anteile des Zustands (1.54) liegen im durch die Basisvektoren $|i\rangle$ aufgespannten klassischen Unterraum. Dies entspricht den durch die $\hat{w}_l$ repräsentierten Blochvektorkompontenten. Man kann sich das mitbewegte Koordinatensystem so vorstellen, dass die lokalen Blochvektoren immer in diesem Unterraum liegen. Die Transformation $\hat{U}_\varphi$ verändert diesen Unterraum nicht und ist deshalb lokal nicht sichtbar. Die $4n-2$ Freiheitsgrade ergeben sich dann als $n-1$ relative Phasen, $n-1$ Komponenten des Unterraumes, die die Verschränkungen bestimmen, und jeweils n Komponenten für die Lage der Unterräume.

1.7 Maximal verschränkte 2-Teilchen-Systeme

Für ein aus 2 Subsystemen der Dimension n bestehendes Netzwerk, stellt der Zustand

$$|cat\rangle_{00} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=0}^{n-1} |i,i\rangle \tag{1.58}$$

einen Zustand maximaler Verschränkung dar. Dies sieht man an der lokalen Dichtematrix (1.56) mit den $\alpha_i = \frac{1}{\sqrt{n}}$. Alle anderen maximal verschränkten Zustände erhält man aus dem $|cat\rangle_{00}$ Zustand durch lokale unitäre Transformationen der Subsysteme. Dies folgt aus der Schmidt-Zerlegung. Da eine Transformation $\hat{U}$ an Subsystem 1 des $|cat\rangle_{00}$ Zustands ausgeführt den gleichen Zustand liefert wie die Transformation $\hat{U}^T$ an Subsystem 2, genügen Transformationen an einem Subsystem, um alle maximal verschränkten Zustände zu erreichen. $\hat{U}^T$ bedeutet dabei die transponierte Matrix zu $\hat{U}$, und ist wieder unitär.

1.7.1 Maximal verschränkte Basis

Durch Anwendung der unitären Transformation[1] $U_{ab} = \sum_{k=0}^{n-1} \omega^{bk} |k+a\rangle\langle k|$ mit der Abkürzung $\omega = e^{\frac{2\pi i}{n}}$ auf Subsystem 1, erhält man die 'Cat-States' [20]:

$$|cat\rangle_{a,b} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=0}^{n-1} \omega^{bj} \, |j+a, j\rangle \tag{1.59}$$

Sie bilden eine vollständige orthogonale Basis aus maximal verschränkten Zuständen, wobei die Zahlen a,b aus der Menge $[0, n-1]$ die n^2 möglichen Basiszustände indizieren. Für den Fall n=2 sind dies die 4 Zustände der Bell-Basis.

[1] In allen Gleichungen sollen, auch wenn dies nicht explizit gekennzeichnet ist, die Ausdrücke, die ein Niveau nummerieren als modulo n angenommen werden. Also $|k+a\rangle = |k+a \bmod n\rangle$ oder $a_{k+a} = a_{k+a \bmod n}$

Eine andere Basis aus maximalverschränkten Zuständen sind die Zustände

$$|\phi_{m,m'}\rangle = \frac{1}{n}\sum_{k,l=0}^{n-1} \omega^{kl+mk+m'l}|k,l\rangle \tag{1.60}$$

Man erhält sie durch Anwendung der unitären Transformation

$$U = \sum_{k,l=0}^{n-1} \omega^{kl}|k,l\rangle\langle k,l| \tag{1.61}$$

auf die Zustände der lokalen Produkt-Basis $|\phi_m\rangle|\phi_{m'}\rangle$ mit

$$|\phi_m\rangle = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=0}^{n-1} \omega^{km}|k\rangle \tag{1.62}$$

m und m' sind aus der Menge $[0, n-1]$. Da die Zustände $|\phi_m\rangle|\phi_{m'}\rangle$ eine vollständige orthogonale Basis bilden, gilt dies für die $|\phi_{m,m'}\rangle$ ebenso. Die Verschränkung lässt sich durch Spurbildung zeigen:

$$\begin{aligned} \rho_2 &= \mathrm{Tr}_1|\phi_{m,m'}\rangle\langle\phi_{m,m'}| && (1.63)\\ &= \frac{1}{n^2}\sum_{x,k,l,k',l'=0}^{n-1} \omega^{(-kl+k'l'+m(k-k')+m'(l-l'))}\langle x|k,l\rangle\langle k',l'|x\rangle_1 \\ &= \frac{1}{n^2}\sum_{x,l,l'=0}^{n-1} \omega^{(x(l'-l)+m'(l-l'))}|l\rangle\langle l'| = \frac{1}{n}\sum_{l=0}^{n-1}|l\rangle\langle l| && (1.64) \end{aligned}$$

Dabei wurde die Relation $\sum_{x=0}^{n-1} e^{\frac{2\pi i}{n}x(l'-l)} = n\delta_{l,l'}$ benutzt[2].

Für n=2 sind dies die Zustände:

$$\begin{aligned} |\phi_{0,0}\rangle &= \frac{1}{2}(|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle - |11\rangle) && (1.65)\\ |\phi_{0,1}\rangle &= \frac{1}{2}(|00\rangle - |01\rangle + |10\rangle + |11\rangle) \\ |\phi_{1,0}\rangle &= \frac{1}{2}(|00\rangle + |01\rangle - |10\rangle + |11\rangle) \\ |\phi_{1,1}\rangle &= \frac{1}{2}(|00\rangle - |01\rangle - |10\rangle - |11\rangle) \end{aligned}$$

[2]Bei der Anwendung dieser Relation muss beachtet werden, dass lediglich die Beziehung $l' - l = kn$, mit ganzzahligem k, gefordert wird. Sind aber alle Größen n-periodisch in den Variablen l und l', ist dies äquivalent zu $\delta_{l,l'}$

1.7.2 Cluster-Entwicklung maximal verschränkter Zustände

Für alle maximal verschränkten Zustände gilt: $\lambda^{1,2} = 0$ und $M_{ij}^{12} = K_{ij}^{12}$. Für den $|cat\rangle_{0,0}$-Zustand ist der Verschränkungstensor diagonal (s. Anhang):

$$M_{ij}^{cat_{00}} = n \begin{cases} -\delta_{ij} & : \quad \frac{n^2-n}{2} + 1 \leq i \leq n^2 - n \\ \delta_{ij} & : \quad \text{sonst} \end{cases} \tag{1.66}$$

Die Verschränkungstensoren aller anderen maximal verschränkten Zustände ergeben sich durch Anwendung einer unitären Transformation U auf ein Subsystem, beispielsweise Subsystem 1:

$$M_{ij} = c_{ik} M_{kj}^{cat_{00}} \tag{1.67}$$

Die c_{ik} ergeben sich aus U mit (1.44). Mit c_{ik}^{ab} aus U^{ab} ergeben sich die Verschränkungstensoren der Cat-States. Im allgemeinen sind die M_{ij} nicht mehr diagonal. Wegen $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ ist, da die c_{ij} Drehmatrizen sind, die Determinante der Verschränkungstensoren für alle maximal verschränkten Zustände gleich. Mit $M_{ik}^{cat_{00}}$ folgt:

$$\det M = \pm 1 \tag{1.68}$$

Die M_{ij} sind also orthogonale Matrizen. Es gilt daher für alle maximal verschränkten Zustände:

$$M_{ij} M_{ik} = \delta_{jk} \tag{1.69}$$

Dies wird wichtig sein, sollen die M_{ij} als Abbildungsmatrizen interpretiert werden.

Kapitel 2

Informationstheorie

2.1 Klassische Information und Entropie

Die Quantifizierung der Information und die Verknüpfung von Information und Entropie geht auf Shannon zurück [21]. Den Informationsgehalt eines klassischen Systems ergibt sich aus der Frage: Gegeben seien n Ereignisse i, die bei Messung an einem System A durch einen Beobachter mit einer Wahrscheinlichkeitsverteilung p_i eintreten. Wieviel Information gewinnt man, wenn das Ereignis i auftritt? Die Information eines Systems stellt also den Mangel an Wissen eines Außenstehenden über die Präparation eines System dar.

Damit lassen sich folgende Postulate für ein Informationsmaß I formulieren:

- $I = 0$ genau dann, wenn ein $p_i = 1$. Das Ereignis i ist sicher, und damit bringt eine Messung keinen Informationsgewinn.

- Sind die $p_i = \frac{1}{n}$, also gleichverteilt, soll I maximal werden. Eine Messung liefert die maximal mögliche Erkenntnis.

- Sind für ein zusammengesetztes System die Ereignisse i und j der Einzelsysteme A und B statistisch unabhängig, die Wahrscheinlichkeit für ihr auftreten $p_{i,j} = p_i p_j$, so ist die Information additiv bezüglich der Informationen der Teilsysteme: $I_{A,B} = I_A + I_B$

Ausgehend von diesen Postulaten ergibt sich für den Informationsgehalt eines Systems die Shannonsche Formel:

$$I = -\sum_{i=1}^{n} p_i \ln p_i \tag{2.1}$$

Der Maximalwert $I_{max} = \ln(n)$ für ein System mit n möglichen Ereignissen wird erreicht, wenn die n Ereignisse gleich wahrscheinlich sind.

Nach der Messung aller unabhängigen Variablen befindet sich das System in einem reinen Zustand mit $I = 0$. Ein Beobachter hat keinen Informationsmangel mehr.

Für zusammengesetzte Systeme ist die Frage interessant, welche Information man über das eine System gewinnt, wenn man das andere vollständig kennt. Man definiert daher die bedingte Information $I_{B|A}$ als die in Teilsystem B noch enthaltene Information, wenn A gemessen wurde [22]:

$$I_{B|A} = I_{A,B} - I_A = -\sum_{i,j} p_{i,j} \ln p_{j|i} = -\sum_i p_i \sum_j p_{j|i} \ln p_{j|i} \tag{2.2}$$

Dabei treten die Ereignisse i in Subsystem A und j in Subsystem B auf. Die $p_{j|i} = \frac{p_{i,j}}{p_i}$ sind die bedingten Wahrscheinlichkeiten, dass Ereignis j in B eintritt, wenn i in A eingetreten ist. Sind die Systeme statistisch unabhängig, also $p_{j|i} = \frac{p_i p_j}{p_i} = p_j$, so ist $I_{B|A} = I_B$. Subsystem B verliert keine Information durch Messung von A. Dies stellt auch gleichzeitig den Maximalwert für $I_{B|A}$ dar. Sind beide Systeme vollständig korreliert, so ist B nach der Messung von A vollständig bestimmt, also $I_{B|A} = 0$. Es gilt also $0 \leq I_{B|A} \leq I_B$ oder:

$$\max(I_A, I_B) \leq I_{A,B} \leq I_A + I_B \tag{2.3}$$

Die Gesamtinformation eines zusammengesetzten Systems ist nach oben durch die Summe der Einzelinformationen beschränkt. Dieser Fall tritt bei unkorrelierten Systemen auf. Korrelationen enthalten Information.

Die Korrelationen werden durch die gegenseitige Information

$$I_{A:B} = I_A - I_{A|B} = I_A + I_B - I_{A,B} = I_B - I_{B|A} = I_{B:A} \tag{2.4}$$

bestimmt. $I_{A:B}$ ist die Information, die man über System A erhält, wenn man B vollständig kennt. Wegen der Symmetrie $I_{A:B} = I_{B:A}$ gewinnt man die gleiche Menge an Information über B, wenn man A vollständig kennt.

Auf Grund der Grenzen für $I_{A,B}$ ergibt sich für die Korrelationen eine obere Schranke:

$$0 \leq I_{A:B} \leq \min(I_A, I_B) \tag{2.5}$$

Außerdem gilt noch die Beziehung $I_{A,B} = I_{A|B} + I_{B|A} + I_{A:B}$. Die Gesamtinformation setzt sich also aus den bedingten Informationen und den Korrelationen zusammen.

Entropie

Die Informationstheorie liefert auch einen Zugang zur klassischen Entropie. Klassisch wird die Entropie über die Anzahl der Mikrozustände im Phasenraum, die mit den gegebenen makroskopischen Nebenbedingungen verträglich sind, definiert. Unter der Annahme, dass die Mikrozustände gleich wahrscheinlich sind,

beschreibt die Entropie die Unkenntnis über das System, wenn nur die makroskopischen Nebenbedingungen bekannt sind. Dies führt zur informationstheoretischen Definition der Entropie:

$$S = k_B \max(I) = \max(-k_B \sum_i p_i \ln p_i) \tag{2.6}$$

Da die klassische Entropie nur im thermischen Gleichgewicht definiert ist, gilt die Äquivalenz der Shannonschen Information mit der Entropie nur für die Wahrscheinlichkeitsverteilung des thermischen Gleichgewichts. Diese ist dadurch gegeben, dass I unter den makroskopischen Nebenbedingungen maximal ist. Das System nimmt den Zustand maximaler Unbestimmtheit ein. Mit diesem Extremalprinzip lässt sich die Verteilung der p_i, die im thermischen Gleichgewicht eingenommen wird, ermitteln [23]. Für mikrokanonische Randbedingungen ergibt sich gerade die Gleichverteilung, für ein kanonisches Ensemble die Boltzmannverteilung. Die Shannoninformation kann daher auch als Erweiterung der Entropie auf Nichtgleichgewichtssystme betrachtet werden.

2.2 Quanteninformationstheorie

Analog zur Shannoninformation führt man für Quantensysteme die von Neumann Entropie [8]

$$S = -\mathrm{Tr}\{\hat{\rho} \ln \hat{\rho}\} \tag{2.7}$$

für den Zustand $\hat{\rho}$ ein. In der Diagonaldarstellung des Dichteoperators $\hat{\rho}$ ergibt sich:

$$S = -\sum_i p_i \ln p_i \tag{2.8}$$

mit den Eigenwerten p_i des Dichteoperators. S gibt also die Unkenntnis darüber an, wie der Zustand aus den reinen Zuständen der Eigenbasis zusammengesetzt ist. Gilt die Eigenbasis als bekannt, was aber einer zusätzlichen Information entspricht, beschreibt S analog zur klassischen Information die Unkenntnis über die Zusammensetzung des Zustands. Ansonsten macht S lediglich Aussagen darüber, wie rein bzw. gemischt der Zustand ist. Für reine Zustände ist S minimal, $S = 0$. Für den maximal gemischten Zustand eines n-Niveau-Systems wird S maximal mit $S = \ln n$.

S ist invariant unter unitären Transformationen. Unter allgemeinen Quantenoperationen kann S sowohl zu- wie abnehmen. Für Projektionsmessungen kann S nur abnehmen oder gleich bleiben.

Für ein System aus mehreren Subsystemen lässt sich die lokale Entropie angeben als:

$$S_A = -\mathrm{Tr}\{\hat{\rho}_A \ln \hat{\rho}_A\} \tag{2.9}$$

Befindet sich das System in einem Produktzustand, also $\hat{\rho}_{A,B} = \hat{\rho}_A \otimes \hat{\rho}_B$, so gilt:

$$S_{A,B} = S_A + S_B \tag{2.10}$$

Allgemein ist die Gesamtentropie nach dem Theorem von Araki und Lieb [24] beschränkt durch:

$$|S_A - S_B| \leq S_{A,B} \leq S_A + S_B \tag{2.11}$$

Ist das Gesamtsystem in einem reinen Zustand, also $S_{A,B} = 0$, so folgt $S_A = S_B$. Die lokale Entropie ist daher ein Maß für Verschränkung. Im Gegensatz zur klassischen Information (2.3), liegt die untere Grenze niedriger als $\min(S_A, S_B)$. Quantenmechanische Korrelationen können lokale Entropie erzeugen. So ergibt sich beispielsweise für dem maximal verschränkten EPR-Zustand: $|\psi\rangle = |0\rangle_A|1\rangle_B - |1\rangle_A|0\rangle_B$, $S_A = S_B = \ln 2$. Die Subsysteme befinden sich im totalgemischten Zustand, obwohl das Gesamtsystem rein ist mit $S_{A,B} = 0$.

Dies ist ein entscheidender Unterschied zur klassischen Theorie. Klassisch ist es immer möglich, Entropie auf Unkenntnis über den genauen Zustand des Systems zurückzuführen. Etwa, weil nur Information über makroskopische Größen zugänglich, oder keine vollständige Kontrolle über die Präparation des Zustands möglich ist. In der Quantentheorie ist es möglich, dass trotz vollständiger Kontrolle des Gesamtsystems, lokale Zustände nur unvollständig bekannt sind. Es ist ununterscheidbar und damit äquivalent, ob ein System Teil eines größeren verschränkten Systems ist, oder ob lediglich klassischer Kontrollmangel über die genaue Zusammensetzung des Systems vorliegt.

Wie auch für die klassische Information lässt sich die gegenseitige Entropie definieren:

$$S_{A:B} = S_A + S_B - S_{A,B} \tag{2.12}$$

Im Gegensatz zum klassischen Fall folgen aus (2.11) die Grenzen:

$$0 \leq S_{A:B} \leq 2\min(S_A, S_B) \tag{2.13}$$

Der Anteil, der über die klassischen Grenzen hinausgeht, beschreibt die durch die quantenmechanischen Korrelationen erzeugte Entropie.

Die Entropie ist eine konkave Funktion, also:

$$S\Big(\sum_i p_i \hat{\rho}_i\Big) \geq \sum_i p_i S(\hat{\rho}_i) \tag{2.14}$$

Das Unwissen über den aus den Zuständen ρ_i gemischten Zustands ist größer, als die durchschnittliche Unwissenheit der einzelnen Zustände ρ_i.

2.3 Klassische Information in Quantensystemen

In diesem Abschnitt werden einige Eigenschaften von klassischer Information im Sinne von Abschnitt 2.1 in Quantensystemen erörtert. Welche Möglichkeiten bieten Quantensysteme, klassische Information zu speichern bzw. zu übertragen.

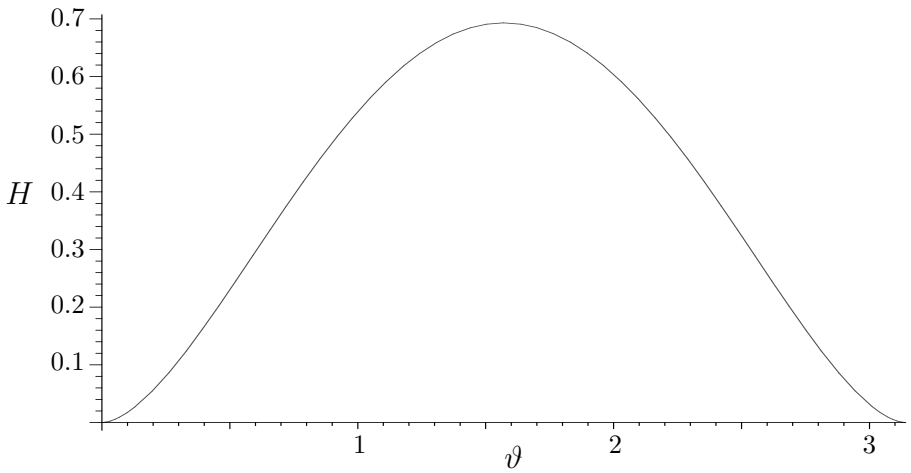


Abb. 2.1: Holevo-Grenze für die Speicherung der Information $I(X) = \ln 2$ mit $p_1 = p_2 = \frac{1}{2}$ in den reinen Zuständen $|0\rangle$ und $\cos\vartheta|0\rangle + \sin\vartheta e^{\varphi}|1\rangle$. Der Maximalwert $H = \ln 2$ wird für $\vartheta = \frac{\pi}{2}$, also orthogonale Zustände erreicht.

2.3.1 Speicherung klassischer Information

Um klassische Information in einem Quantensystem zu speichern, bzw. diese durch Senden des Quantensystems an Bob zu übermitteln, präpariert Alice das System im aus den Zuständen $\hat{\rho}_i$ mit den Wahrscheinlichkeiten p_i zusammengesetzten Zustand. Also $\hat{\rho} = \sum_i p_i \hat{\rho}_i$. Die Information, die zur Präparation nötig ist, ist $I(X) = -\sum_i p_i \ln p_i$. Der Zustand wird jetzt an Bob gesendet. Dieser hat nun die Möglichkeit, an dem Zustand allgemeine Messungen durchzuführen. Der Anteil der Information aus X, den Bob durch seine Messergebnisse Y gewinnen kann, wird beschrieben durch die gegenseitige Information I(X:Y). Kann Bob die präparierte Information vollständig auslesen, ist I(X:Y)=I(X). Erfährt er nichts, ist I(X:Y)=0. Für Messungen an nur einem Quantensystem, ergibt sich als obere Grenze für I(X:Y) die sogenannte Holevo-Grenze [25]:

$$I(X:Y) \leq H = S(\hat{\rho}) - \sum_i p_i S(\hat{\rho}_i) \leq I(X) \tag{2.15}$$

Für reine Zustände verschwindet der Term $\sum_i p_i S(\hat{\rho}_i)$. Das rechte Gleichheitszeichen gilt nur für den Fall von reinen und orthogonalen $\hat{\rho}_i$. Nur in diesem Fall ist es möglich, die ganze gespeicherte Information wieder auszulesen. Da $\max(S(\hat{\rho})) = \ln n$, folgt aus (2.15), dass trotz des größeren Zustandsraums eines quantenmechanischen n-Niveau-Systems maximal auch nur die klassiche Information $\ln n$ gespeichert werden kann [26].

Die maximale klassische Information kann damit mittels eines Quantenzustands übertragen werden, indem Alice den Zustand aus einem Satz orthogonaler

reiner Zustände präpariert. Bob kann nun Messungen in der Basis dieser Zustände vornehmen und damit die Zustände unterscheiden. Dies ist völlig analog dem klassischen Fall.

2.3.2 Dense-Coding

Durch Hinzunahme eines weiteren Quantensystems lässt sich die Kapazität des Übertragungskanals vergrößern, im besten Fall verdoppeln. Dies funktioniert folgendermaßen: Alice und Bob teilen sich einen maximal verschränkten Zustand aus Subsystemen der Dimension n. Dies kann der $|cat\rangle_{00}$ Zustand sein. Alice führt nun an ihrem Teil eine unitäre Transformation durch. Sie kann durch eine der n^2 lokalen unitären Drehungen U_{ab} alle Zustände einer maximal verschränkten orthogonalen Basis herstellen.

$$\sum_k \omega^{bk}|k+a\rangle\langle k|cat\rangle_{00} = \sum_k \omega^{bk}|k+a\rangle|k\rangle \tag{2.16}$$

Dann sendet sie ihr System an Bob, der dann beide Teile des Zustands hat. Sein Gesamtsystem hat die Dimension n^2. Er kann durch Messung die n^2 verschiedenen maximal verschränkten Zustände unterscheiden und somit auf die angewandte Transformation schließen. Damit ist es möglich, die klassische Information $2\ln 2$ zu übermitteln, was der doppelten Kapazität des übermittelten Quantensystems entspricht.

Für allgemeine reine Zustände gilt: Die maximale Menge an Information, die durch Dense-Coding übertragen werden kann, ist [27]:

$$I = S_A + \ln n \tag{2.17}$$

Dabei ist S_A die von Neumann-Entropie und n die Dimension des gesendeten Quantenzustands. Der Kapazitätsgewinn S_A durch das Dense-Coding ist direkt abhängig von der Verschränkung. Das Maximum ergibt sich für maximal verschränkte Zustände mit $S_A = \ln n$. Für Produktzustände ergibt sich $\ln n$, da jetzt ein einzelnes Quantensystem übermittelt wird.

Es ist möglich, in verschränkten Systemen mehr Information durch eine lokale Transformation zu speichern, da, durch lokale Transformationen aus einem maximal verschränkten Zustand alle anderen hergestellt werden können. Alice kann demnach alle Zustände einer Basis im Gesamtsystem der Dimension n^2 präparieren. Der Preis dafür ist, dass zum Auslesen der Information das ganze System, also beide Teilsysteme, benötigt werden. Mit klassischen Systemen ist dies nicht möglich, da hier reine Zustände immer Produktzustände sind.

2.3.3 Informationsübertragung durch Korrelationen

Da sich im allgemeinen in verschränkten Zuständen bei einer Messung an einem Teilsystem der Zustand des restlichen Systems ebenfalls ändert (s. Kapitel 3),

stellt sich die Frage, ob es möglich ist, auf diese Weise klassische Information zu übertragen. Es lässt sich zeigen, dass dies nicht möglich ist.

Angenommen, Alice und Bob teilen sich ein Quantensystem beliebiger Größe in einem beliebigen, aber bekannten Zustand $\hat{\rho}_{AB}$. Alice kann nun an ihrem Subsystem beliebige lokale Quantenoperationen durchführen. Dies können lokale unitäre Transformationen, Projektionsmessungen, Ankopplungen an weitere Systeme oder verallgemeinerte Messungen sein, um so, eventuell durch Wahl einer bestimmten Messbasis, klassische Information zu codieren. Solange Bob die Messergebnisse nicht kennt, werden diese Operationen für ihn, wie in Abschnitt 1.3.4 gezeigt, durch einen lokalen, linearen und spurerhaltenden Superoperator $\mathcal{E}(\hat{\rho})$ beschrieben. Für Bobs lokale Dichtematrix gilt dann:

$$\begin{aligned} \rho'_B &= \mathrm{Tr}_A\{\rho'\} = \mathrm{Tr}_A\{\mathcal{E}(\hat{\rho})\} = \mathrm{Tr}_A\Big\{\sum_\mu \hat{N}_\mu \hat{\rho} \hat{N}_\mu^+\Big\} \\ &= \mathrm{Tr}_A\Big\{\sum_\mu \hat{N}_\mu^+ \hat{N}_\mu \hat{\rho}\Big\} = \mathrm{Tr}_A\{\hat{\rho}\} = \hat{\rho}_B \end{aligned} \tag{2.18}$$

Bobs lokale Dichtematrix bleibt also in jedem Fall unverändert. Da diese Dichtematrix die maximale Information über seinen Quantenzustand enthält, kann Bob auch keinerlei Schlüsse aus Alice' Handlungen ziehen.

Dieser Punkt ist auch noch von einem anderen Standpunkt von Bedeutung. Da die Projektion der Messung als instantan angenommen wird, könnte man, falls es möglich wäre, klassische Information über die Korrelationen ohne zusätzliche Kommunikation auszutauschen, klassische Information instantan zwischen räumlich getrennten Teilsystemen austauschen. Dies würde zu den bekannten Konflikten mit der speziellen Relativitätstheorie und Kausalität führen. Die Quantenmechanik ist in diesem Punkt also völlig konform mit der speziellen Relativitätstheorie. Auch wenn die Dichtematrix nicht immer kovariant ist. Messergebnisse, die in der Quantentheorie die einzigen realen Größen darstellen, verhalten sich immer lorentzkonform [28].

Kapitel 3

Lokale Messungen in Blochdarstellung

Es wurde gezeigt, dass bei lokalen Quantenoperationen, wenn sie linear und spurerhaltend sind, die anderen Subsysteme unverändert bleiben. Für Messungen an Einzelsystemen, die i.a. durch eine nichtlineare Projektion beschrieben werden, gilt dies nicht mehr. Es ist deshalb interessant, wie sich lokale Messungen an einem oder mehreren Subsystemen auf die anderen auswirken. Die Auswirkung wird durch die Korrelationen zwischen den gemessenen und den restlichen Teilen des Netzwerks bestimmt sein. In diesem Abschnitt soll diese Auswirkung für von Neumann- und allgemeine Messungen untersucht werden.

In Abschnitt 1.3 wurden die Auswirkungen von Messungen im Dichtematrixbild dargestellt. Um zu sehen, wie sich bei Messungen lokale Größen und Korrelationen ändern und übertragen werden, und welchen Einfluss sie haben, ist es sinnvoll, diese Beziehungen ins Blochvektorbild mit der Entwicklung nach Clusteroperatoren zu übertragen.

3.1 Messung an einem Subsystem

Ohne die Allgemeinheit einzuschränken, soll davon ausgegangen werden, dass die Messung an Subsystem 1 stattfinden soll. Der Projektionsoperator wirkt daher nur in Subsystem 1. Auf die anderen Teile wirkt lediglich die Identität. Trotzdem wird sich der Zustand der anderen Subsysteme im allgemeinen ändern.

3.1.1 Nicht entarter Messoperator

Zunächst soll die Messung an einem in Subsystem 1 nicht entarteten Messoperator erfolgen. Jedem Messergebnis ist daher eindeutig ein Projektionsoperator in einen reinen Zustand in Subsystem 1 zugeordnet. Für den Projektionsoperator

gilt dann:

$$\hat{P} = |\psi^1\rangle\langle\psi^1| \otimes \hat{1} = \frac{1}{n_1}(\hat{1} + \lambda_i^{1(m)}\hat{\lambda}_i^1) \tag{3.1}$$

Die $\lambda_i^{1(m)}$ sind nach (1.38) die Entwicklungskoeffizienten des zum Ergebnis der Messung zugeordneten Zustands $|\psi^1\rangle$. Für die möglichen Ergebnisse sind dies die entsprechenden orthogonalen Zustände. Auf eine Indizierung bezüglich der einzelnen möglichen Messwerte bzw. Projektoren soll verzichtet werden. Im weiteren Verlauf ist davon auszugehen, dass ein Ergebnis der Messung eingetreten ist.

Damit lassen sich nun die Größen aus Abschnitt 1.3 in Blochdarstellung ausdrücken. Für den Dichteoperator wird (1.37) verwendet.

Wahrscheinlichkeit

Für die Wahrscheinlichkeit des Messergebnisses[1] $\lambda_i^{1(m)}$ ergibt sich:

$$\begin{aligned} p &= \mathrm{Tr}\{\hat{\rho}\hat{P}\} = \frac{1}{\mathcal{N}}(\mathrm{Tr}\{\hat{P}\} + \lambda_i^\mu \mathrm{Tr}\{\hat{\lambda}_i^\mu \hat{P}\}) \\ &= \frac{1}{n_1}(1 + \lambda_i^1 \lambda_i^{1(m)}) \end{aligned} \tag{3.2}$$

p hängt vom Skalarprodukt der Blochvektoren ab, also nur von dem in $\lambda^{1(m)}$-Richtung projiziertem Anteil von λ^1. Darin wird die Tatsache deutlich, dass die Messung nur vom durch die Messbasis aufgespannten klassischen Unterraum abhängt. Ist $\lambda^1 = \lambda^{1(m)}$, ist $p = 1$. Das Ergebnis der Messung ist sicher, da sich das System bereits in einem Eigenzustand des Messoperators befand. Allerdings liegt dann auch keine Verschränkung mit den anderen Subsystemen vor. Die Messung hat damit keine Auswirkung auf das System. Im Fall des totalgemischten Zustandes $\chi = 0$ ist $p = \frac{1}{n_1}$. Sind $\hat{P}$ und $\hat{\rho}$ orthogonale Zustände, ist $\lambda_i^1 \lambda_i^{1(m)} = -1$ und damit $p = 0$.

Auswirkung auf Subsystem 1

Um die Auswirkungen der Messung auf den Zustand des Quantennetzwerk zu untersuchen, wird in (1.18) die Entwicklung nach Clusteroperatoren eingesetzt. Es ergibt sich:

$$\begin{aligned} \hat{\rho}' &= = \frac{1}{p}\hat{P}\hat{\rho}\hat{P} \\ &= \frac{1}{p\mathcal{N}}(\hat{P} + \lambda_i^\mu \hat{P}\hat{\lambda}_i^\mu \hat{P} + \underset{\mu<\nu}{K_{ij}^{\mu\nu}}\, \hat{P}\hat{\lambda}_i^\mu \hat{\lambda}_j^\nu \hat{P} + \underset{\mu<\nu<\kappa}{K_{ijk}^{\mu\nu\kappa}}\, \hat{P}\hat{\lambda}_i^\mu \hat{\lambda}_j^\nu \hat{\lambda}_k^\kappa \hat{P} + \cdots) \end{aligned} \tag{3.3}$$

[1] Die Unterscheidung zwischen dem Ergebnis der Messung, also dem Messwert, und dem zugehörigen Projektionsoperator wird in Folge fallen gelassen. Der Ausdruck Messergebnis meint beides.

Nach (1.38) lassen sich die Entwicklungskoeffizienten von $\hat{\rho}'$ bilden. Es ergibt sich mit $\mathrm{Tr}_\mu\{\hat{\lambda}_i^\mu\} = 0$:

$$\begin{aligned} \lambda'^1_i &= \mathrm{Tr}(\hat{\rho}'\hat{\lambda}_i^1) = \frac{1}{pn_1}\left(\mathrm{Tr}_1(\hat{P}\hat{\lambda}_i^1) + \lambda_j^1 \mathrm{Tr}_1(\hat{P}\hat{\lambda}_i^1\hat{P}\hat{\lambda}_j^1)\right) \\ &= \frac{1}{pn_1}\left(\lambda_i^{1(m)} + \lambda_j^1\lambda_j^{1(m)}\lambda_i^{1(m)}\right) = \lambda_i^{1(m)} \end{aligned} \tag{3.4}$$

Erwartungsgemäß befindet sich Subsystem 1 nach der Messung im zum Messergebnis zugeordneten Eigenzustand des Messoperators $\lambda_i^{1(m)}$. Dieser kann daher in diesem Sinne als gemessener Zustand angesehen werden.

Korrelationen mit Subsystem 1

Die Korrelationsterme lassen sich entsprechend entwickeln. Für die Korrelationen, an denen das gemessene Subsystem 1 beteiligt ist, ergibt sich:

$$\begin{aligned} K_{ij}^{1\mu\prime} &= \mathrm{Tr}\{\hat{\rho}'\hat{\lambda}_i^1\hat{\lambda}_j^\mu\} \\ &= \frac{1}{pn_1n_\mu}\left(\lambda_k^\mu \mathrm{Tr}_1\{\hat{P}\hat{\lambda}_i^1\}\mathrm{Tr}_\mu\{\hat{\lambda}_k^\mu\hat{\lambda}_j^\mu\} + K_{lk}^{1\mu}\mathrm{Tr}_1\{\hat{P}\hat{\lambda}_l^1\hat{P}\hat{\lambda}_i^1\}\mathrm{Tr}_\mu\{\hat{\lambda}_k^\mu\hat{\lambda}_j^\mu\}\right) \\ &= \frac{1}{pn_1}\left(\lambda_i^{1(m)}\lambda_j^\mu + K_{lj}^{1\mu}\lambda_l^{1(m)}\lambda_i^{1(m)}\right) = \lambda_i^{1(m)}\lambda_j^{\mu\prime} \end{aligned} \tag{3.5}$$

Man sieht, dass $M_{ij}^{1\mu\prime} = K_{ij}^{1\mu\prime} - \lambda_i^{1\prime}\lambda_j^{\mu\prime}$ verschwindet. Es lässt sich einsehen, dass auch alle anderen Verschränkungstensoren mit Beteiligung von Subsystem 1 verschwinden. Denn es ergibt sich nach analoger Rechnung:

$$K_{ijk..}^{1\mu\nu..\prime} = \frac{1}{pn_1}\left(\lambda_i^{1(m)}K_{jk..}^{\mu\nu..} + K_{ijk..}^{1\mu\nu..}\lambda_l^{1(m)}\lambda_i^{1(m)}\right) = \lambda_i^{1(m)}K_{jk..}^{\mu\nu..\prime} \tag{3.6}$$

Die Beziehung für $K_{jk..}^{\mu\nu..\prime}$ wird in (3.12) gezeigt. Unter der Voraussetzung, dass alle niedrigeren Verschränkungstensoren, die Index 1 enthalten, verschwinden, folgt aus der Definition der Verschränkungstensoren (1.39)

$$K_{ijk..}^{1\mu\nu..\prime} = M_{ijk..}^{1\mu\nu..\prime} - \lambda_i^{1\prime}K_{jk..}^{\mu\nu..\prime} \tag{3.7}$$

Da explizit $M_{ij}^{1\mu\prime} = 0$ für beliebige μ gezeigt wurde, gilt induktiv $M_{ijk..}^{1\mu\nu..\prime} = 0$. Dies muss auch so sein, da Subsystem 1 sich nach der Messung nach (3.4) in einem reinen Zustand befindet. Damit zerfällt das Gesamtsystem in ein Produkt aus Subsystem 1 und dem Rest, und es liegt per definitionem keine Verschränkung mehr vor.

Auswirkung auf die übrigen Subsysteme

Für die anderen Subsysteme ergibt sich mit $\mathrm{Tr}_\mu\{\hat{\lambda}_i^\mu \hat{\lambda}_j^\mu\} = n_\mu \delta_{ij}$ und $\mathrm{Tr}_1\{\hat{P}\} = 1$:

$$\begin{aligned} \lambda_j^{\mu\prime} &= \mathrm{Tr}\{\hat{\rho}' \hat{\lambda}_j^\mu\} \\ &= \frac{1}{pn_1 n_\mu}\left(\lambda_i^\mu \mathrm{Tr}_1\{\hat{P}\}\mathrm{Tr}_\mu\{\hat{\lambda}_i^\mu \hat{\lambda}_j^\mu\} + K_{ik}^{1\mu}\mathrm{Tr}_1\{\hat{P}\hat{\lambda}_i^1\}\mathrm{Tr}_\mu\{\hat{\lambda}_k^\mu \hat{\lambda}_j^\mu\}\right) \\ &= \frac{1}{pn_1}\left(\lambda_j^\mu + \lambda_i^{1(m)} K_{ij}^{1\mu}\right) \end{aligned} \tag{3.8}$$

mit $\mu \neq 1$. Alle nicht explizit aufgezählten Terme fallen wegen $\mathrm{Tr}_\mu(\hat{\lambda}^\mu) = 0$ weg. Ersetzt man $K_{jk}^{1\mu}$ durch den Verschränkungstensor $M_{jk}^{1\mu}$, so ergibt sich schließlich:

$$\boxed{\lambda_i^{\mu\prime} = \lambda_i^\mu + \frac{1}{1 + \lambda_k^1 \lambda_k^{1(m)}} \lambda_i^{1(m)} M_{ij}^{1\mu}} \tag{3.9}$$

Der neue Zustand setzt sich zusammen aus dem alten Zustand λ_i^μ und einem Term, der sich als eine Abbildung von $\lambda_i^{1(m)}$ in den Raum von Subsystem μ verstehen lässt. Die Abbildung wird durch den Verschränkungstensor, der den gemessenen Zustand $\lambda_i^{1(m)}$ linear abbildet, vermittelt und ist mit der Wahrscheinlichkeit des Messergebnisses gewichtet. Im allgemeinen ist die gesamte Abbildung daher nicht linear. Je unwahrscheinlicher ein Messergebnis ist, desto stärker wirkt sich der zweite Term aus. Die lokalen Eigenschaften des gemessenen Subsystems wirken sich nur in den Wahrscheinlichkeiten der Messergebnisse aus. Waren die Subsysteme 1 und μ nicht verschränkt, ändert sich der lokale Zustand von Subsystem μ nicht.

Korrelationen

Betrachten wir nun, wie sich die Korrelationen zwischen den anderen Subsystemen verhalten. Es ergibt sich für $\mu, \nu \neq 1$

$$\begin{aligned} K_{ij}^{\mu\nu\prime} &= \frac{1}{pn_1 n_\mu n_\nu}\Big(K_{kl}^{\mu\nu}\mathrm{Tr}_1\{\hat{P}\}\mathrm{Tr}_\mu\{\hat{\lambda}_k^\mu \hat{\lambda}_i^\mu\}\mathrm{Tr}_\nu\{\hat{\lambda}_l^\nu \hat{\lambda}_j^\nu\} \\ &\quad + K_{rkl}^{1\mu\nu}\mathrm{Tr}_1\{\hat{P}\hat{\lambda}_r^1\}\mathrm{Tr}_\mu\{\hat{\lambda}_k^\mu \hat{\lambda}_i^\mu\}\mathrm{Tr}_\nu\{\hat{\lambda}_l^\nu \hat{\lambda}_j^\nu\}\Big) \\ &= \frac{1}{1 + \lambda_k^1 \lambda_k^{1(m)}}\left(K_{ij}^{\mu\nu} + K_{rij}^{1\mu\nu}\lambda_r^{1(m)}\right) \end{aligned} \tag{3.10}$$

Um Aussagen über den Einfluss der Korrelationen treffen zu können, ist es sinnvoll, die $K_{ij}^{\mu\nu}$ durch die in (1.39) definierten Verschränkungstensoren $M_{ij}^{\mu\nu}$ zu

ersetzen. Mit (3.9) erhält man:

$$\begin{aligned} M_{ij}^{\mu\nu\prime} &= M_{ij}^{\mu\nu} + \frac{1}{1+\lambda_k^1\lambda_k^{1(m)}} M_{lij}^{1\mu\nu}\lambda_l^{1(m)} \\ &\quad - \frac{1}{(1+\lambda_k^1\lambda_k^{1(m)})^2} M_{li}^{1\mu} M_{nj}^{1\nu}\lambda_l^{1(m)}\lambda_n^{1(m)} \\ &= M_{ij}^{\mu\nu} + \frac{1}{1+\lambda_k^1\lambda_k^{1(m)}}\lambda_l^{1(m)} M_{lij}^{1\mu\nu} - (\lambda_i^{\mu\prime}-\lambda_i^{\mu})(\lambda_j^{\nu\prime}-\lambda_j^{\nu}) \end{aligned} \tag{3.11}$$

Man erkennt, dass auch hier zu dem alten Wert vor der Messung, der erhalten bleibt, Terme hinzukommen. Der erste Term stellt analog zum Ausdruck in (3.9) eine Abbildung des gemessenen Zustands $\lambda_i^{1(m)}$ aus dem Raum von Subsystem 1 in den Raum der Subsysteme μ und ν dar. Hier vermittelt nun der 3-Subsystem-Verschränkungstensor den linearen Teil, der wieder mit der Wahrscheinlichkeit gewichtet ist, wodurch die Gesamtabbildung nicht linear wird. Der zweite Anteil lässt sich so interpretieren, dass $M_{ij}^{\mu\nu}$ auch Korrelationsanteile zwischen den Subsystemen μ und ν enthält, die dadurch entstehen, dass 2-er Korrelationen 1-μ und 1-ν vorhanden waren. Diese sind nach der Messung nicht mehr vorhanden, haben dafür aber zu einer Änderung der lokalen Größen λ^μ und λ^ν geführt. Um wieder nur reine Korrelationen zu erhalten, muss dieser neu entstandene lokale Anteil abgezogen werden.

Höhere Korrelationen

Auf die gleiche Art lassen sich auch die Auswirkungen auf höhere Korrelationsterme beschreiben. Da $\mathrm{Tr}\hat{\lambda} = 0$ gilt:

$$\begin{aligned} K_{ijk}^{\mu\nu\kappa\prime} &= \frac{1}{1+\lambda_k^1\lambda_k^{1(m)}}\left(K_{ijk}^{\mu\nu\kappa} + K_{lijk}^{1\mu\nu\kappa}\lambda_l^{1(m)}\right) \\ K_{ijkl}^{\mu\nu\kappa\lambda\prime} &= \frac{1}{1+\lambda_k^1\lambda_k^{1(m)}}\left(K_{ijkl}^{\mu\nu\kappa\lambda} + K_{nijkl}^{1\mu\nu\kappa\lambda}\lambda_n^{1(m)}\right) \\ &\vdots \end{aligned} \tag{3.12}$$

Setzt man die Verschränkungstensoren ein, erhält man:

$$\begin{aligned} M_{ijk}^{\mu\nu\kappa\prime} &= M_{ijk}^{\mu\nu\kappa} + \frac{1}{1+\lambda_k^1\lambda_k^{1(m)}} M_{rijk}^{1\mu\nu\kappa}\lambda_r^{1(m)} \\ &\quad -(M_{ij}^{\mu\nu\prime} - M_{ij}^{\mu\nu})(\lambda_k^{\kappa\prime}-\lambda_k^{\kappa}) - (M_{ik}^{\mu\kappa\prime} - M_{ik}^{\mu\kappa})(\lambda_j^{\nu\prime}-\lambda_j^{\nu}) \\ &\quad -(M_{jk}^{\nu\kappa\prime} - M_{jk}^{\nu\kappa})(\lambda_i^{\mu\prime}-\lambda_i^{\mu}) - (\lambda_i^{\mu\prime}-\lambda_i^{\mu})(\lambda_j^{\nu\prime}-\lambda_j^{\nu})(\lambda_k^{\kappa\prime}-\lambda_k^{\kappa}) \\ &= M_{ijk}^{\mu\nu\kappa} + \frac{1}{1+\lambda_k^1\lambda_k^{1(m)}} M_{nijk}^{1\mu\nu\kappa}\lambda_n^{1(m)} - \mathcal{R}_3(M_{ijk}^{\mu\nu\kappa}) \end{aligned} \tag{3.13}$$

Man erkennt das gleiche Schema. Der alte Wert bleibt erhalten. Dazu kommt die Abbildung von $\lambda_i^{1(m)}$ in den Raum der Subsysteme $\mu\nu\kappa$, die jetzt durch die 4-Subsystemverschränkungstensoren generiert wird. Auch hier müssen wieder, um reine Korrelationen zu erhalten, die neu entstandenen niedrigeren Korrelationsanteile abgezogen werden.

Der besseren Übersicht halber wurde die Größe

$$\mathcal{R}_m(M_{ij..}^{\mu\nu..}) = \sum_{i=2}^{m} \tilde{\mathcal{P}}_m^i (M_{jk..}^{\mu\nu..\prime} - M_{jk..}^{\mu\nu..}) \tag{3.14}$$

eingeführt. Im Unterschied zu $\mathcal{P}_m^i(M_{jk..}^{\mu\nu..})$ aus (1.40) bezieht sich $\tilde{\mathcal{P}}_m^i(M_{jk..}^{\mu\nu..\prime} - M_{jk..}^{\mu\nu..})$ auf die durch die Messung neu entstandenen Anteile der Verschränkungstensoren. $\mathcal{R}_m(M_{ij..}^{\mu\nu..})$ enthält also für einen m-Subsystem-Verschränkungstensor alle möglichen niedrigeren Korrelationen, die durch die Messung neu entstanden sind. Beispiel: $\mathcal{R}_2(M_{ij}^{\mu\nu}) = (\lambda_i^{1\prime} - \lambda_i^1)(\lambda_j^{2\prime} - \lambda_j^2)$

Die Reihe setzt sich für Korrelationen zwischen m Subsystemen fort. Es gilt:

$$M_{ijk..}^{\mu\nu\kappa..\prime} = M_{ijk..}^{\mu\nu\kappa..} + \frac{1}{1+\lambda_i^1\lambda_i^{1(m)}}\lambda_i^1 M_{lijk..}^{1\mu\nu\kappa..} - \mathcal{R}_m(M_{ijk..}^{\mu\nu\kappa..}) \tag{3.15}$$

Der allgemeine Beweis befindet sich im Anhang.

3.1.2 Entarteter Messoperator

Ist im Gegensatz zur Annahme im vorherigen Kapitel der Messoperator bezüglich des gemessenen Eigenwertes g-fach entartet, so gilt für den Projektionsoperator:

$$\hat{P} = \sum_{i=1}^{g} |\psi_i^1\rangle\langle\psi_i^1| \otimes \hat{1} = \frac{g}{n_1}(\hat{1} + \lambda_i^{1(m)}\hat{\lambda}_i^1) \tag{3.16}$$

Die $|\psi_i^1\rangle$ spannen dabei den Entartungsunterraum in Subsystem 1 auf. Im Gegensatz zum nicht entarteten Fall ist $\hat{P}$ kein Dichteoperator mehr. Der normierte Operator $\frac{1}{g}\hat{P}$ ist jedoch der Dichteoperator der gleichverteilten Mischung der Zustände $|\psi_i^1\rangle$. Die $\lambda_i^{1(m)}$ sind die Blochverktorkoeffizienten dieses gemischten Zustandes, also

$$\lambda_i^{1(m)} = \frac{1}{g}\mathrm{Tr}\{\hat{P}\hat{\lambda}_i^1\} \tag{3.17}$$

Für die Wahrscheinlichkeit des Messwertes ergibt sich:

$$p = \mathrm{Tr}\{\hat{\rho}\hat{P}\} = \frac{g}{n_1}\left(1 + \lambda_i^1\lambda_i^{1m}\right) \tag{3.18}$$

Dies entspricht, bis auf den Faktor g, der der Normierung dient, dem nicht entarteten Fall.

Auswirkung auf Subsystem 1

Für den Zustand des gemessenen Subsystems nach der Messung ergeben sich Unterschiede zum nicht entarteten Fall. Allgemein liefert die Blochdarstellung hier kein anschauliches Bild. Für spezielle Fälle lassen sich aber Aussagen treffen: Befand sich Subsystem 1 vor der Messung vollständig im durch die $|\psi_i^1\rangle$ aufgespannten Unterraum, so gilt $\hat{P}\hat{\rho}\hat{P} = \hat{\rho}$, wie man sich in der Diagonaldarstellung von $\hat{\rho}$ klarmachen kann. Der Gesamtzustand des Quantennetzwerks ändert sich nicht. Somit bleiben auch Verschränkungen des gemessenen Subsystems mit den anderen erhalten.

Ist unter den Eigenvektoren mit Eigenwert $\neq 0$ von $\hat{\rho}_1$ nur eine Linearkombinationen der $|\psi_i^1\rangle$, so geht Subsystem 1 in diesen reinen Zustand über. Alle Verschränkungsgrößen mit Subsystem 1 verschwinden.

Befand sich Subsystem 1 vor der Messung im total gemischten Zustand $\lambda_i^1 = 0$, so ist es nach der Messung im Zustand $\lambda_i^{1\prime} = \lambda_i^{1(m)}$, da dann gilt: $\mathrm{Tr}\{\hat{P}\hat{\rho}\hat{\hat{P}}\hat{\lambda}_i^1\} = \mathrm{Tr}_1\{\hat{P}\hat{\lambda}_i^1\}$.

Auswirkung auf die anderen Subsysteme

Da die Rechnung für die nichtgemessenen Subsysteme bis auf den Faktor g, der sich aber herauskürzt, völlig analog läuft, erhält man die gleichen Ergebnisse, die für nicht entartete Messoperatoren erzielt wurden. Die Gleichungen (3.9) und (3.15) gelten auch für den entarteten Fall, mit dem Unterschied, dass der Zustand $\lambda_i^{1(m)}$ jetzt durch (3.17) gegeben und ein gemischter Zustand ist. $\lambda_i^{1(m)}$ kann daher als effektiv gemessener Zustand angesehen werden, da er für die nicht gemessenen Subsysteme die Rolle des gemessenen Zustands übernimmt. Im Unterschied zum nicht entarteten Fall befindet sich Subsystem 1 nach der Messung i.a. nicht im Zustand $\lambda_i^{1(m)}$.

3.1.3 Verallgemeinerte Messungen

Dieses Schema lässt sich auch auf die in Abschnitt 1.3.3 eingeführten verallgemeinerten Messungen erweitern. Die Messung wird durch den Satz der Operatoren $\hat{E}_\alpha^1$ erzeugt, die nur in Subsystem 1 wirken sollen. Da alle $\hat{E}_\alpha^1$ positive, hermitsche Operatoren sind, erfüllt der normierte Operator[2] $\frac{1}{\mathrm{Tr}\{\hat{E}^1\}}\hat{E}^1$ alle Axiome einer Dichtematrix und repräsentiert daher einen Quantenzustand, der, wie sich zeigen wird, als effektiv gemessener Zustand angesehen werden kann. Die Entwicklungskoeffizienten dieses Zustands ergeben sich mit (1.38) als

$$\lambda_i^{1(m)} = \frac{1}{\mathrm{Tr}\{\hat{E}^1\}}\mathrm{Tr}\{\hat{E}^1\hat{\lambda}_i^1\} \tag{3.19}$$

[2] Wie in Abschnitt 3.1.1 soll wieder nur eines der möglichen Messergebnisse betrachtet, und die Indizierung α bezüglich der Messergebnisse weggelassen werden.

Damit lässt sich der Messoperator darstellen als:

$$\hat{E}^1 = \frac{1}{n_1}\mathrm{Tr}\{\hat{E}^1\}\left(1 + \lambda_i^{1(m)}\hat{\lambda}_i^1\right) \tag{3.20}$$

Für die Wahrscheinlichkeit eines Messwertes ergibt sich:

$$p = \mathrm{Tr}\{\hat{E}^1\hat{\rho}\} = \frac{1}{n_1}\mathrm{Tr}\{\hat{E}^1\}\left(1 + \lambda_i^1\lambda_i^{1(m)}\right) \tag{3.21}$$

Auch hier ist die Projektion des Zustands auf den effektiv gemessenen Zustand entscheidend. Der Faktor $\mathrm{Tr}\{\hat{E}^1\}$ dient der Normierung. Der Zustand nach der Messung ergibt sich als:

$$\hat{\rho}' = \frac{1}{p}\sum_\beta \hat{M}_\beta^1\hat{\rho}\hat{M}_\beta^{1^+} \tag{3.22}$$

Für die Operatoren $\hat{M}_\beta^1$, die nur auf Subsystem 1 wirken, gilt: $\hat{E}^1 = \sum_\beta \hat{M}_\beta^{1^+}\hat{M}_\beta^1$. Mit dieser Relation kann man sich klarmachen, dass die Ausdrücke für die Zustände der nicht gemessenen Subsysteme identisch zu denen für Projektionsmessungen sind, da sich immer nur ein Faktor $\mathrm{Tr}\{\hat{E}\}$ ergibt, der sich aber gegen den identischen Faktor in p heraus hebt. Es gelten daher auch in diesem Fall die Gleichungen (3.9) und (3.15), wobei $\lambda_i^{1(m)}$ hier durch (3.19) gegeben ist. Analog zu Abschnitt 3.1.2 lässt sich daher der Zustand $\lambda_i^{1(m)}$ ebenfalls als effektiv gemessener Zustand ansehen.

3.1.4 Effektiv gemessene Zustände

Die Auswirkung einer lokalen Quantenoperation in Subsystem 1 auf die anderen Subsysteme lässt sich immer durch einen effektiv gemessenen Zustand beschreiben. Im Falle linearer Operationen, die durch unitäre Dynamik in Subsystem 1 und nicht betrachteten Hilfssystemen oder Ensemblemessungen erzeugt werden, ist $\lambda_i^{1(m)} = 0$. In diesen Fällen ändern sich die anderen Subsysteme nicht. Nur im Fall von Messungen an Einzelsystemen, unter der Voraussetzung dass das Ergebnis einer Einzelmessung bekannt ist, ist $\lambda_i^{1(m)} \neq 0$.

Da für die Operatoren $\hat{E}_\alpha$ keine weiteren Einschränkungen bestehen, kann der effektiv gemessene Zustand jeder mögliche Zustand in Subsystem 1 sein. Es stellt sich noch die Frage, welche Zustände eine Messbasis darstellen können. Aus der einzigen noch offenen Bedingung $\sum_\alpha \hat{E}_\alpha = \hat{1}$ für eine Messbasis folgt:

$$\sum_\alpha \mathrm{Tr}\{\hat{E}_\alpha\} = n \tag{3.23}$$

und mit (3.20)

$$\sum_\alpha \mathrm{Tr}\{\hat{E}_\alpha\}\lambda_{i\,\alpha}^{1(m)} = 0 \tag{3.24}$$

Insgesamt bedeutet dies: Jede Menge von Zuständen, die durch linear abhängige Blochvektoren repräsentiert wird, bilden eine mögliche Menge von effektiv gemessenen Zuständen einer Messbasis unter der Nebenbedingung, dass die Koeffizienten positiv gewählt werden können, da $\mathrm{Tr}\{\hat{E}_\alpha\} \geq 0$. Die Messoperatoren ergeben sich aus den effektiv gemessenen Zuständen mit (3.20), wobei die $\mathrm{Tr}\{E_\alpha\}$ durch (3.24) und (3.23) festgelegt sind.

3.2 Messung an 2 Subsystemen

Neue Eigenschaften kommen hinzu, wenn die Messung an 2 Subsystemen durchgeführt wird, insbesondere, wenn die Zustände der Messbasis nichlokal sind. Dann spielen auch die lokalen Zustände der gemessenen Subsysteme vor der Messung direkt eine Rolle für die Zustände der nicht gemessenen Subsysteme.

Die Messung soll jetzt an einer in den Subsystemen 1 und 2 vollständigen, orthogonalen Basis durchgeführt werden. Analog zum Fall der lokalen Messung lässt sich der Projektionsoperator für ein bestimmtes Messergebnis angeben als:

$$\hat{P} = |\psi^{1,2}\rangle\langle\psi^{1,2}| \otimes \hat{1} = \frac{1}{n_1 n_2}\left(\hat{1} + \lambda_i^{1(m)}\hat{\lambda}_i^1 + \lambda_j^{2(m)}\hat{\lambda}_j^2 + K_{ij}^{12(m)}\hat{\lambda}_i^1\hat{\lambda}_j^2\right) \tag{3.25}$$

mit den Entwicklungskoeffizienten des zum Ergebnis der Messung zugeordneten 2-Subsystem Zustands $\lambda_i^{1(m)}, \lambda_j^{2(m)}, K_{ij}^{12(m)}$.

Analog zu (3.2) ergibt sich für die Wahrscheinlichkeit des Messergebnisses:

$$\begin{aligned} p &= \frac{1}{n_1 n_2}\left(1 + \lambda_i^1\lambda_i^{1(m)} + \lambda_j^2\lambda_j^{2(m)} + K_{ij}^{12}K_{ij}^{12(m)}\right) \\ &= \frac{1}{n_1}(1 + \lambda_i^1\lambda_i^{1(m)})\frac{1}{n_2}(1 + \lambda_i^2\lambda_j^{2(m)}) \\ &\quad + \frac{1}{n_1 n_2}(\lambda_i^{1(m)}M_{ij}^{12}\lambda_j^{2(m)} + \lambda_i^1 M_{ij}^{12(m)}\lambda_i^2 + M_{ij}^{12}M_{ij}^{12(m)}) \end{aligned} \tag{3.26}$$

Die Wahrscheinlichkeit ergibt sich aus dem Produkt der lokalen Wahrscheinlichkeiten und einem Anteil aus den Verschränkungstensoren.

Subsysteme 1 und 2

Die Relationen für den Zustand nach der Messung lassen sich aus den in Abschnitt 3.1 für Messungen an einem Subsystem erhaltenen Relationen gewinnen, indem man die Subsystem 1 und 2 zu einem gedachten Subsysteme (12) der Dimension $n_1 n_2$ zusammenfasst. Da in Abschnitt 3.1 für die Operatoren der Operatorbasis in Subsystem 1 nur die Eigenschaften $\mathrm{Tr}\{\hat{\lambda}_i\hat{\lambda}_j\} = n\delta_{ij}$ und $\mathrm{Tr}\{\hat{\lambda}_i\} = 0$ verwendet wurden, können als alternative Basis $\{\hat{\omega}_{ij}^{(12)}\}$ in (12) die Clusteroperatoren

$$\hat{\omega}_{i0}^{(12)} = \hat{\lambda}_i^1, \hat{\omega}_{oj}^{(12)} = \hat{\lambda}_j^2, \hat{\omega}_{ij}^{(12)} = \hat{\lambda}_i^1\hat{\lambda}_j^2 \tag{3.27}$$

gewählt werden. Für die Indizes gilt : $0 \leq i \leq n_1, 0 \leq j \leq n_2$. Damit gilt für die Entwicklungskoeffizienten:

$$\lambda_i^1 = \omega_{i0}^{(12)}, \lambda_j^2 = \omega_{oj}^{(12)}, K_{ij}^{12} = \omega_{ij}^{(12)} \tag{3.28}$$

wenn $\omega_{ij}^{(12)} = \mathrm{Tr}\{\hat{\rho}\hat{\omega}_{ij}^{(12)}\}$. Für die Korrelationen mit den anderen Subsystemen gilt:

$$K_{ik..}^{1\mu..} = K_{i0k..}^{(12)\mu..}, K_{jk..}^{2\mu..} = K_{0ik..}^{(12)\mu..}, K_{ijk..}^{12\mu..} = K_{ijk..}^{(12)\mu..}, \tag{3.29}$$

Bei den Relationen für die Verschränkungstensoren muss beachtet werden, dass es in den Termen für die niedrigeren Korrelationen einen Unterschied macht, ob die Subsysteme 1 und 2 einzeln oder als ein Subsystem aufgefasst werden. Es lässt sich aber zeigen (s. Anhang), dass gilt:

$$M_{ik..}^{1\mu..} = \tilde{M}_{i0k..}^{(12)\mu..} \ , \ M_{jk..}^{2\mu..} = \tilde{M}_{i0k..}^{(12)\mu..} \ , \ M_{ijk..}^{12\mu..} = \tilde{M}_{ijk..}^{(12)\mu..} - \mathcal{P}_m^{(12):2}(M_{ijk..}^{12\mu..}) \tag{3.30}$$

$P_m^{(12):2}(M_{ijk..}^{12\mu..})$ ist die Summe über alle Produkte aus Verschränkungstensoren, die durch Partitionierungen der Subsystemindizes von $M_{ijk..}^{12\mu..}$ in zwei Teile, die 1 und 2 trennen, entsteht. Beispiele:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_2^{(12):2}(M_{ij}^{12}) &= \lambda_i^1 \lambda_j^2 \\ \mathcal{P}_3^{(12):2}(M_{ijk}^{12\mu}) &= \lambda_i^1 M_{jk}^{2\mu} + \lambda_j^2 M_{ik}^{1\mu} \\ \mathcal{P}_4^{(12):2}(M_{ijkl}^{12\mu\nu}) &= \lambda_i^1 M_{jkl}^{2\mu\nu} + \lambda_j^2 M_{ikl}^{1\mu\nu} + M_{ik}^{1\mu} M_{jl}^{2\nu} + M_{il}^{1\nu} M_{jk}^{2\mu} \end{aligned} \tag{3.31}$$

Die Verschränkungstensoren, die sich weder auf Subsystem 1 noch 2 beziehen, bleiben unverändert.

Ersetzt man in den Relationen in Abschnitt 3.1 alle Größen, die sich auf Subsystem 1 beziehen durch die entsprechenden mit (12), erhält man die entsprechenden Relationen für Messungen an den Subsystemen 1 und 2.

Entsprechend (3.4) folgt für den Zustand der gemessenen Subsysteme 1 und 2 nach der Messung:

$$\lambda_i^{1\prime} = \lambda_i^{1(m)}, \ \lambda_i^{2\prime} = \lambda_i^{2(m)}, \ K_{ij}^{12\prime} = K_{ij}^{12(m)} \tag{3.32}$$

Und entsprechend Abschnitt 3 folgt mit (3.30), dass alle Verschränkungstensoren zwischen den Subsystemen 1 und 2 und dem restlichen Netzwerk verschwinden.

$$M_{ik..}^{1\mu..\prime} = 0 \ , \quad M_{jk..}^{2\mu..\prime} = 0 \ , \quad M_{ijk..}^{12\mu..\prime} = 0 \tag{3.33}$$

Der Zustand befindet sich nach der Messung in einem Produkt aus dem gemessenen System und dem restlichen Netzwerk.

Einfluss auf die übrigen Subsysteme

Interessant ist nun der Einfluss der Messung auf die anderen Teile des Netzwerks. Für die lokalen Blochvektoren ergibt sich analog zu (3.8):

$$\lambda_k^{\mu\prime} = \frac{1}{\tilde{p}} \left(\lambda_k^\mu + \lambda_i^{1^{(m)}} K_{ik}^{1\mu} + \lambda_j^{1^{(m)}} K_{jk}^{2\mu} + K_{ij}^{12^{(m)}} K_{ijk}^{12\mu} \right) \tag{3.34}$$

Dabei wurde abkürzend die auf $n_1 n_2$ normierte Wahrscheinlichkeit $\tilde{p} = n_1 n_2 p = (1 + \lambda_i^1 \lambda_i^{1^{(m)}} + \lambda_j^2 \lambda_j^{2^{(m)}} + K_{ij}^{12} K_{ij}^{12^{(m)}})$ eingeführt.

Der entsprechende Ausdruck dargestellt mit den Verschränkungstensoren ergibt sich aus (3.9) mit den Relationen (3.30):

$$\begin{aligned} \lambda_k^{\mu\prime} &= \lambda_k^\mu + \frac{1}{\tilde{p}} \left(M_{ik}^{1\mu} \lambda_i^{1^{(m)}} + M_{jk}^{2\mu} \lambda_j^{2^{(m)}} + (M_{ijk}^{12\mu} + \mathcal{P}_m^{(12):2}(M_{ijk}^{12\mu})) K_{ij}^{12^{(m)}} \right) \\ &= \lambda_k^\mu + \frac{1}{\tilde{p}} \left(M_{ik}^{1\mu} \lambda_i^{1^{(m)}} + M_{jk}^{2\mu} \lambda_j^{2^{(m)}} + (M_{ijk}^{12\mu} + \lambda_i^1 M_{jk}^{2\mu} + \lambda_j^2 M_{ik}^{1\mu}) K_{ij}^{12^{(m)}} \right) \end{aligned} \tag{3.35}$$

Wie im Fall der Messungen an einem Subsystem kommt zum alten Zustand ein Anteil hinzu, der eine Abbildung des gemessenen Zustands vom Raum der Subsysteme 1 und 2 in den Raum von Subsystem μ darstellt. Unterschiedlich ist jedoch, dass jetzt die lokalen Eigenschaften der gemessenen Subsysteme vor der Messung direkt an der Abbildung beteiligt sind, d.h. sie generieren neben den Verschränkungstensoren den linearen Anteil der Abbildung. Für Messungen an einem Subsystem war dies nur indirekt in den Wahrscheinlichkeiten p der Fall. Dies ist letztendlich für die Quantenteleportation verantwortlich (s. Abschnitt 4.2). Das Auftreten der lokalen Größen resultiert daraus, dass der Verschränkungstensor $\tilde{M}_{ijk}^{(12)\mu}$ diese Terme enthält. Dies ist eine reine Eigenschaft von Korrelationsgrößen, die sowohl klassischer wie quantenmechanischer Natur ist. Die Quantentheorie tritt an dieser Stelle nicht explizit in Erscheinung.

Höhere Korrelationen

Die Terme für die weiteren Korrelationen lassen sich aus (3.13) durch Einsetzen der Relation (3.29) gewinnen. Man erhält:

$$K_{kl..}^{\mu\nu..\prime} = \frac{1}{\tilde{p}} \left(K_{kl..}^{\mu\nu..} + K_{ikl..}^{1\mu\nu..} \lambda_i^{1^{(m)}} + K_{jkl..}^{2\mu\nu..} \lambda_j^{2^{(m)}} + K_{ijkl..}^{12\mu\nu..} K_{ij}^{12^{(m)}} \right) \tag{3.36}$$

Die Ausdrücke für die 2er-Verschränkungstensoren ergeben sich durch einsetzen von (3.30) in (3.11):

$$\begin{aligned} M_{kl}^{\mu\nu\prime} &= M_{kl}^{\mu\nu} + \frac{1}{\tilde{p}}\left(M_{ikl}^{1\mu\nu}\lambda_i^{1(m)} + M_{jkl}^{2\mu\nu}\lambda_j^{2(m)} + (M_{ijkl}^{12\mu\nu} + \mathcal{P}_4^{(12):2}(M_{ijkl}^{12\mu\nu}))K_{ij}^{12(m)}\right) \\ &\quad -(\lambda_k^{\mu\prime} - \lambda_k^{\mu})(\lambda_l^{\nu\prime} - \lambda_l^{\nu}) \qquad (3.37) \\ &= M_{kl}^{\mu\nu} + \frac{1}{\tilde{p}}\Big(M_{ikl}^{1\mu\nu}\lambda_i^{1(m)} + M_{jkl}^{2\mu\nu}\lambda_j^{2(m)} \\ &\quad +(M_{ijkl}^{12\mu\nu} + \lambda_i^1 M_{jkl}^{2\mu\nu} + \lambda_j^2 M_{ikl}^{1\mu\nu} + M_{ik}^{1\mu}M_{jl}^{2\nu} + M_{il}^{1\nu}M_{jk}^{2\mu})K_{ij}^{12(m)}\Big) \\ &\quad -(\lambda_k^{\mu\prime} - \lambda_k^{\mu})(\lambda_l^{\nu\prime} - \lambda_l^{\nu}) \end{aligned}$$

Für allgemeine Verschränkungstensoren erhält man aus (3.15):

$$\begin{aligned} M_{kln..}^{\mu\nu\kappa..\prime} &= M_{kln..}^{\mu\nu\kappa..} + \frac{1}{\tilde{p}}\Big(M_{ikln..}^{1\mu\nu\kappa..}\lambda_i^{1(m)} \qquad (3.38) \\ &\quad +M_{jkln..}^{2\mu\nu\kappa..}\lambda_j^{2(m)} + \Big(M_{ijkln..}^{12\mu\nu\kappa..} + \mathcal{P}_m^{(12):2}(M_{ijkln'..}^{12\mu\nu\kappa..})\Big)K_{ij}^{12(m)}\Big) \\ &\quad -\mathcal{R}_m(M_{lkn..}^{\mu\nu\kappa..}) \end{aligned}$$

Die Abbildung wird also durch alle Verschränkungstensoren, die die gemessenen Subsysteme 1 und 2 und die anderen verbindet und die lokalen Zustände der Subsysteme 1 und 2 generiert.

Entarteter Messoperator und verallgemeinerte Messungen

Wie auch für Messungen an einem Subsystem gelten auch hier die Relationen für die Auswirkung der Messung auf die nicht gemessenen Subsysteme auch für entartete Messoperatoren und verallgemeinerte Messungen. Die Überlegungen aus Abschnitt 3.1.2 und Abschnitt 3.1.3 lassen sich übernehmen, wobei der effektiv gemessene Zustand jetzt in den Subsystemen 1 und 2 entwickelt werden muss.

3.3 Folge von Messungen

Führt man nacheinander Messungen an 2 Subsystemen durch, so lassen sich die Verbindungswahrscheinlichkeiten und der Zustand des restlichen Netzwerks auf den Fall einer Messung an beiden Subsystemen mit Produktzuständen als Messzustände zurückführen. Der gemessene Zustand ist dann $\lambda_i^{1(m)}$, $\lambda_i^{2(m)}$ und $M_{ij}^{12(m)} = 0$. Dies lässt sich begründen, da sich der Projektionsoperator in diesem Fall als:

$$\hat{P} = \hat{P}^1\hat{P}^2 \qquad (3.39)$$

schreiben lässt. Er zerfällt in ein Produkt aus 2 Projektionsoperatoren, was genau einer Folge von Messungen entspricht. Außerdem gilt $[\hat{P}^1, \hat{P}^2] = 0$, da die

Operatoren in unterschiedlichen Teilräumen wirken. Für eine Messung zunächst an Subsystem 1, gefolgt von einer Messung an Subsystem 2, ergibt sich für die Gesamtwahrscheinlichkeit:

$$p_{12} = p_{2|1}p_1 = \mathrm{Tr}\{\hat{P}_2\hat{\rho}'\}p_1 = \mathrm{Tr}\{\hat{P}_2\frac{\hat{P}_1\hat{\rho}\hat{P}_1}{p_1}\}p_1 = \mathrm{Tr}\{\hat{P}_1\hat{P}_2\hat{\rho}\} \tag{3.40}$$

$P_{2|1}$ ist dabei die bedingte Wahrscheinlichkeit. Für den Zustand nach beiden Messungen folgt:

$$\rho'' = \frac{1}{p_{2|1}}\hat{P}_2\hat{\rho}'\hat{P}_2 = \frac{1}{p_{12}}\hat{P}_2\hat{P}_1\hat{\rho}\hat{P}_1\hat{P}_2 \tag{3.41}$$

Die Reihenfolge der Messungen spielt wegen $[\hat{P}^1, \hat{P}^2] = 0$ keine Rolle. Für die Wahrscheinlichkeit, in Subsystem 1 Zustand $\lambda_i^{1^{(m)}}$ und anschließend in Subsystem 2 Zustand $\lambda_i^{2^{(m)}}$ zu messen, ergibt sich damit:

$$\begin{aligned} p_{12} &= \frac{1}{n_1}(1+\lambda_i^1\lambda_i^{1^{(m)}})\frac{1}{n_2}(1+\lambda_j^2\lambda_j^{2^{(m)}}) + \frac{1}{n_1n_2}\lambda_i^{1^{(m)}}M_{ij}^{12}\lambda_j^{2^{(m)}} \\ &= p_1p_2 + \frac{1}{n_1n_2}\lambda_i^{1^{(m)}}M_{ij}^{12}\lambda_j^{2^{(m)}} \end{aligned} \tag{3.42}$$

Die Gesamtwahrscheinlichkeit ergibt sich damit aus dem Term p_1p_2 für unkorrelierte Systeme, zu dem ein Term hinzukommt, der durch die Korrelation bestimmt ist.

Die Zustände der anderen Subsysteme nach einer solchen Messung erhält man, indem man in (3.35) und (3.38) $M_{ij}^{12^{(m)}} = 0$, bzw $K_{ij}^{12^{(m)}} = \lambda_i^{1^{(m)}}\lambda_j^{2^{(m)}}$ einsetzt. Es ergibt sich:

$$\begin{aligned} \lambda_k^{\mu\prime} &= \lambda_k^\mu + \frac{1}{n_1n_2p_{12}}\Big(M_{ik}^{1\mu}\lambda_i^{1^{(m)}} + M_{jk}^{2\mu}\lambda_j^{2^{(m)}} \\ &\quad +(M_{ijk}^{12\mu} + \lambda_i^1M_{jk}^{2\mu} + \lambda_j^2M_{ik}^{1\mu})\lambda_i^{1^{(m)}}\lambda_j^{2^{(m)}}\Big) \end{aligned} \tag{3.43}$$

Da $p_{12} = p_{2|1}p_1 = p_{1|2}p_2$, ergibt sich mit (3.2):

$$\begin{aligned} \lambda_k^{\mu\prime} &= \lambda_k^\mu + \frac{1}{n_1p_{1|2}}M_{ik}^{1\mu}\lambda_i^{1^{(m)}} + \frac{1}{n_2p_{2|1}}M_{jk}^{2\mu}\lambda_j^{2^{(m)}} + \\ &\quad \frac{1}{n_1n_2p_{12}}M_{ijk}^{12\mu}\lambda_i^{1^{(m)}}\lambda_j^{2^{(m)}} \end{aligned} \tag{3.44}$$

Wie bei der lokalen Messung an nur einem Subsystem ist der durch die Messung hinzugekommene Term von $\lambda_k^{\mu\prime}$ nur durch die Verschränkungstensoren mit den gemessenen Subsystemen bestimmt.

Die lokalen Größen λ^1 und λ^2 erscheinen nicht mehr explizit. Sie treten nur noch in den Wahrscheinlichkeiten auf. Die Übertragung von lokalen Größen ist nur mit nichlokalen Messungen möglich.

Es ist jedoch möglich, jede verschränkte Messbasis durch eine geeignete unitäre Transformation $\hat{U}$ in eine lokale Basis zu transformieren. Die Wahrscheinlichkeiten der Messergebnisse und der Zustand des restlichen Quantensystems nach der Messung ändern sich nicht, wenn die Messbasis und das gemessene System vor der Messung gleich transformiert werden, denn

$$\mathrm{Tr}_{12}\{U_{12}PU_{12}^{+}U_{12}\rho U_{12}^{+}U_{12}PU_{12}^{+}\} = \mathrm{Tr}_{12}\{P\rho P\} \tag{3.45}$$

Es ist daher möglich, die Auswirkung jeder nichlokalen Messung durch eine nichlokale unitäre Transformation vor der Messung und anschließender Folge von lokalen Messungen zu erreichen. Durch die Transformation werden die lokalen Anteile mit den Verschränkungsgrößen vermischt, weshalb insgesamt auf diese Art auch lokale Eigenschaften übertragen werden (s. Abschnitt 5.3).

3.4 Messung an n Subsystemen

Nach dem gleichen Schema wie für die nichlokale Messung an 2 Subsystemen lassen sich auch Messungen an einer beliebigen Anzahl von Subsystemen erfassen. Man kann die gemessenen Subsysteme 1..n gedanklich zu einem zusammenfassen und in der Basis der 1..n-Clusteroperatoren, bezeichnet als $\{\hat{\omega}_{ijk..}^{(123..)}\}$ mit $0 \leq i \leq n_1, 0 \leq j \leq n_2 \ldots$, darstellen. Es ergibt sich dann entsprechend für die Entwicklungskoeffizienten:

$$\lambda_i^1 = \omega_{i00..}^{(123..)}, K_{ij}^{12} = \omega_{ij0..}^{(123..)}, .., K_{jk}^{23} = \omega_{0jk..}^{(123..)}, .., K_{ijk}^{123} = \omega_{ijk0..}^{(123..)} \tag{3.46}$$

und

$$K_{ik}^{1\mu} = K_{i0..k}^{(123..)\mu}, .. \tag{3.47}$$

Wird auch hier wieder ein nicht entarteter Eigenwert des Messoperators gemessen, so lässt sich der Projektionsoperator angeben als:

$$\begin{aligned} \hat{P} &= |\psi^{123..}\rangle\langle\psi^{123..}| \otimes \hat{1}^{\mathrm{Rest}} = \frac{1}{n_1 n_2 n_3..}\left(\hat{1} + \omega_{ijk..}^{123..(m)}\hat{\omega}_{ijk..}^{123..}\right) \\ &= \frac{1}{n_1 n_2 n_3..}(\hat{1} + \sum_{x=1}^{n}\lambda_x^{x(m)}\hat{\lambda}_i^x + \sum_{\substack{x,y=1\\x<y}}^{n} K_{ij}^{xy(m)}\hat{\lambda}_i^x\hat{\lambda}_j^x + \cdots) \end{aligned} \tag{3.48}$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass dieser Messwert eintritt folgt aus (3.2) und (3.46):

$$\begin{aligned} p &= \frac{1}{n_1 n_2 n_3..}\left(\hat{1} + \omega_{ijk..}^{123..}\omega_{ijk..}^{123..(m)}\right) \\ &= \frac{1}{n_1 n_2 n_3..}\left(\hat{1} + \sum_{x=1}^{n}\lambda_i^x\lambda_i^{x(m)} + \sum_{\substack{x,y=1\\x<y}}^{n} K_{ij}^{xy}K_{ij}^{xy(m)} + \cdots\right) \end{aligned} \tag{3.49}$$

Der neue Zustand für die nicht gemessenen Teile des Netzwerks lässt sich aus (3.8) mit (3.46) bestimmen. Es ergibt sich:

$$\begin{aligned}\lambda_i^{\mu\prime} &= \frac{1}{\tilde{p}}\left(\lambda_i^\mu + \omega_{jkl..i}^{123..\mu}\omega_{ijk..}^{123..(m)}\right) \\ &= \frac{1}{\tilde{p}}\left(\lambda_i^\mu + \sum_{x=1}^{n} K_{ki}^{x\mu}\lambda_k^{x(m)} + \sum_{\substack{x,y=1\\x<y}}^{n} K_{kli}^{xy\mu}K_{kl}^{xy(m)} + \cdots\right)\end{aligned} \tag{3.50}$$

mit $\tilde{p} = n_1 n_2 n_3..p$. Um auch hier wieder die Abhängigkeit von den Verschränkungstensoren zu erhalten, geht man ähnlich vor wie in Abschnitt 3.2:

Allgemein lassen sich für die Verschränkungstensoren die Beziehungen zeigen (s. Anhang):

$$\begin{aligned}M_{ik}^{1\mu} &= \tilde{M}_{i00..k}^{(12..n)\mu} \\ M_{ijk..}^{12\mu..} &= \tilde{M}_{ij0..k..}^{(12..n)\mu..} - \mathcal{P}_m^{(12):2}(M_{ijk..}^{12\mu..}) \\ &\vdots \\ M_{ij..k..}^{12..n\mu..} &= \tilde{M}_{ij..k..}^{(12..n)\mu..} - \sum_{z=2}^{n}\mathcal{P}_m^{(12..n):z}(M_{ij..k..}^{12..n\mu..})\end{aligned} \tag{3.51}$$

Dabei bedeuten die $\mathcal{P}_m^{(xy..):z}(M_{ijk..}^{xy..\mu..})$ die Summe aller Produkte der Verschränkungstensoren, die durch alle möglichen Partitionierungen der Subsysteme von $M_{ijk..}^{xy..\mu..}$ in z Partitionen, wobei in jedem mindestens eines der Subsysteme xy.. enthalten sein muss.

Damit lässt sich nun aus (3.9) durch Einsetzten der Relationen (3.51) der Ausdruck für $\lambda_i^{\mu\prime}$ berechnen. Es gilt:

$$\begin{aligned}\lambda_k^{\mu\prime} &= \lambda_k^\mu + \frac{1}{\tilde{p}}M_{ij...k}^{(12..n)\mu}\omega_{ij..}^{12..n(m)} \\ &= \lambda_k^\mu + \frac{1}{\tilde{p}}\Bigg(\sum_{x=1}^{n} M_{ik}^{x\mu}\lambda_i^{x(m)} + \sum_{\substack{x,y=1\\x<y}}^{n}\left(M_{ijk}^{xy\mu} + \mathcal{P}_3^{(xy):2}(M_{ijk}^{xy\mu})\right)K_{ij}^{xy(m)} \\ &\quad + \cdots + \left(M_{ij..k}^{12..n\mu} + \sum_{z=2}^{n}\mathcal{P}_{n+1}^{(12..n):z}(M_{ij..k}^{12..n\mu})\right)K_{ij..k}^{12..n(m)}\Bigg)\end{aligned} \tag{3.52}$$

Die mit der Wahrscheinlichkeit gewichtete Abbildung des gemessenen Zustands in den Raum von Subsystem μ ergibt sich folgendermaßen: Die lokalen Anteile des gemessene Zustands $\lambda^{x(m)}$ werden analog zur Messung an einem Subsystem durch die 2-er-Verschränkungstensoren abgebildet. Die Korrelationsterme werden durch die Summe aller möglichen Produkte der Verschränkungstensoren und lokalen Größen, die alle beteiligten Subsysteme enthalten, vermittelt.

Für den Fall einer Messung an den Subsystemen 1,2 und 3 sei dies hier noch einmal explizit dargestellt:

$$\begin{aligned}
\lambda_l^{\mu\prime} &= \lambda_l^\mu + \frac{1}{\tilde{p}}\Bigg(M_{il}^{1\mu}\lambda_i^{1(m)} + M_{jl}^{2\mu}\lambda_j^{2(m)} + M_{kl}^{3\mu}\lambda_l^{3(m)} \\
&\quad + \left(M_{ijl}^{12\mu} + \lambda_i^1 M_{jl}^{2\mu} + \lambda_j^2 M_{il}^{1\mu}\right) K_{ij}^{12(m)} \\
&\quad + \left(M_{ijl}^{13\mu} + \lambda_i^1 M_{jl}^{3\mu} + \lambda_j^3 M_{il}^{1\mu}\right) K_{ij}^{13(m)} \\
&\quad + \left(M_{ijl}^{23\mu} + \lambda_i^2 M_{jl}^{3\mu} + \lambda_j^3 M_{il}^{2\mu}\right) K_{ij}^{23(m)} \\
&\quad + \Big(M_{ijkl}^{123\mu} + \lambda_i^1\lambda_j^2 M_{kl}^{3\mu} + \lambda_i^1\lambda_l^3 M_{jl}^{2\mu} + \lambda_j^2\lambda_l^3 M_{il}^{1\mu} \\
&\quad + M_{ij}^{12} M_{kl}^{3\mu} + M_{ik}^{13} M_{jl}^{2\mu} + M_{jk}^{23} M_{il}^{1\mu} \\
&\quad + \lambda_i^1 M_{jkl}^{23\mu} + \lambda_j^2 M_{ikl}^{13\mu} + \lambda_j^3 M_{ijl}^{12\mu}\Big) K_{ijk}^{123(m)} \Bigg)
\end{aligned} \tag{3.53}$$

Den Ausdruck für allgemeine m-Verschränkungstensoren der nicht gemessenen Subsysteme erhält man analog aus (3.15):

$$\begin{aligned}
M_{kl..}^{\mu\nu..\prime} &= M_{kl..}^{\mu\nu..} + \frac{1}{\tilde{p}} M_{ij..kl..}^{(12..n)\mu\nu..} \omega_{ij..}^{12..n(m)} + \mathcal{R}_m(M_{kl..}^{\mu\nu..}) \\
&= M_{kl..}^{\mu\nu..} + \frac{1}{\tilde{p}}\Bigg(\sum_{x=1}^{n} M_{ikl..}^{x\mu\nu..}\lambda_i^{x(m)} \\
&\quad + \Bigg(\sum_{\substack{x,y=1\\ x<y}}^{n} M_{ijkl..}^{xy\mu\nu..} + \mathcal{P}_{m+2}^{(xy):2}(M_{ijkl..}^{xy\mu\nu..})\Bigg) K_{ij}^{xy(m)} + \cdots \\
&\quad + \Bigg(M_{ij..kl..}^{12..n\mu\nu..} + \sum_{z=2}^{n} \mathcal{P}_{m+n}^{(12..n):z}\Bigg) K_{ij..k}^{12..n(m)} \Bigg) + \mathcal{R}_m(M_{kl..}^{\mu\nu..})
\end{aligned} \tag{3.54}$$

Folge von n lokalen Messungen

Durch entsprechende Überlegungen wie in Abschnitt 3.3 ist in den Gleichungen für die Wahrscheinlichkeiten und die Zustände der nicht gemessenen Zustände der Fall einer Folge von n lokalen Messungen an n Subsystemen enthalten. Dies ist der Fall, wenn alle $M_{i..}^{1..(m)} = 0$ oder entsprechend $M_{ij..}^{12..(m)} = \lambda_i^{1(m)}\lambda_j^{2(m)}..$. Die $\lambda_i^{1(m)}..$ sind dabei die Ergebnisse der lokalen Messungen.

Für die Wahrscheinlichkeit bei 3 lokalen Messungen an 3 Subsystemen die Messergebnisse $\lambda_i^{1(m)}$, $\lambda_i^{2(m)}$, $\lambda_i^{3(m)}$ zu erhalten, ergibt sich:

$$p_{123} = p_1p_2p_3 + \frac{p_1}{n_2n_3}\lambda_i^{2(m)} M_{ij}^{23}\lambda_j^{3(m)} + \frac{p_2}{n_1n_3}\lambda_i^{1(m)} M_{ij}^{13}\lambda_j^{3(m)} \tag{3.55}$$

$$+ \frac{p_3}{n_1n_2}\lambda_i^{1(m)} M_{ij}^{12}\lambda_j^{2(m)} + \frac{1}{n_1n_2n_3} M_{ijk}^{123}\lambda_i^{1(m)}\lambda_j^{2(m)}\lambda_k^{3(m)} \tag{3.56}$$

Die Wahrscheinlichkeit setzt sich aus den Produkten der jeweiligen kleineren Wahrscheinlichkeiten zusammen und einem Term, der die 3-er Korrelationen enthält.

3.5 Zusammenfassung

Betrachtet man den Einfluss einer lokalen Messung auf den nicht gemessenen Anteil eines Systems, so ergibt sich der neue Zustand additiv aus dem Zustand vor der Messung und Korrekturtermen, die durch die Messung hinzukommen. Dieser zweite Teil bildet eine Abbildung aus dem Raum der Zustände des gemessenen Subsystems in den Raum der Zustände der anderen Subsysteme. Dieser Abbildung ist dabei durch die Verschränkungstensoren zwischen den gemessenen Subsystemen und den nicht gemessenen und den lokalen Zuständen der gemessenen Subsysteme bestimmt. Im allgemeinen spielen dabei alle Korrelationen, die die gemessenen Subsysteme mit den restlichen verbinden, und alle lokalen Zustände der gemessenen Systeme eine Rolle. Das Auftreten dieser lokalen Zustände führt dazu, dass bei Messungen Information über die lokale Zustände übertragen werden kann.

Abgebildet wird bei einer Messung der effektiv gemessene Zustand. Der effektiv gemessene Zustand ist der Zustand, der sich durch die Entwicklung des Messoperators $\hat{E}_\alpha$, der mit dem Ergebnis der Messung korrespondiert, ergibt. Der effektiv gemessene Zustand kann jeder mögliche Zustand des gemessenen Subsystems sein.

Für die Herleitung der Beziehungen wurde lediglich das Projektionspostulat verwendet. Weitere Bedingungen an den Zustand $\hat{\rho}$ vor der Messung gingen nicht ein. So gelten die Gleichungen sowohl für reine als auch gemischte Zustände. Ebenso ist die Anzahl und Dimension der Subsysteme im Netzwerk beliebig. Auch sind die Gleichungen nicht an die SU(n)-Operatorentwicklung gebunden. Sie gelten für jede vollständige Operatorbasis, deren Operatoren orthogonal und spurlos sind.

Auch auf klassische Systeme lassen diese Beziehungen anwenden (s. Abschnitt 4.4). Denn sowohl Projektionen von Wahrscheinlichkeitsgrößen bei der Messung, wie auch die Zusammenhänge zwischen den Korrelationen kommen in dieser Form ebenfalls in der klassischen Statistik vor.

Informationstransfer

Lokale Zustände des gemessenen Anteil des Netzwerks spielen auf zweierlei Art eine Rolle für den Zustand anderen Subsysteme nach der Messung. Zum Einen spielt die Wahl der Messbasis eine Rolle, da der effektiv gemessene Zustand abgebildet wird. Allerdings ist hierbei der probabilistische Aspekt, dass ein gemessener Zustand nur mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit auftritt, zu berücksichti-

gen. Man kann also nur bedingt von einer Informationsübertragung sprechen, da sich der effektiv gemessene Zustand nicht festlegen lässt. Dabei ist der Einfluss der Messung auf die nicht gemessenen Subsysteme umso kleiner, je wahrscheinlicher das Messergebnis. Zum Zweiten haben bei Messungen mit nichlokaler Messbasis die lokalen Größen der gemessene Subsysteme direkten Einfluss auf die anderen Subsysteme, wodurch Information über diese Größen übertragen wird.

Der Zustand der nichtgemessenen Teilsysteme vor der Messung lässt sich schreiben als:

$$\rho_{\mu..} = \mathrm{Tr}_1\{\rho\} = \mathrm{Tr}_1\{\sum_i \hat{P}_i\hat{\rho}\} = \sum_i \mathrm{Tr}_1\{\hat{P}_i\hat{\rho}\hat{P}_i\} = \sum_i p_i\hat{\rho}_i \tag{3.57}$$

also als klassische Mittelung der möglichen Endzustände. Ist einem Beobachter das Messergebnis unbekannt, müsste er über alle möglichen Ergebnisse mitteln und die nichtgemessenen Subsysteme würden für ihn unverändert bleiben. Für räumlich getrennte Subsysteme und Beobachter ist demnach die Übertragung der klassischen Information über das Messergebnis entscheidend. Der Zustand nach der Messung folgt dann durch Auswählen des richtigen Zustands aus einem klassischen Gemisch.

Kapitel 4

Anwendungsbeispiele

Die in Kapitel 3 erhaltenen Ergebnisse sollen nun an einigen Beispielen veranschaulicht werden.

4.1 Lokale Messungen an maximal verschränkten Zuständen

Gegeben sei ein Quantensystem bestehend aus 2 Subsystemen der Dimension n das sich in einem reinen, maximal verschränkten Zustand befinden soll. In Abschnitt 1.7 sind bereits einige Eigenschaften dieser Zustände behandelt worden.

Nun soll an einem solchen Zustand eine lokale Messung an Subsystem 1 in einer beliebigen Basis vorgenommen werden. Ist der gemessene Zustand $\lambda_i^{1(m)}$.ist nach (3.9) Subsystem 2 nach der Messung im Zustand:

$$\lambda_j^{2'} = \lambda_j^2 + \frac{1}{1 + \lambda_k^1 \lambda_k^{1(m)}} M_{ij} \lambda_i^{1(m)} = M_{ij} \lambda_i^{1(m)} \tag{4.1}$$

Da Subsystem 1 vor der Messung im totalgemischten Zustand war, ergibt sich der Zustand $\lambda_j^{2'}$ durch eine lineare Abbildung des gemessenen Zustandes $\lambda_i^{1(m)}$ von Raum 1 in Raum 2. Der Verschränkungstensor vermittelt diese Abbildung. In Abschnitt 1.7 wurde gezeigt, dass für maximal verschränkte Zustände gilt: $\det M = \pm 1$. Daher wird jeder Vektor auf einen Vektor gleicher Länge abgebildet. Ist $\lambda_i^{1(m)}$ ein reiner Zustand, so ist auch $\lambda_j^{2'}$ ein reiner Zustand. Für Messungen an entarteten Messoperatoren ist $\lambda_i^{1(m)}$ kein reiner Zustand mehr. Da Subsystem 1 vor der Messung im total gemischten Zustand war, gilt, $\lambda_i^{1'} = \lambda_i^{1(m)}$ und damit $|\lambda_i^{1'}| = |\lambda_i^{2'}|$. Dies muss auch so sein, da das Gesamtsystem auch nach der Messung in einem reinen Zustand ist. Es ist daher verständlich, dass für maximal verschränkte Zustände gilt $\det M = \pm 1$.

Für den $|cat\rangle_{00}$ Zustand wurde in (1.66) gezeigt, dass gilt:

$$M_{ij}^{cat_{00}} = n \begin{cases} -\delta_{ij} & : \quad \frac{n^2-n}{2} + 1 \leq i \leq n^2 - n \\ \delta_{ij} & : \quad sonst \end{cases} \tag{4.2}$$

Als Abbildungsmatrix ist dies eine Spiegelung der Blochvektorkoeffizienten $\frac{n^2-n}{2} + 1 \leq i \leq n^2 - n$, was der komplexen Konjugation der Dichtematrix entspricht. Dies ist keine unitäre Abbildung. Da sich die anderen maximal verschränkten Zustände aus dem $|cat\rangle_{00}$-Zustand und einer lokalen unitären Transformation auf ein Subsystem bilden lassen, ergibt sich für beliebige maximal verschränkte Zustände die Abbildung als komplexe Konjugation, gefolgt von einer unitären Drehung.

4.2 Quantenteleportation

Bennett et al. [4] haben gezeigt, dass es möglich ist, mit Hilfe eines verschränkten Zustands einen beliebigen, unbekannten Quantenzustand zwischen zwei räumlich beliebig separierten Quantensystemen zu übertragen. Der verschränkte Zustand dient dabei als Korrelationsresource, die bei der Teleportation aufgebraucht wird. Man geht dabei folgendermaßen vor:

Der Sender Alice will einen Zustand der Dimension n zum Empfänger Bob übertragen. Dies kann auch ein gemischter Zustand oder Teil eines größeren verschränkten Systems sein. Alice und Bob besitzen jeweils ein Subsystem, das Teil eines maximal verschränkten n-dimensionalen 2-Teilchen-Zustands ist. Alice führt nun an ihren beiden Teilchen eine Messung in einer maximal verschränkten Basis durch. Das Ergebnis der Messung teilt sie Bob mit, der daraufhin in Abhängigkeit des Messergebnisses eine lokale unitäre Transformation an seinem Teilchen durchführt. Neben dem verschränkten Zustand ist also die Übertragung von klassischer Information nötig. Nach dieser Transformation ist Bobs Teilchen im gleichen Zustand, wie Alice' Teilchen vor der Teleportation.

Um zu untersuchen, wie die Information über den Quantenzustand von Alice zu Bob übergeht, und welche Rolle dabei der klassische und quantenmechanische Anteil annehmen, soll die Teleportationsmessung in der in Kapitel 3 abgeleiteten Darstellung betrachtet werden.

Die Subsysteme 2 und 3 befinden sich in einem maximal gemischten Zustand. Dies ist beispielsweise der $|cat\rangle_{00}$ Zustand mit der Blochvektordarstellung: $\lambda_j^2 = 0, \lambda_k^3 = 0$ und $M_{jk}^{23} = M_{jk}^{cat_{00}}$ (1.66). Alice erhält Teilchen 2, Bob Teilchen 3. Alle anderen vorhandenen Subsysteme befinden sich in einem beliebigen Zustand. Da das Teilsystem 2-3 sich in einem reinen Zustand befindet, verschwinden alle Verschränkungstensoren von 2-3 mit den übrigen Subsystemen.

$$M_{ik..}^{2\mu..} = M_{jk..}^{3\mu..} = M_{ijk..}^{23\mu..} = 0 \tag{4.3}$$

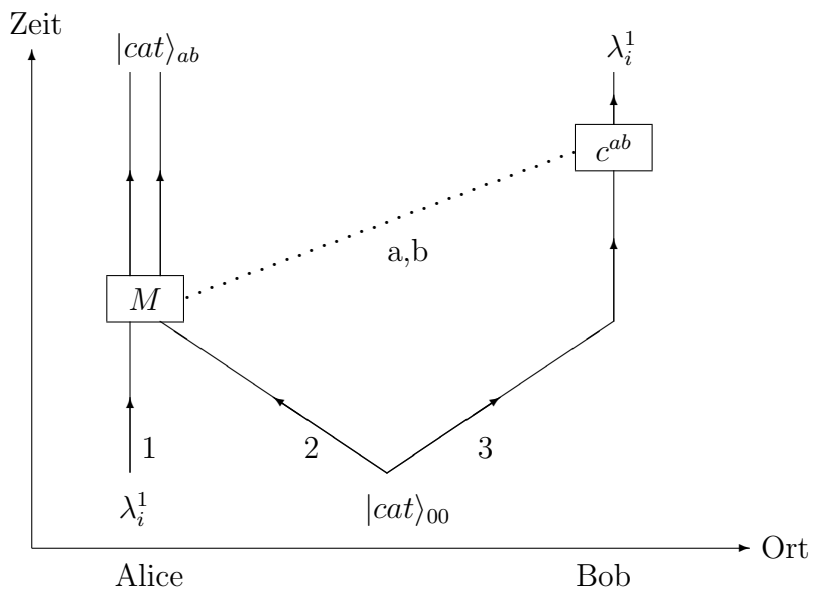


Abb. 4.1: Teleportation des Zustands λ_i^1 von Subsystem 1 zu Subsystem 3. — Materietransport $\cdots$ klassische Information

Subsystem 1 im Zustand λ_i^1 soll nun von Alice zu Bob teleportiert werden. Dazu führt Alice an ihren beiden Subsystemen 1 und 2 die nichlokale Messung in der Cat-State Basis durch. Die möglichen gemessenen Zustände sind dann nach Abschnitt 1.7:

$$\lambda_i^{1^{(m)}} = 0\,, \quad \lambda_i^{2^{(m)}} = 0\,, \quad M_{ij}^{12^{(m)}} = c_{ik}^{ab} M_{kj}^{cat_{00}} \tag{4.4}$$

Die c_{ik}^{ab} sind die Koeffizienten der Blochdarstellung der n^2 unitäre Transformationen, die angewandt auf Subsystem 1 des $|cat\rangle_{00}$ Zustands den Zustand $|cat\rangle_{ab}$ ergeben.

Die Wahrscheinlichkeit des Messergebnisses a,b erhält man aus (3.2). Da $K_{ij}^{12} = 0$, ergibt sich unabhängig von λ^1 und a,b: $p = \frac{1}{n^2}$, also $\tilde{p} = 1$. Die Teilchen auf Alice' Seite gehen nach (3.32) in den gemessenen reinen, maximal verschränkten Zustand $|cat\rangle_{ab}$ über. Für Subsystem 3 erhält man mit (3.35) und (4.3):

$$\lambda_k^{3\prime} = \lambda_i^1 M_{ij}^{12^{(m)}} M_{jk}^{23} \tag{4.5}$$

Diese Gleichung lässt sich folgendermaßen interpretieren: In Abschnitt 4.1 wurden die Verschränkungstensoren von maximal verschränkten Zuständen als normerhaltende Abbildungen identifiziert. Dies bedeutet, dass in dieser Darstellung $M_{ij}^{12^{(m)}}$ den Zustand λ_i^1 von System 1 in System 2 abbildet. Dieses Abbild wird von M_{jk}^{23} in System 3 abgebildet. Dabei spielt der gemessene Zustand die gleiche Rolle wie der vor der Messung präparierte Zustand M_{jk}^{23}. Auf diese Art lässt sich

verstehen, wie die Information von Subsystem 1 in Subsystem 3 gelangt. Dies bedeutet natürlich nicht, dass bei der Messung tatsächlich der Quantenzustand durch die Verschränkung als 'Leitung' fließt, sondern bezieht sich lediglich auf die mathematische Beschreibung. Dennoch liefert dieses Bild eine anschauliche Beschreibung der Vorgänge, wenn man sich auf den Raum der Wahrscheinlichkeitsgrößen bezieht.

Entsprechend den Überlegungen aus Abschnitt 2.3.3 muss Bob zum Zeitpunkt von Alice' Messung sein Teilchen 3 noch durch den total gemischten Zustand beschreiben. Nach (3.57) kann dieser Zustand als gleichverteilte, klassische Mischung der n^2 möglichen Zustände für $\lambda_k^{3'}$ betrachtet werden. Welche möglichen Zustände dies sind, wird durch den unbekannten Zustand λ_i^1 festgelegt. Wenn Bob von Alice' Messergebnis erfährt, weiß er, welcher dieser Zustände der richtige ist, und der Zustand seines Teilchens geht in (4.5) über. Von dieser Sicht ergibt sich der Schluss, dass der einzige reale Informationsfluss die klassische Kommunikation zwischen Alice und Bob darstellt. Zusätzlich benötigt Bob noch die Information über den Zustand der Teilchen 2 und 3 und die benutzte Messbasis. Dies ist implizit darin enthalten, dass Bob für seine Beschreibung der Vorgänge die entsprechenden Zustände benutzt.

Die übertragene Menge an klassischer Information beträgt, da alle Messergebnisse gleich wahrscheinlich sind, $2 \ln n$, was genau dem doppelten klassischen Informationsgehalt des teleportierten Quantensystems entspricht. Dies ist auch der minimale Informationsaustausch, der für alle Teleportationsszenarien erforderlich ist. Denn es ist nach (2.17) die maximale Informationsmenge, die Alice durch lokale Operationen in einem Quantensystem speichern kann, wenn ihr Teilchen Teil eines verschränkten Systems ist. Wäre Teleportation mit dem Austausch von weniger klassischer Information möglich, so könnte Bob, sofern er den Rest des verschränkten Systems besitzt, nachdem Alice ihre Messung gemacht hat, bereits eine Schätzung seines Gesamtsystems machen, die besser als gleichverteilt wäre. Damit wäre klassische Information instantan geflossen, was nach Abschnitt 2.3.3 nicht möglich ist.

Mit dem Wissen um das Ergebnis von Alice ist Bob nun in der Lage, die richtige unitäre Transformation durchzuführen. Dass der Zustand $\lambda_i^{3'}$ sich nur durch eine unitäre Transformation von Alice' ursprünglichen Zustand λ_i^1 unterscheidet, ist mit den abgeleiteten Eigenschaften der M_{ij} der Cat-States einzusehen. Setzt man für $M_{ij}^{12^{(m)}}$ (4.4) ein, so folgt:

$$\lambda_k^{3'} = \lambda_i^1 c_{il}^{ab} M_{lj}^{cat_{00}} M_{jk}^{cat_{00}} = \lambda_i^1 c_{ik}^{ab} = c^{-1}{}_{ki}^{ab} \lambda_i^1 \tag{4.6}$$

Um den ursprünglichen Zustand zu erhalten, muss Bob die Transformation c_{ik}^{ab} auf sein Teilchen anwenden:

$$\lambda_j^{3''} = c_{jk}^{ab} \lambda_k^{3'} = c_{jk}^{ab} c_{ik}^{ab} \lambda_i^1 = \lambda_j^1 \tag{4.7}$$

Die restlichen vorhandenen Subsysteme bleiben, auch wenn Verschränkungen mit Subsystem 1 vorhanden waren, bei der Teleportation unverändert. Denn nach

(3.36) gilt für die Koeffizienten der anderen Subsysteme mit $\mu.. \neq 1, 2, 3$:

$$K_{k..}^{\mu..\prime} = \frac{1}{\tilde{p}} \left(K_{k..}^{\mu..} + K_{i..}^{1\mu..} \lambda_i^{1(m)} + K_{jk..}^{2\mu..} \lambda_j^{2(m)} + K_{ijk..}^{12\mu..} K_{ij}^{12(m)} \right) \tag{4.8}$$

$$= K_{k..}^{\mu..} + K_{ijk..}^{12\mu..} M_{ij}^{12(m)} \tag{4.9}$$

Mit (4.3) lässt sich klarmachen, dass die $K_{ijk..}^{12\mu..}$ alle verschwinden, da in der Zerlegung in Verschränkungstensoren in jedem Term ein Faktor mit Subsystem 2 vorhanden ist, und Subsystem 2 nur mit Subsystem 3 verschränkt ist. Es ergibt sich also $K_{k..}^{\mu..\prime} = K_{k..}^{\mu..}$, was auch entsprechend für λ_i^{μ} gilt.

Teleportation mit Werner-Zuständen

Sind die Subsysteme 2 und 3 vor der Teleportation nicht im reinen $|cat_{00}\rangle$-Zustand, sondern im pseudoreinen Werner-Zustand (s. Abschnitt 1.4), ist $M_{ij}^{23} = xM_{ij}^{cat00}$. Bis auf den Faktor x ist die Rechnung identisch. Für den Zustand nach der Teleportation ergibt sich dann:

$$\lambda_j^{3\prime} = x\lambda_j^1 \tag{4.10}$$

Dies ist der richtige Blochvektor um den Faktor x verkürzt. War Subsystem 1 ein reiner oder pseudoreiner Zustand, ist dies ein pseudoreiner Zustand.

Für die Fidelity des teleportierten Zustands mit dem ursprünglichen Zustand erhält man:

$$F = \frac{1}{n}(1 + \lambda_j^1 \lambda_j^3) = \frac{1}{n}(1 + x\lambda_j^1 \lambda_j^1) \tag{4.11}$$

War Subsystem 1 in einem reinen Zustand, also $\lambda_i^1 \lambda_i^1 = n - 1$, so ergibt sich: $F = \frac{1}{n}(1 + x(n-1))$. Ist $x = \frac{1}{1+n}$, d.h. der Werner Zustand liegt gerade auf der Separabilitätsgrenze, erhält man:

$$F = \frac{2}{n+1} \tag{4.12}$$

Dies ist genau der Wert für die Fildelity, der nur durch Übermittlung eines klassischen Messwertes erreicht werden kann.

4.3 Entanglement Swapping

War Subsystem 1 vor der Teleportation mit anderen Subsystemen verschränkt, so gehen alle Verschränkungseigenschaften auf Subsystem 3 über. Bei der Teleportation wird nicht nur der lokale Zustand λ_i^1 übertragen, sondern alle Korrelationen von Subsystem 1 gehen auf Subsystem 3 über. Dies lässt sich folgendermaßen begründen: Aus (3.38) folgt mit (4.3) und (4.4):

$$M_{kl..}^{3\mu..\prime} = \mathcal{P}_m^{(12):2}(M_{ijkl..}^{123\mu..}) M_{ij}^{12(m)} - \mathcal{R}_m(M_{lk..}^{3\mu..}) \tag{4.13}$$

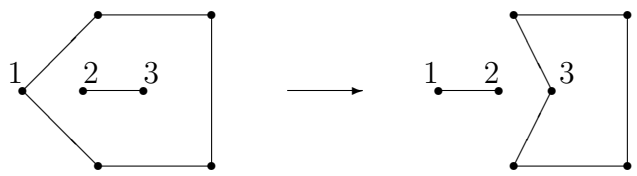


Abb. 4.2: Beispiel für Entanglement Swapping. Die Punkte deuten die Subsysteme an, die Linien Verschränkung.

Der letzte Term fällt weg, da sich die anderen Subsysteme nicht verändert haben und daher in der Zerlegung in jedem Term mindestens ein Faktor 0 ist. In der Zerlegung $\mathcal{P}_m^{(12):2}(M_{ijkl..}^{123\mu..})$ von $M_{ijkl..}^{123\mu..}$ in Terme aus 2 Faktoren, die jeweils 1 und 2 enthalten, bleibt nur der Term übrig, der M_{jk}^{23} enthält. Es ergibt sich:

$$M_{kl..}^{3\mu..\prime} = M_{il}^{1\mu..} M_{jk}^{23} M_{ij}^{12(m)} \tag{4.14}$$

Mit der gleichen Argumentation wie für $\lambda^{3\prime}$ gilt nach der unitären Transformation auf Subsystem 3:

$$M_{jl..}^{3\mu..\prime\prime} = c_{jk}^{ab} M_{kl..}^{3\mu..\prime} = c_{jk}^{ab} c_{ik}^{ab} M_{il}^{1\mu..} = M_{jl}^{1\mu..} \tag{4.15}$$

Die Verschränkungstensoren werden auf die gleiche Art von Subsystem 1 auf Subsystem 3 übertragen wie der lokale Zustand λ_i^1. Subsystem 3 hat nach der Teleportation alle Eigenschaften, die Subsystem 1 hatte. Da auch alle anderen Subsysteme unverändert bleiben, wird bei der Teleportationsmessung die Rolle von Subsystem 1 im Quantennetzwerk auf Subsystem 3 übertragen.

War vor der Teleportationsmessung Subsystem 1 mit weiteren Subsystemen verschränkt, so geht diese Verschränkung auf Subsystem 3 über. Außerdem sind nach der Messung die Subsysteme 1 und 2 verschränkt. Diese Verschränkung entsteht, da die gemessenen Subsysteme in den gemessenen Zustand projiziert werden. Die Verschränkungseigenschaften von den Subsystemen 1 und 3 vertauschen (s. Abb. 4.2).

4.4 Klassische Anwendungsbeispiele

Auch wenn die Relationen in Kapitel 3 mit Hilfe des quantenmechanischen Dichteopertatorformalismus abgeleitet wurden, so sind ihre Anwendungen keineswegs auf Quantensysteme beschränkt. Der Dichteoperator enthält auch die vollständige Beschreibung klassischer Zustände. Beschränkt man sich auf diesen klassischen Unterraum, so gelten die Kapitel 3 abgeleiteten Relationen auch für klassische

Systeme. Die zur Herleitung benutzten Relationen zwischen den Korrelationsgrößen besitzen ebenso in der klassischen Wahrscheinlichkeitstheorie Gültigkeit.

Im klassischen Unterraum bewegt man sich, wenn man sich auf eine Messbasis festlegt und in dieser Basis nur diagonale Dichtematrizen zulässt. Die Zustände dieser Messbasis stellen die diskreten, klassischen, reinen Zustände dar, also die Zustände, in denen das Wissen um den Zustand des Systems maximal ist. Die Dimension ergibt sich daher für ein n-Niveau-System als n-1. Entwickelt man die klassischen Dichtematrizen in SU(n)-Generatoren, so spielen nur die $\hat{w}_l$ mit $1 < l < n-1$ aus (1.5) eine Rolle. Sie spannen den klassischen Unterraum auf. Die Koeffizienten der restlichen λ_i sind 0.

Gemischte Zustände lassen sich als ein Ensemble interpretieren, wobei sich der p_i-te Anteil im reinen Zustand $|i\rangle$ befindet. Eine vollständige Messung an einem Einzelsystem liefert aber immer einen reinen Zustand. Es ist ebenfalls sinnvoll, Einzelsysteme durch gemischte Zustände zu beschreiben, wenn Unkenntnis über die genaue Präparation herrscht. Der gemischte Zustand drückt dann diesen Informationsmangel aus. Bei wiederholter Messung an einem Ensemble von auf gleicher Weise präparierten Systemen bewirkt dieser Informationsmangel eine entsprechende statistische Verteilung.

4.4.1 Klassischer Hütchenspieler

Als Beispiel soll ein Hütchenspieler betrachtet werden. Das Spiel besteht aus 3 Hütchen und einer Kugel. Die Kugel wird unter eines der Hütchen gelegt, und die Hütchen gemischt. Angenommen ein Beobachter hat beim Mischen nicht aufgepasst, und der Hütchenspieler ist ehrlich. Wie muss er den Zustand seines Systems nun beschreiben, und welche Information gewinnt er durch Messungen von Teilsystemen?

Nach dem Mischen gibt es die folgenden Möglichkeiten:

Hat man keine weitere Information, muss man sie als gleichverteilt annehmen. Das System lässt sich aus 3 Subsystemen mit je 2 Niveaus auffassen. Bezeichnet man ein leeres Hütchen mit $|0\rangle$ und ein besetztes mit $|1\rangle$, so lässt sich der Zustand durch die Dichtematrix:

$$\hat{\rho} = \frac{1}{3}\left(|100\rangle\langle 100| + |010\rangle\langle 010| + |001\rangle\langle 001|\right) \tag{4.16}$$

beschreiben. Dieser Zustand lässt sich nun auch in Cluster-Operatoren entwickeln. Da wir uns im für 2-Niveau-Systeme eindimensionalen, klassischen Unterraum bewegen, tritt nur eine Komponente der lokalen Größen in Erscheinung. In dieser

Darstellung ist dies λ_3. Für die Entwicklung ergibt sich:

$$\lambda^1 = \lambda^2 = \lambda^3 = -\frac{1}{3}\,, \qquad K^{12} = K^{13} = K^{23} = -\frac{1}{3} \tag{4.17}$$

$$M^{12} = M^{13} = M^{23} = -\frac{4}{9}\,, \qquad K^{123} = 1\,, \qquad M^{123} = \frac{16}{27} \tag{4.18}$$

Dabei bedeutet $\lambda^1 = 1$ 'unter Hütchen 1 befindet sich sicher eine Kugel' und $\lambda^1 = -1$ 'unter Hütchen 1 ist sicher keine Kugel'. Die 2er Korrelationen bewegen sich von $K^{12} = 1$, also '1 und 2 gleich', bis $K^{12} = -1$, also '1 und 2 verschieden'. Ist $M^{12} = 1$, weiss man, dass 1 und 2 gleich sind, hat aber keine Information über den lokalen Zustand, also eine gleichverteilte Mischung aus 'beide enthalten eine Kugel' und 'beide enthalten keine Kugel'.

Wie verändert sich das System nun bei lokalen Messungen? Eine Messung bedeutet dabei einfach, unter das Hütchen zu schauen, ob eine Kugel darunter ist oder nicht. Da wir klassische Zustände beschreiben, gibt es jetzt nur diese eine lokale Messbasis mit den möglichen Messwerten $\lambda^{(m)} = 1$ und $\lambda^{(m)} = -1$. An Subsystem 1 soll eine solche Messung durchgeführt werden. Für die Wahrscheinlichkeiten ergibt sich mit (3.2):

$$p_1 = \frac{1}{2}(1 + \lambda^1 \lambda^{1^{(m)}}) = \frac{1}{2}\left(1 + (-\frac{1}{3})1\right) = \frac{1}{3} \tag{4.19}$$

$$p_{-1} = \frac{1}{2}(1 + \lambda^1 \lambda^{1^{(m)}}) = \frac{1}{2}\left(1 + (-\frac{1}{3})(-1)\right) = \frac{2}{3} \tag{4.20}$$

Natürlich lassen sich diese Werte auch direkt aus den verschiedenen Möglichkeiten ermitteln. Angenommen es wurde der Fall $\lambda^{1^{(m)}} = 1$ gemessen, d.h. die Kugel befindet sich unter Hütchen 1. Die anderen beiden Hütchen gehen dann in den Zustand

$$\lambda^{2'} = \lambda^2 + \frac{1}{2p_1} M^{12} \lambda^{1^{(m)}} = -\frac{1}{3} + \frac{3}{2}(-\frac{4}{9})1 = -1 \tag{4.21}$$

$$\lambda^{3'} = \lambda^3 + \frac{1}{2p_1} M^{13} \lambda^{1^{(m)}} = -\frac{1}{3} + \frac{3}{2}(-\frac{4}{9})1 = -1 \tag{4.22}$$

$$M^{23'} = M^{23} + \frac{1}{2p_1} M^{123} \lambda^{1^{(m)}} - (\lambda^{2'} - \lambda^2)(\lambda^{3'} - \lambda^3) \tag{4.23}$$

$$= -\frac{4}{9} + \frac{3}{2}(\frac{16}{27})1 - \frac{2}{3}\frac{2}{3} = 0 \tag{4.24}$$

über. Die lokalen Zustände sind jetzt im reinen Zustand $\lambda = -1$. Es besteht zwar noch die Korrelation $K^{23} = 1$, die sich aber vollständig durch die lokalen Eigenschaften erklärt, daher $M^{23} = 0$.

Natürlich lässt sich des Ergebnis leicht erklären. Findet man die Kugel unter Hütchen 1, weiß man natürlich mit Sicherheit, dass unter den Hütchen 2 und 3 keine Kugel zu finden ist, da es nur eine gibt.

Wird der wahrscheinlicheren Fall $\lambda^{1(m)} = -1$ gemessen, d.h. man findet keine Kugel unter Hütchen 1, so folgt:

$$\lambda^{2'} = \lambda^2 + \frac{1}{2p_1} M^{12} \lambda^{1(m)} = -\frac{1}{3} + \frac{3}{4}(-\frac{4}{9})(-1) = 0 \tag{4.25}$$

$$\lambda^{3'} = \lambda^3 + \frac{1}{2p_1} M^{13} \lambda^{1(m)} = -\frac{1}{3} + \frac{3}{4}(-\frac{4}{9})(-1) = 0 \tag{4.26}$$

$$M^{23'} = M^{23} + \frac{1}{2p_1} M^{123} \lambda^{1(m)} - (\lambda^{2'} - \lambda^2)(\lambda^{3'} - \lambda^3) \tag{4.27}$$

$$= -\frac{4}{9} + \frac{3}{4}(\frac{16}{27})(-1) - \frac{1}{3}\frac{1}{3} = -1 \tag{4.28}$$

Lokal gehen Subsystem 2 und 3 in den total gemischten Zustand über. Durch die Messung verliert man also lokale Information, da vor der Messung die lokalen Eigenschaften zumindest teilweise bestimmt sind. Auch wird durch die Messung die Korrelation vergrößert. Subsystem 2 und 3 sind nun völlig antikorreliert. Auch dieses Ergebnis lässt sich natürlich leicht verstehen. Findet man keine Kugel unter Hütchen 1, so muss sie sich entweder unter Hütchen 2 oder 3 befinden. Daher die Antikorrelation. Wenn man keine weitere Information hat, weiß man nicht unter welchem. Also sind die lokalen Zustände völlig unbestimmt.

4.4.2 Klassische Teleportation

Auch das Analogon der Teleportation eines Quantenzustands lässt sich im klassischen Unterraum realisieren. So lässt sich die Wahrscheinlichkeitsverteilung eines klassischen n-Niveau-Systems durch Korrelationsmessungen auf ein anderes, beliebig weit entferntes n-Niveau-System übertragen.

2-Niveau-Systeme

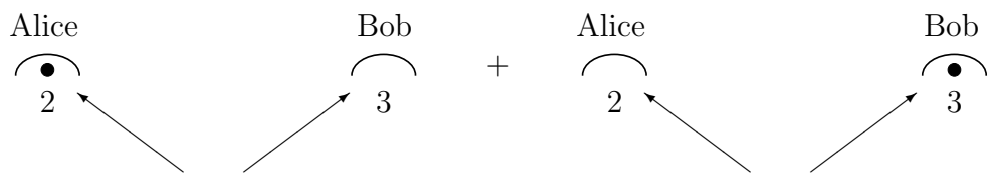
Der Anschaulichkeit halber soll dies zunächst für ein 2-Niveau-System behandelt werden. An Stelle des EPR-Zustands der Subsysteme 2 und 3 bei der Quantenteleportation tritt nun ein klassischer, vollständig antikorrelierter und lokal total gemischter Zustand mit der Dichtematrix:

$$\hat{\rho}^{23} = \frac{1}{2} \left(|01\rangle\langle 01| + |10\rangle\langle 10| \right) \tag{4.29}$$

Für diesen Zustand ergibt sich:

$$\lambda^2 = \lambda^3 = 0, M^{23} = -1 \tag{4.30}$$

Der Zustand entspricht der Projektion des EPR-Zustands in den klassischen Raum. Präpariert werden kann ein solcher Zustand im Hütchenmodell dadurch, dass ein Hütchen mit Kugel und eines ohne gemischt werden. Das eine Hütchen erhält Alice als Subsystem 2, das andere Bob als Subsystem 3. Alice und Bob können dabei beliebig weit voneinander entfernt sein. Es ergeben sich folgende gleich wahrscheinlichen Möglichkeiten:



Besitzt Alice ein auf unbekannte Weise präpariertes System 1, das mit dem unbekannten Zustand λ^1 beschrieben wird, so kann sie diesen Zustand durch eine Korrelationsmessung ihrer beiden Subsysteme und Übermittlung klassischer Information zu Bob teleportieren. Ihre Messbasis ist $M^{12(m)} = \pm 1$ und $\lambda^{1(m)} = \lambda^{2(m)} = 0$. Im Gegensatz zu verschränkten Systemen der Quantentheorie existieren für klassische Systeme keine reinen Zustände, die maximal korreliert, aber lokal gemischt sind. Bei dieser Messung handelt es sich hier also um eine Messung an einem entarteten Messoperator. Der Entartungsraum für $M^{12} = -1$ wird durch die Zustände $|01\rangle$ und $|10\rangle$ aufgespannt, der für $M^{12} = 1$ durch $|00\rangle$ und $|11\rangle$. Wie aber in (3.1.2) gezeigt wurde, sind die Auswirkungen auf die nichtgemessenen Subsysteme dieselben, wie wenn der gemessene Zustand rein wäre.

Im Hütchenmodell bedeutet eine solche Messung, zu überprüfen, ob die Hütchen 1 und 2 gleich oder unterschiedlich sind. Das Messergebnis $M^{12(m)} = 1$ bedeutet dabei, Hütchen 1 und 2 enthalten entweder beide eine Kugel oder beide keine. Entsprechend bedeutet $M^{12(m)} = -1$, wenn Hütchen 1 eine Kugel enthält, enthält Hütchen 2 keine oder umgekehrt. Dabei werden aber nicht die lokalen Eigenschaften der Hütchen ermittelt.

Teleportation

Das Gesamtsystem ist vor der Teleportationsmessung in folgendem Zustand:

$$\lambda^2 = \lambda^3 = 0\,, \quad K^{12} = K^{13} = M^{12} = M^{13} = 0 \tag{4.31}$$

$$K^{23} = M^{23} = -1\,, \quad K^{123} = -\lambda^1\,, \quad M^{123} = 0 \tag{4.32}$$

Für die Wahrscheinlichkeiten der beiden Messwerte ergibt sich nach (3.18):

$$p = \frac{2}{4}\left(1 + \lambda_i^1 \lambda_i^{1(m)} + \lambda_j^2 \lambda_j^{2(m)} + K_{ij}^{12} K_{ij}^{12(m)}\right) = \frac{1}{2} \tag{4.33}$$

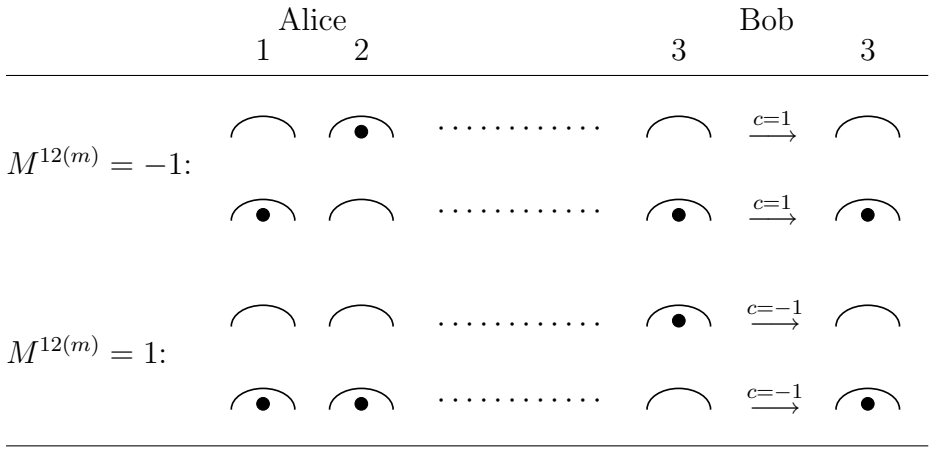


Abb. 4.3: Die 4 klassischen Möglichkeiten, die das Gesamtsystem aus den Hütchen 1,2 und 3 annehmen kann. Im Falle $M^{12(m)} = 1$ muss Bob den Inhalt seines Hütchens 'invertieren'. Dann sind die Hütchen 1 und 3 immer identisch.

Ist das Ergebnis der Messung $M^{12(m)} = -1$, geht Subsystem 3 nach (3.35) in den Zustand

$$\lambda^{3'} = \lambda^1 M^{23} M^{12(m)} = \lambda^1(-1)(-1) = \lambda^1 \tag{4.34}$$

über. Für $M^{12(m)} = 1$ erhält man:

$$\lambda^{3'} = \lambda^1 M^{23} M^{12(m)} = \lambda^1(-1)1 = -\lambda^1 \tag{4.35}$$

Nach der Messung muss Alice Bob das Ergebnis ihrer Messung mitteilen. Da beide Messergebnisse gleich wahrscheinlich sind, wird die Informationsmenge $\ln 2$ übermittelt. Im Falle $M^{12(m)} = 1$ muss Bob noch die unitäre Transformation $U_1 = |0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0|$ oder im Blochvektorbild $c_1 = -1$, die den klassischen Raum auf sich selbst abbildet, auf seinen Zustand anwenden. Für $M^{12(m)} = -1$ braucht Bob nichts tun, also $U_{-1} = \hat{1}$ oder $c_{-1} = 1$. Dann befindet sich Bobs System im Zustand λ^1.

Dies lässt sich am Hütchenmodell anschaulich verstehen. Findet Alice heraus, dass ihre Hütchen 1 und 2 unterschiedlich sind, so weiß sie sofort, da Hütchen 2 und 3 unterschiedlich sind und nur 2 Möglichkeiten existieren, dass Hütchen 1 und 3 gleich sind. Entsprechend folgt, wenn 1 und 2 gleich sind, dann gilt 1 und 3 sind unterschiedlich, was durch Änderung von Hütchen 3 behoben wird (Abb. 4.3). Sind in einem Ensemble von auf unbekannte Weise präparierten Hütchen 1 ein Anteil mit Kugel und der Rest ohne, was dem nicht reinen Zustand entspricht, so wird diese Verteilung auf Hütchen 3 übertragen. Dies entspricht der Teleportation des Zustands λ^1.

Natürlich könnte Alice auch einfach, was bei der Quantenteleportation nicht möglich ist, unter Hütchen 1 schauen und die gewonnene Information Bob mitteilen, der dann den Zustand selbst präparieren kann. Die übertragene Informations-

menge wäre ebenfalls $\ln 2$. Alice und Bob würden dann den Zustand λ^1 kennen. Dies ist nicht notwendig.

Da die Rechnung analog zur Quantenteleportation abläuft, gilt auch hier (4.15). Falls also Subsystem 1 mit weiteren Systemen korreliert war, so gehen neben dem lokalen Zustand alle Korrelationenseigenschaften auf Subsystem 3 über.

Subsysteme 1 und 2

Da es klassisch keine vollständig korrelierten und lokal unbestimmten Zustände gibt, und daher die Korrelationsmessung hier einem entarteten Messoperator entspricht, gehen die Subsysteme 1 und 2 allgemein auch nicht in einen reinen Zustand über. Es bestehen weiterhin Korrelationen zwischen den Subsystemen 1,2 und 3. Ein klassisches 'Entanglement Swapping' existiert deshalb nicht.

Im einzelnen ergibt sich im Fall des Messegebnisses $M^{12(m)} = -1$:

$$\begin{aligned} \lambda^{1'} = \lambda^1, \lambda^{2'} = -\lambda^1, K^{12'} = -K^{13'} = K^{23'} = -1, \\ M^{12'} = -M^{13'} = M^{23'} = -1 + (\lambda^1)^2 \\ K^{123'} = -\lambda^1, M^{123'} = \frac{1}{2}\lambda^1 - \frac{5}{8}(\lambda^1)^3 \end{aligned} \tag{4.36}$$

Subsystem 1 bleibt weiterhin im Zustand λ^1. Die Subsysteme 1 und 2 werden in den vollständig antikorrelierten Unterraum projiziert. Dies entspricht gerade einer Mischung der beiden Möglichkeiten für $M^{12(m)} = -1$ in Abb. 4.3. Für das Messergebnis $M^{12(m)} = 1$ ergibt sich ein entsprechendes Resultat.

n-Niveau-Systeme

Die klassische Teleportation ist auch nicht auf 2-Niveau-Systeme beschränkt, sondern auch für allgemeine n-Niveau-Systeme durchführbar. Dabei teilen sich Alice und Bob den Zustand:

$$\hat{\rho}_0 = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} |ii\rangle\langle ii| \tag{4.37}$$

Dies bedeutet, das einzige Wissen ist, dass beide Subsysteme gleich sind. In Blochdarstellung ergibt sich:

$$\lambda_i^2 = 0, \quad \lambda_i^3 = 0, \quad M_{ij}^{23} = M_{ij}^0 = \delta_{ij} \tag{4.38}$$

Der Messoperator setzt sich jetzt aus den n Projektoren

$$\hat{P}_k = \sum_{i=0}^{n-1} |i, i+k\rangle\langle i, i+k| \tag{4.39}$$

zusammen mit $k = 0..n-1$, also der Messung, um wieviel Niveaus sich der Zustand 1 von 2 unterscheiden. Da $\hat{P}_k$ ein Projektor in einen n-dimensionalen Raum ist, ergibt sich nach Abschnitt 3.1.2 für den effektiv gemessenen Zustand: $\hat{\rho}_k = \frac{1}{n}\hat{P}_k$. Diese Zustände lassen sich aus $\hat{\rho}_0$ durch Anwendung der lokalen Transformationen

$$\hat{U}_k = \sum_{i=0}^{n-1} |i+k\rangle\langle i| \tag{4.40}$$

auf Subsystem 1 bilden. $\hat{U}_k$ bildet klassische Zustände wieder auf klassische Zustände ab. Damit erhält man für die möglichen gemessenen Zustände:

$$\lambda_i^{1(m)} = \lambda_j^{2(m)} = 0, \quad M_{ij}^{12(m)} = c_{ik}^k M_{kj}^0 \tag{4.41}$$

Die c_{ik}^k sind dabei die Koeffizienten von $\hat{U}_k$ im Blochvektorbild. Führt nun Alice an ihren beiden Teilsystemen die Messung durch, ergibt sich für Subsystem 3:

$$\lambda_i^{3'} = \lambda_l^1 M_{ji}^{23} M_{lj}^{12(m)} = \lambda_l^1 M_{ji}^0 c_{ik}^k M_{lj}^0 = c_{li}^k \lambda_l^1 \tag{4.42}$$

abhängig vom Messwert k. Auch hier sind alle Messergebnisse gleich wahrscheinlich. Übermittelt Alice ihr Ergebnis an Bob, kann dieser die vom Messergebnis abhängige Transformation c_{ji}^k auf sein System anwenden. Es ergibt sich:

$$\lambda_i^{3''} = c_{ji}^k \lambda_i^{3'} = c_{ji}^k c_{li}^k \lambda_l^1 = \lambda_i^1 \tag{4.43}$$

Die Informationsmenge, die übermittelt werden muss, ist $\ln n$.

4.5 Anmerkungen

Aus den vorangegangen Beispielen und Überlegungen wurde deutlich, dass sich bei Messszenarien die Gleichungen zur Beschreibung von Quantensystemen und von klassischen Wahrscheinlichkeitsgrößen entsprechen. So sind die grundlegenden Mechanismen, wie Korrelationen Einfluss auf den Zustand der nicht gemessenen Subsysteme nehmen, die gleichen. Sie gehen aus der Art, wie sich eine Projektion auf die Dichtematrix auswirkt, hervor. Damit stellt sich die Frage, was an Quantensystemen anders ist. Warum erscheinen die klassischen Beispiele so trivial?

Bezüglich Messungen kann man die Quantentheorie als Erweiterung der klassischen Wahrscheinlichkeitstheorie auf einen höheren Zustandsraum betrachten. Der quantenmechanische Zustandsraum geht aus dem klassischen durch Anwendung der SU(n)-Gruppe auf die Dichtematrix hervor. Die reinen Quantenzustände folgen durch unitäre Transformation der diskreten reinen klassischen Zustände und bilden jetzt eine zusammenhängende Menge. Die Dimension wächst dabei von n-1 auf n^2-1. Für ein 2-Niveau-System ist dies anschaulich zu machen durch die

Erweiterung auf die Blochkugel. Für höhere Systeme ist dies nicht mehr so leicht möglich.

Diese Erweiterung des Zustandsraums hat nun weit reichende Konsequenzen. Ein Aspekt ist die Komplementarität, die besagt, dass in der Regel Messgrößen nicht gleichzeitig scharf gemessen werden können. Für das Ergebnis einer Messung ist nur die in den klassischen Unterraum, der durch die Messbasis aufgespannt wird, projizierte Komponente des Zustands entscheidend. Das System verhält sich wie ein klassisches System in diesem Zustand. Bei aufeinander folgenden Messungen kann dieser klassische Unterraum für jede Messung ein anderer sein. Daher kann, auch wenn sich das System nach einer Messung in einem reinen Zustand befindet, die klassische Komponente für die nächste Messung gemischt sein. Finden die Messungen nur in einem klassischen Unterraum statt, verhält sich ein Quantensystem rein klassisch.

Befindet sich ein klassisches System in einem reinen Zustand, d.h. man hat vollständige Information über das System, kann man jeden Messwert vorhersagen. Da sich nach einer Messung an einer vollständigen Basis das System in einem reinen Zustand befindet, führt dies dazu, dass man sich das Bild einer realen Welt machen kann. Das System befindet sich real immer in einem festen reinen Zustand, über den wir aber nur unvollständige Information besitzen, die durch Messung erlangt wird. In der Quantenmechanik ist eine solche Vorstellung einer Realität nicht mehr möglich.

Für klassische und quantenmechanische Systeme lassen sich die nichtgemessenen Subsysteme vor der Messung als klassische Mischung über die möglichen Zustände nach der Messung schreiben (3.57). Da es für klassische Systeme für das gemessene Subsystem nur eine mögliche vollständige Messbasis gibt, sind die Zustände dieser Mischung eindeutig. Durch Übermittlung des Messergebnisses erhält der Beobachter die Information, welcher Zustand der richtige ist, und sein Subsystem geht in diesen Zustand über. Er kann aber auch sagen, real sei sein System schon immer in diesem Zustand gewesen. Quantenmechanisch kann in unterschiedlichen lokalen Messbasen gemessen werden. Die möglichen Zustände der nichtgemessenen Subsystem sind für jede Basis andere und daher die klassische Mischung nicht eindeutig.

Teleportation klassisch und quantenmechanisch

Die Aussage für beide Arten der Teleportation ist die, dass nach der Teleportation Messungen an Subsystem 3 die gleiche Statistik liefern wie Messungen an Subsystem 1 ohne Teleportation. Der Weg, wie der Zustand übertragen wird, also die Rolle der Korrelationen, ist bis auf die Dimension des Zustandsraumes, identisch. Neben diesen Gemeinsamkeiten gibt es aber auch Unterschiede, die auf der höheren Dimension des quantenmechanischen Zustandsraums basieren. Bei der Quantenteleportation findet die Messung an einer vollständigen Basis der Subsysteme 1 und 2 statt, wodurch diese in den gemessene Zustand übergehen. Der

Originalzustand in Subsystem 1 geht dabei konsistent zum No-Clonig-Theorem [29] verloren. Klassisch ist der Messoperator entartet. Dadurch bleibt der Originalzustand erhalten.

Klassisch lässt sich die Teleportation auch so verstehen, dass Bob sein System im richtigen Zustand selbst präpariert. Diese Interpretation ist möglich, da es nur eine diskrete Menge an reinen Zuständen und Transformationen gibt und er die nötige Information zur Präparation des Zustands von Alice erhält. Der Weg über die Korrelationsmessung bewirkt dabei nur, dass Alice Subsystem 1 nicht direkt zu messen braucht und ist hier leicht zu verstehen. Denn weiß Alice, dass Subsystem 1 und 2 beispielsweise gleich und Subsystem 2 und 3 gleich sind, und teilt dies Bob mit, weiß dieser, dass Subsystem 1 und 3 gleich sind. Quantenmechanisch ist eine solche Interpretation nicht möglich.

Kapitel 5

Transfer von Quanteninformation

Unter Quanteninformation versteht man die zur Präparation eines Quantenzustands der Dimension n benötigte Information. Ist der Zustand $|\chi\rangle = \sum_{k=0}^{n-1} a_k|k\rangle$, enthalten die Koeffizienten a_k diese Information. Dabei soll hier davon ausgegangen werden, dass keine weitere a priori Information über die a_k vorliegt. Sie sind bis auf die Normierungsbedingung frei.

In einem Quantennetzwerk soll anfangs Subsystem 1 im unbekannten Zustand $|\chi\rangle$ präpariert vorliegen. Die weiteren Subsysteme 2 bis N sind im bekannten, gegebenenfalls verschränkten, Zustand $|\psi_0\rangle$ präpariert, der als Rohmaterial dient. Da der Zustand $|\psi_0\rangle$ bekannt ist, gilt nur der Zustand $|\chi\rangle$ als relevante Quanteninformation. Diese Information ist hier vollständig in Subsystem 1 lokalisiert.

In diesem Kapitel werden Möglichkeiten erörtert, diese Information zu anderen Subsystemen zu transferieren. Dabei kann, ähnlich der Teleportation, der Zustand $|\chi\rangle$ vollständig auf ein anderes Subsystem übertragen werden. Es ist aber auch möglich, nur einen Teil der Information, etwa einen klassischen Anteil, zu übertragen. Dabei wird untersucht, auf welchem Weg die Information übertragen wird.

Das Gesamtsystems, in dem die Information des Zustands $|\chi\rangle$ gespeichert ist, befindet sich immer in einem Zustand der Form:

$$|\psi\rangle = \sum_{k=0}^{n-1} a_k|\psi_k\rangle \tag{5.1}$$

Der Zustand befindet sich in einem Unterraum $\mathcal{I}$. Die orthogonalen $|\psi_k\rangle$ spannen diesen Unterraum. Im allgemeinen ist die Quanteninformation dann nicht in einem der Subsysteme lokalisiert.

5.1 Reversible Messungen

Im allgemeinen geht durch eine Messung Quanteninformation, also der ursprüngliche Zustand, verloren. Ein Teil geht in klassische Information über. Da aber

der klassische Zustandsraum kleiner ist und bei einer Messung nur der auf den klassischen Unterraum projizierte Anteil des Quantenzustands eine Rolle spielt, geht die restliche Quanteninformation verloren. Eine Messung ist irreversibel. Der Quantenzustand lässt sich nicht durch eine nur vom Messergebnis abhängigen Quantenoperation wieder herstellen.

Befindet sich wie in (5.1) ein Zustand in einem Unterraum $\mathcal{I}$, ist die Quanteninformation also nur in diesem Unterraum gespeichert, so gibt es eine Klasse von Messungen, die diese Information erhalten, was natürlich notwendige Voraussetzung ist, wenn die Information durch Messungen übertragen werden soll. Der Zustand lässt sich dann auch durch eine, nur vom Messergebnis abhängigen, Quantenoperation wieder herstellen.

Diese Messungen sind durch die Bedingung gegeben, dass alle Projektionsoperatoren einer Messbasis im Unterraum $\mathcal{I}$ ein Vielfaches der Identität darstellen, also:

$$\hat{P}_{\mathcal{I}}\hat{P}_{\alpha}\hat{P}_{\mathcal{I}} = \mu\hat{1} \tag{5.2}$$

$\hat{P}_{\mathcal{I}} = \sum_k |\psi_k\rangle\langle\psi_k|$ ist dabei der Projektor in den Unterraum $\mathcal{I}$. Diese Bedingung ist äquivalent dazu, dass die Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Messergebnisse unabhängig vom Zustand sind. Denn für die Wahrscheinlichkeiten ergibt sich, wenn $|\psi\rangle \in \mathcal{I}$:

$$p_\alpha = \langle\psi|\hat{P}_\alpha|\psi\rangle = \langle\psi|\hat{P}_{\mathcal{I}}\hat{P}_\alpha\hat{P}_{\mathcal{I}}|\psi\rangle = \mu \tag{5.3}$$

Der Beweis, dass aus (5.3) Gleichung (5.2) folgt, lässt sich folgendermaßen erbringen: Da $\hat{P}_{\mathcal{I}}\hat{P}\hat{P}_{\mathcal{I}}|\psi\rangle = 0$ für alle Zustande $|\psi\rangle \notin \mathcal{I}$, befinden sich n Eigenvektoren von $\hat{P}_{\mathcal{I}}\hat{P}\hat{P}_{\mathcal{I}}$ im Unterraum $\mathcal{I}$. Für diese Eigenvektoren gilt ebenfalls (5.3). Sie besitzen also alle den gleichen Eigenwert p_α. Damit gilt (5.2).

Dass (5.3) und (5.2) notwendig und hinreichend sind, dass die Quanteninformation erhalten bleibt, lässt sich folgendermaßen sehen: Für den Zustand nach der Messung gilt nach (1.20):

$$\sqrt{p_\alpha}|\psi'\rangle = \hat{P}_\alpha|\psi\rangle = \hat{P}_\alpha\sum_k a_k|\psi_k\rangle \tag{5.4}$$

Im allgemeinen hängen die Wahrscheinlichkeiten p_α vom Zustand und damit von den Koeffizienten a_k ab. Die Quanteninformation bleibt genau dann erhalten, wenn der Zustand $|\psi'\rangle$ wieder ein Zustand der Form (5.1) ist. Da $\hat{P}$ linear ist, gilt:

$$\hat{P}_\alpha\sum_k a_k|\psi_k\rangle = \sum_k \sqrt{p_\alpha^k}a_k|\psi_k'\rangle \stackrel{!}{=} \sqrt{p_\alpha}(\sum_k a_k|\psi_k'\rangle) \tag{5.5}$$

Da dies für beliebige a_k gelten soll, müssen die p_α^k für alle k gleich sein. Dann bleibt die Information erhalten, denn die $|\psi_k'\rangle$ sind wieder orthogonal und spannen einen neuen Unterraum, der jetzt den Zustand enthält, auf. Dies folgt aus (5.2):

$$\langle\psi_{k'}'|\psi_k'\rangle = \frac{1}{p_\alpha}\langle\psi_{k'}|P^+P|\psi_k\rangle = \frac{1}{p_\alpha}\langle\psi_{k'}|P_{\mathcal{I}}PP_{\mathcal{I}}|\psi_k\rangle = \langle\psi_{k'}|\psi_k\rangle \tag{5.6}$$

Sind die p_α^k für alle k gleich, wirkt die Messung auf die Zustände aus dem Unterraum $\mathcal{I}$ linear. Superpositionen, und damit die Codierung der Information, bleiben erhalten. Anschaulich lässt sich die Bedingung so interpretieren, dass nur, wenn (5.3) gilt, durch Messung keine Information über die Koeffizienten a_k erlangt werden kann. Die Information muss daher noch vollständig im Quantensystem gespeichert sein.

Desweiteren kann, wenn Bedingung (5.2) erfüllt ist, die Auswirkung der Messung auf das System durch eine unitäre Transformation $\hat{U}_{rev}^\alpha$, die nur vom Messergebnis α abhängt, rückgängig gemacht werden. Denn wenn der Zustand $|\psi\rangle$ vor der Messung in $\mathcal{I}$ liegt, ist $\hat{P}_\alpha|\psi\rangle = \hat{P}_\alpha\hat{P}_\mathcal{I}|\psi\rangle$. Und es gilt

$$p_\alpha\hat{1} = \hat{P}_\mathcal{I}\hat{P}_\alpha\hat{P}_\mathcal{I} = (\hat{P}_\alpha\hat{P}_\mathcal{I})^+(\hat{P}_\alpha\hat{P}_\mathcal{I}) = p_\alpha\hat{U}^+\hat{U} \tag{5.7}$$

Die Messung wirkt somit auf alle Zustände $|\psi\rangle \in \mathcal{I}$ unitär. Es gibt daher immer ein U_{rev}^α mit:

$$U_{rev}^\alpha|\psi'\rangle = \frac{1}{\sqrt{p_\alpha}}U_{rev}P_\alpha|\psi\rangle = |\psi\rangle \tag{5.8}$$

Andererseits lässt sich damit jede Möglichkeit, durch Messungen Quanteninformation zu transportieren, prinzipiell auch durch unitäre Dynamik realisieren, wobei für lokale Messungen die unitären Transformationen im allgemeinen nichlokal sind.

Die Bedingungen (5.3) und (5.2) gelten ebenfalls für verallgemeinerte Messungen und gemischte Zustände, wenn der Zustand im Unterraum $\mathcal{I}$ ist [30]. Für verallgemeinerte Messungen gilt die Bedingung $P_\mathcal{I}\hat{E}_\alpha P_\mathcal{I} = \mu\hat{1}$.

5.2 Transfer von Zuständen und Verschränkung

Mit den im letzten Abschnitt gewonnen Ergebnissen, können einige Eigenschaften für den Transfer von Zuständen gewonnen werden.

Es soll folgende Situation vorliegen: Subsystem 1 befindet sich im unbekannten Zustand $\lambda_i^1 = \lambda_i$. Die λ_i stellen die relevante Quanteninformation dar. Die restlichen Subsysteme $2..N$ befinden sich in einem beliebigen, aber bekannten, Zustand, der durch λ^x und K^X mit $x \in [2, N]$ und X aus der Menge der Teilmengen von $[2, N]$ beschrieben wird. Zwischen Subsystem 1 und den Subsysten $2..N$ soll keine Verschränkung bestehen, also $K^{1X} = \lambda^1 K^X$ für alle X.

Es wird nun eine Sequenz von unitären Transformationen und Messungen, die die Bedingung (5.3) erfüllen, durchgeführt. Dadurch wird die Information, die anfangs in Subsystem 1 lokalisiert war, auch auf die anderen Zustände verteilt. Bedingung (5.3) ist, wie im letzten Abschnitt gezeigt, notwendig und hinreichend, dass die Quanteninformation nicht verloren geht. Es soll daher immer möglich sein, durch eine geeignete unitäre Transformation den Zustand λ_i in einem Subsystem wieder herzustellen. Da die Auswirkung von Messungen, die (5.3) erfüllen,

durch eine vom Messergebnis abhängigen unitären Transformation beschrieben werden kann, lässt sich die gesamte Sequenz durch eine unitäre Transformation U_{tr}, die i.a. auf alle Subsysteme wirkt, beschreiben.

Die Auswirkung von U_{tr} auf den Zustand eines beliebigen Subsystems z lässt sich entsprechend (1.50) als lineare Abbildung schreiben:

$$\lambda_i^{z\prime} = c_{ij}^{z1}\lambda_j^1 + \sum_x c_{ij}^{zx}\lambda_j^x + \sum_X c_{ijk..}^{z1X}\lambda_j^1 K_{k..}^X + \sum_X c_{ij..}^{zX} K_{j..}^X \tag{5.9}$$

Die Koeffizienten folgen entsprechend (1.51) aus U_{tr}. Da außer $\lambda_i^1 = \lambda_i$ alle Größen bekannt und unabhängig von λ_i sind, stellt dies eine lineare Abbildung des Zustands λ_i^1 von Raum 1 in Raum z dar:

$$\lambda_i^{z\prime} = T_{ij}^{z1}\lambda_j^1 + t_i^z \tag{5.10}$$

mit

$$T_{ij}^{z1} = c_{ij}^{z1} + \sum_X c_{ijk..}^{z1X} K_{k..}^X \quad , \qquad t_i^z = \sum_x c_{ij}^{zx}\lambda_j^x + \sum_X c_{ij..}^{zX} \tag{5.11}$$

T_{ij}^{1z} ist die Transfermatrix, t_i^z eine konstante Verschiebung. Beide Größen hängen vom Zustand der Subsysteme 2 bis N, den ausgeführten Operationen und den Messergebnissen ab. Unter den genannten Voraussetzungen wird der lokale Zustand von Subsystem 1 wird also immer linear übertragen. Für die Teleportation von Subsystem 1 nach Subsystem z ist $T_{ij}^{1z} = \delta_{ij}$ und $t_i^z = 0$ (s. Abschnitt 4.2). T_{ij}^{1z} kann im allgemeinen eine beliebige lineare Quantenoperation sein. Beispielsweise die Projektion in einen klassischen Unterraum. Dann wird nur dieser Anteil der Information übertragen.

Transfer von Verschränkung

Es soll nun die gleiche Transfersequenz für den Fall untersucht werden, dass das Subsystem 1 mit weiteren Subsystemen $\mu, \nu..$ mit $\mu, \nu.. \neq 1..N$ verschränkt war. Diese weiteren Subsysteme sollen nicht mit den Subsystemen $2..N$ verschränkt sein. Also $K^{x\mu..} = \lambda^x K^{\mu..}$ und $K^{X\mu..} = K^X K^{\mu..}$. Die Auswirkung von U_{tr} auf die die Korrelationen von Subsystem z mit den Subsystemen $\mu, \nu..$ werden wie in (5.9) beschrieben durch:

$$K_{il}^{z\mu..\prime} = c_{ij}^{z1} K_{jl}^{1\mu..} + \sum_x c_{ij}^{zx}\lambda_j^x K_l^\mu + \sum_X c_{ijk..}^{z(1X)} K_{k..}^X K_{jl..}^{1\mu..} + \sum_X c_{ij..}^{zX} K_{j..}^X K_{l..}^{\mu..} \tag{5.12}$$

Und damit

$$K_{il}^{z\mu..\prime} = T_{ij}^{z1} K_{jl}^{1\mu..} + t_i^z K_{l..}^{\mu..} \tag{5.13}$$

Alle Korrelationstensoren, die sich nicht auf eines der Subsysteme $1..N$ beziehen, bleiben unverändert, da die Transformation nur lokal auf die Subsysteme

$1..N$ wirkt. Daher gilt auch : $M^{\mu\nu..'} = M^{\mu\nu..}$. Für den Verschränkungstensor von Subsystem z mit Subsystem μ ergibt sich mit (5.13):

$$M_{il}^{z\mu'} + \lambda_i^{z'}\lambda_l^{\mu'} = K_{il}^{z\mu'} = T_{ij}^{z1}K_{jl}^{1\mu} + t_i^z\lambda_l^{\mu} \tag{5.14}$$

Mit $\lambda_i^{z'}$ aus (5.10) und $\lambda_l^{\mu'} = \lambda_l^{\mu}$ folgt:

$$M_{il}^{z\mu'} = T_{ij}^{z1}(K_{jl}^{1\mu} - \lambda_j^1\lambda_l^{\mu}) = T_{ij}^{z1}M_{il}^{1\mu} \tag{5.15}$$

Für allgemeine Verschränkungstensoren mit Subsystem z gilt ebenfalls:

$$M_{ilk..}^{z\mu\nu..'} = T_{ij}^{z1}M_{ilk}^{1\mu\nu..} \tag{5.16}$$

Der Beweis ist induktiv: Nach (1.40) gilt für einen m-Subsystem-Verschränkungstensor $K_{jl..}^{3\mu..'} = \sum_{i=1}^{m}\mathcal{P}_m^i(M_{jl..}^{3\mu..'})$. In jedem Term von $\mathcal{P}_m^i(M_{jk..}^{3\mu..'})$ mit $i \geq 2$ ist genau ein Verschränkungstensor enthalten, der Subsystem 3 enthält. Dieser transformiert sich nach (5.16), vorausgesetzt (5.16) gilt für alle kleineren Verschränkungstensoren. Die anderen Verschränkungstensoren in $\mathcal{P}_m^i(M_{jk..}^{3\mu..'})$ enthalten nur die Subsysteme $\mu, \nu..$ und bleiben unverändert. Insgesamt gilt daher:

$$M_{jl..}^{3\mu..'} = K_{jl..}^{3\mu..'} - \sum_{i=2}^{m}\mathcal{P}_m^i(M_{jl..}^{3\mu..'}) = T_{kj}^{z1}\Big(K_{jl..}^{1\mu..} - \mathcal{P}_m^i(M_{kl..}^{1\mu..})\Big) = T_{kj}^{z1}M_{kl..}^{1\mu..} \tag{5.17}$$

Die Verschränkungseigenschaften von Subsystem 1 werden demnach genauso übertragen, wie der lokale Zustand λ_i^1. Nur die Konstante t_i^z fällt weg, was einleuchtet, da dieser Anteil nur einen Produktterm erzeugt. Insbesondere bedeutet dies, dass bei jeder Art der Teleportation mit $T_{ij}^{1z} = \delta_{ij}$ alle Verschränkungseigenschaften der teleportierten Zustands wie der Zustand teleportiert werden.

Zur Untersuchung von Teleportationsszenarien ist es daher ausreichend, die Übertragung von reinen Zuständen zu untersuchen. Die Ergebnisse lassen sich direkt auf allgemeine Zustände und Verschränkungen übertragen.

5.3 Teleportation mit lokalen Messungen

Bei der Standard-Teleportation ist es notwendig, eine nichlokale Messung zwischen dem zu übertragenden Zustand und dem verschränkten System durchzuführen. Es ist aber auch möglich, eine Teleportation nur mit lokalen Messungen der Subsysteme 1 und 2 durchzuführen. Dafür muss aber vor der Messung eine nichlokale Transformation der Subsysteme 1 und 2 durchgeführt werden. Dies ist verständlich, da es möglich ist, die maximal verschränkte Messbasis der Teleportation durch eine nichlokale unitäre Transformation auf eine lokale Basis zu transformieren. Transformiert man vor der Messung das zu messende System mit dem gleichen unitären Operator, so ist dies bezüglich der Auswirkung auf die anderen Subsysteme äquivalent (s. Abschnitt 3.45).

Dies soll an einem Beispiel demonstriert werden. Dabei soll auch untersucht werden, wie die Information bei den beiden Messschritten übertragen wird.

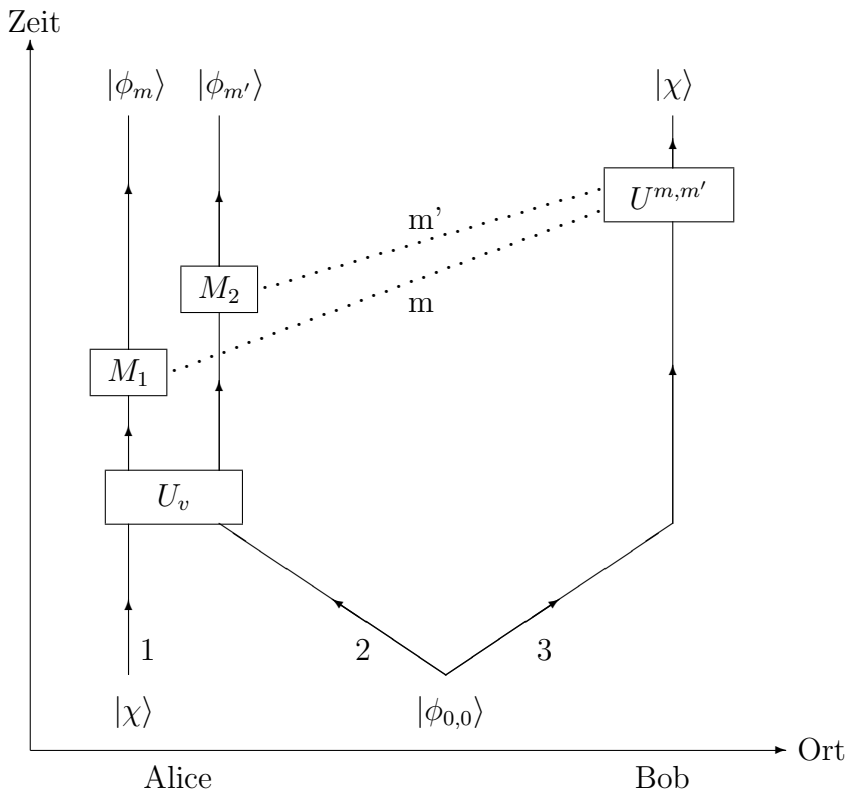


Abb. 5.1: Teleportation des Zustands $|\chi\rangle$ mit lokalen Messungen. Nach der Transformation U_v führt Alice die lokalen Messungen M_1 und M_2 aus und übermittelt Bob die Ergebnisse. — Materietransport $\cdots$ klassische Information

5.3.1 Teleportationsschema

Eine mögliche unitäre Transformation, die die Zustände einer Basis aus maximal verschränkten Zuständen auf eine lokale Basis abbildet, ist Transformation[1] (1.61):

$$\hat{U}_v = \sum_{k,l} \omega^{kl} |k,l\rangle\langle k,l| \tag{5.18}$$

Die Teleportation des unbekannten Zustands $|\chi\rangle = \sum_k a_k |k\rangle$ läuft äquivalent zur normalen Teleportation ab, mit dem Unterschied, dass Alice anstatt der nichlokalen Messung ihrer beiden Subsysteme zunächst die nichlokale unitäre Transformation $\hat{U}_v$ durchführt und anschließend nacheinander ihre beiden Subsysteme in der lokalen Basis $|\phi_m\rangle$ misst (Abb.5.1).

Der Gesamtzustand vor der Teleportation ist:

$$|\psi_0\rangle = |\chi\rangle_1 \frac{1}{n} \sum_{k,l} \omega^{kl} |k\rangle_2 |l\rangle_3 \tag{5.19}$$

[1] Wenn nichts anderes angegeben ist, laufen alle Summen im folgenden von 0 bis $n-1$

Die Subsysteme 2 und 3 sind im maximal verschränkten Zustand $|\phi_{0,0}\rangle$ (s. Gln. 1.60). Hier wurde nicht der $|cat\rangle_{00}$-Zustand verwendet, was zu einer besseren Darstellung führt.

Nach der Transformation $\hat{U}^{12}$ ergibt sich:

$$\begin{aligned} |\psi_1\rangle &= \hat{U}_v^{12}|\psi_0\rangle = \sum_{k,l}\sum_{m,k',l'} \frac{1}{n}\omega^{kl+k'l'} a_m |k,l\rangle_{12}\langle k,l|m,k',l'\rangle \\ &= \sum_{k,l,l'} \frac{1}{n}\omega^{l(k+l')} a_k |k,l,l'\rangle \end{aligned} \tag{5.20}$$

Lokal befindet sich Subsystem 1 danach im Zustand:

$$\rho_1 = \mathrm{Tr}_{23}\rho = \sum_{k,k',l,l'} \omega^{l(k-k')} a_k a_{k'}^* |k\rangle\langle k'| = \sum_k |a_k|^2 |k\rangle\langle k| \tag{5.21}$$

Nur die Diagonale der Dichtematrix bleibt lokal erhalten. Die anderen Elemente sind in den Korrelationen versteckt. Als mögliche lokale Messbasis, die die Quanteninformation nicht vernichtet, kommen nur Zustände, deren Koeffizienten betragsmäßig gleich sind, in Frage. Nur dann ist die Wahrscheinlichkeit für ein bestimmtes Messergebnis unabhängig von den a_k, was nach Abschnitt 5.1 notwendige Bedingung ist. Die Basis der $|\phi_m\rangle$ (1.62) erfüllen diese Bedingung. Für alle Messergebnisse ist dann $p = \frac{1}{n}$.

Nach der ersten Messung an Subsystem 1 mit Ergebnis $|\phi_m\rangle$ folgt:

$$\begin{aligned} |\psi_2\rangle &= \sqrt{n}|\phi_m\rangle_1\langle\phi_m|\psi_0'\rangle = |\phi_m\rangle \sum_{k,k',l,l'} \frac{1}{n}\omega^{(l(k+l')-mk')} a_k \langle k'|k,l,l'\rangle \\ &= |\phi_m\rangle \sum_{k,l,l'} \frac{1}{n}\omega^{(l(k+l')-mk)} a_k |l,l'\rangle_{23} \end{aligned} \tag{5.22}$$

Nach der zweiten Messung an Subsystem 2 mit Ergebnis $|\phi_{m'}\rangle_2$ geht der Zustand über in:

$$\begin{aligned} |\psi_3\rangle &= \sqrt{n}|\phi_{m'}\rangle_2\langle\phi_{m'}|\psi_1\rangle = |\phi_m\rangle_1|\phi_{m'}\rangle_2 \sum_{k,k',l,l'} \frac{1}{n}\,\omega^{(l(k+l')-mk-m'k')} a_k \langle k'|l,l'\rangle_{23} \\ &= |\phi_m\rangle_1|\phi_{m'}\rangle_2 \sum_{k,l,l'} \frac{1}{n}\omega^{(l(k+l'-m')-mk))} a_k |l'\rangle_3 \\ &= |\phi_m\rangle_1|\phi_{m'}\rangle_2 \sum_{l'} \omega^{(l'-m')m} a_{m'-l'} |l'\rangle_3 = |\phi_m\rangle_1|\phi_{m'}\rangle_2|\tilde{\chi}\rangle_3 \end{aligned} \tag{5.23}$$

Durch die von m und m' abhängige lokale unitäre Transformation

$$U^{m,m'} = \sum_k \omega^{(m'-k)m} |m'-k\rangle\langle k| \tag{5.24}$$

angewandt auf Subsystem 3, erhält Bob den ursprünglichen Zustand. Für Bobs Zustand $|\tilde{\chi}\rangle$ folgt:

$$U^{m,m'}|\tilde{\chi}\rangle = \sum_{k,l} \omega^{(l-k)m} a_{m'-l}|m'-k\rangle\langle k|l\rangle = \sum_{l} a_{m'-l}|m'-l\rangle = |\chi\rangle \tag{5.25}$$

Wie beim Standard-Teleportationsschema sind dies n^2 unitäre Transformationen. Da alle Messergebnisse mit gleicher Wahrscheinlichkeit auftreten, muss ebenfalls die klassische Information $2\ln n$ übermittelt werden.

5.3.2 Unitäre Transformation

Die unitäre Transformation kann auch durch zwei Transformationen U_3^m und $U_3^{m'}$ erzeugt werden, die nur von m bzw. m' abhängen und hintereinander ausgeführt werden. Für diese Transformationen findet man:

$$U^m = \sum_{k,l} \omega^{(m-l)k}|k\rangle\langle l| \tag{5.26}$$

Denn es gilt:

$$\begin{aligned} \hat{U}^m\hat{U}^{m'} &= \sum_{k,k',l,l'} \omega^{((m-l)k+(m'-l')k')}|k\rangle\langle l|k'\rangle\langle l'| \qquad (5.27)\\ &= \sum_{k,k',l} \omega^{((m'-l'-k)k'+mk}|k\rangle\langle l'| = \sum_{l} \omega^{m(m'-l')}|m'-l'\rangle\langle l'| = U^{m,m'} \end{aligned}$$

Dabei ist die Reihenfolge $\hat{U}^m$ nach $\hat{U}^{m'}$ zwingend. Es ist nicht möglich, eine Darstellung der Form $U^{m,m'} = \tilde{U}^{m'}\tilde{U}^m$ zu finden.

Beweis: Mit dem Ansatz $\tilde{U}^{m=0} = U$ und $\tilde{U}^{m'=0} = U^+$ mit beliebigen U ist die Bedingung $\tilde{U}^{m'=0}\tilde{U}^{m=0} = U^{0,0} = \hat{1}$ erfüllt. Dann ist $\tilde{U}^{m'} = U^{0,m'}U^+$ und $\tilde{U}^m = UU^{m,0}$. Es folgt dann aber $\tilde{U}^{m'}\tilde{U}^m \neq U^{m,m'}$.

Die Tatsache, dass sich $U^{m,m'}$ zerlegen lässt, lässt sich durchaus so verstehen, dass für jede Messung eine Transformation U^m durchgeführt werden muss. Die Reihenfolge der Zerlegung der $U^{m,m'}$ hat aber nichts mit der Reihenfolge der Messungen zu tun. Da die Messoperatoren vertauschen ist das Ergebnis unabhängig von der Reihenfolge der Messungen. Die Reihenfolge $\hat{U}^m$ nach $\hat{U}^{m'}$ ist vielmehr in den Verschränkungseigenschaften des Zustands $|\psi_1\rangle$ begründet. Die Begründung folgt in Abschnitt 5.3.5.

5.3.3 Schrittweise Teleportation

Es ist nun möglich, dass Alice das Ergebnis der ersten Messung sofort übermittelt. Bob erhält dann schon einen Teil des Zustands. Für seinen lokalen Anteil ergibt

sich:

$$\begin{aligned}\hat{\rho}_3' &= \mathrm{Tr}_{12}|\psi_2\rangle\langle\psi_2| = \sum_{k,l,k',l',x} \frac{1}{n^2}\omega^{(x(k+l)-x(k'+l')-m(k-k')}a_k a_{k'}^*|l\rangle\langle l'| \qquad (5.28)\\ &= \sum_{k',l,l'} \frac{1}{n}\omega^{m(l-l')}a_{k'+l'-l}a_{k'}^*|l\rangle\langle l'| = \sum_{k,l,l'} \frac{1}{n}\omega^{m(l-l')}a_{k-l}a_{k-l'}^*|l\rangle\langle l'|\end{aligned}$$

Dies entspricht dem Zustand, der durch Projektion des Orginalzustands $|\chi\rangle$ auf den klassischen Unterraum, der durch die Zustände der Basis $|\phi_m\rangle$ aufgespannt wird, entsteht (s. Abschnitt 1.2.3) und einer anschließenden vom Messergebnis m abhängigen unitären Transformation. Nach (1.8) folgt für diese Projektion mit $\rho = |\chi\rangle\langle\chi|$:

$$\begin{aligned}\rho' &= \sum_l |\phi_l\rangle\langle\phi_l|\chi\rangle\langle\chi|\phi_l\rangle\langle\phi_l| = \sum_{l,k,k'} \frac{1}{n}e^{-\frac{2\pi i}{n}l(k-k')}a_k a_{k'}^*|\phi_l\rangle\langle\phi_l| \qquad (5.29)\\ &= \sum_{l,k,k',j,j'} \frac{1}{n^2}\omega^{l(k'-k+j-j')}a_k a_{k'}^*|j\rangle\langle j'|\\ &= \sum_{k',j,j'} \frac{1}{n}a_{k'+j-j'}a_{k'}^*|j\rangle\langle j'| = \sum_{k,j,j'} \frac{1}{n}a_{k+j}a_{k+j'}^*|j\rangle\langle j'|\end{aligned}$$

Durch die Transformation $U = \sum_k \omega^{-mk}|-k\rangle\langle k|$ kann ρ_3' in ρ' überführt werden.

Misst Alice zuerst das zweite Teilchen mit Ergebnis m', ergibt sich:

$$\rho^3 = \sum_k |a_k|^2|m'-k\rangle\langle m'-k| \qquad (5.30)$$

Dies ist bis auf die lokale Transformation $U = \sum_k |k\rangle\langle m'-k|$ die Projektion von $|\chi\rangle$ in den klassischen Unterraum, der durch die Basis $|k\rangle$ aufgespannt wird (1.9).

Im ersten Schritt der Teleportation wird also ein klassischer Anteil des Zustands $|\chi\rangle$ übertragen. Zustände, die in diesem klassischen Raum liegen, werden bereits im ersten Schritt vollständig übertragen. Die Projektion in einen klassischen Unterraum ist genau der Anteil eines Quantenzustands, der im Mittel auf rein klassischem Wege übermittelt werden kann (s. Abschnitt 1.2.3). Im Unterschied dazu ist aber bei der Teleportation der lokal nicht sichtbare Anteil des Zustands nicht verloren, sondern in der Korrelation mit Alice' 2. Teilchen verborgen und kann durch die zweite Messung ebenfalls übertragen werden.

Ein klassischer Anteil eins n-Niveau-Systems ist auch der maximal mögliche Anteil, der mit einer Messung an einem n-Niveau-System teleportiert werden kann. Dies lässt sich folgendermaßen begründen: Ist der teleportierte Zustand die eine Hälfte eines verschränkten Systems, von dem Bob die andere Hälfte besitzt, kann Alice nach (2.17) durch lokale Operationen an seinem Subsystem die klassische Information $2\ln n$ speichern. Bob erhält aber im ersten Schritt nur die

Projektion dieses Zustands in einen klassischen Unterraum des Zustands, und entsprechend auch nur den Anteil der Korrelationen, die durch die Projektion nicht verloren gehen[2]. Es gibt dann nur noch n unterscheidbare Zustände. Dies lässt sich an den n^2 unterscheidbaren Zustände der Cat-State Basis demonstrieren. Die Projektion Cat-States in den durch die Basis $|k\rangle$ in Subsystem 1 aufgespannten Unterraum ergibt:

$$\rho_{ab} = \sum_k P_k^1 |cat_{ab}\rangle\langle cat_{ab}| P_k^1 = \sum_{k,l} |k, l-a\rangle\langle k, l-a| \tag{5.31}$$

Bob kann nur noch die n Zustände mit unterschiedlichem a durch Messung unterscheiden. Der Parameter b lässt sich nicht mehr ermitteln. Mit dem Quantenzustand wird also nur die klassische Information $\ln n$ übertragen, die auch klassisch für das Messergebnis übermittelt werden muss. Wird jedoch ein größerer Anteil des Zustands übertragen, so ist es Bob möglich, teilweise Information über die b zu ermitteln, wodurch Alice mehr Information als $\ln n$ übermitteln könnte. Es ist aber nicht möglich, nur durch Korrelationen klassische Information zu übertragen.

5.3.4 Fall n=2

Für den Fall n=2 sollen die Größen nochmals explizit angegeben werden: Der anfangs präparierte Zustand ist:

$$|\psi_0\rangle = (a_0|0\rangle_1 + a_1|1\rangle_1)\frac{1}{2}(|00\rangle_{23} + |01\rangle_{23} + |10\rangle_{23} - |11\rangle_{23}) \tag{5.32}$$

Die unitäre Transformation lässt sich schreiben als:

$$U^{12} = |0\rangle_1\langle 0|\hat{1}^2 - |1\rangle_1\langle 1|\hat{\lambda}_3^2 \tag{5.33}$$

Für die Messbasis ergibt sich:

$$|\phi_\pm\rangle = |0\rangle \pm |1\rangle \tag{5.34}$$

Die unitären Transformationen U^m sind:

$$U^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad U^1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \tag{5.35}$$

Und für $U^{m,m'}$:

$$U^{00} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \; U^{01} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \; U^{10} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \; U^{11} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{5.36}$$

[2]Dass vom Korrelationstensor der gleiche Anteil übertragen wird, wie vom lokalen Zustand wurde in (5.15) allgemein gezeigt.

5.3.5 Eigenschaften von U_v

In (5.18) wurde die unitäre Transformation $\hat{U}_v$ benutzt, da sie die Eigenschaft hat, eine maximal verschränkte Basis in eine lokale Basis abzubilden. Um die Rolle dieser Transformation für das Teleportationsschema zu verstehen, sollen jetzt noch weiter Eigenschaften, die für die Übertragung des unbekannten Zustands von Bedeutung sind, untersucht werden.

$\hat{U}_v$ angewandt auf einen Produktzustand aus einem unbekannten Zustand $|\chi\rangle = \sum_k a_k|k\rangle$ in Subsystem 1 und einem bekannten Zustand $|\varphi\rangle$, ergibt abhängig von $|\varphi\rangle$ folgendes Verhalten:

Ist $|\varphi\rangle$ in einem der Zustände der Basis $|j\rangle$ mit $j = 0..n-1$, ist das Ergebnis ein Produkt, und die Information über die a_k bleibt vollständig in Subsystem 1 erhalten, d.h. $\hat{U}_v$ wirkt nur wie eine lokale Transformation:

$$\hat{U}_v|\chi\rangle|k\rangle = \sum_k \omega^{kj} a_k|k\rangle|j\rangle \tag{5.37}$$

Da $\hat{U}_v$ symmetrisch bezüglich der Teilsysteme wirkt, gilt dies entsprechend auch für dieselbe Basis in Subsystem 2.

Befindet sich Subsystem 2 im Zustand[3] $|\varphi\rangle = |\phi_0\rangle$, ergibt sich:

$$|\psi'\rangle = \hat{U}_v|\chi\rangle \sum_l |l\rangle = \sum_{kl} \omega^{kl} a_k|k,l\rangle \tag{5.38}$$

Für die lokalen Anteile dieses Zustands folgt:

$$\rho_1 = \sum_k |a_k|^2|k\rangle\langle k| \ , \quad \rho_2 = \sum_{k,l} |a_k|^2 \omega^{k(l-l')}|l\rangle\langle l'| \tag{5.39}$$

In Subsystem 1 bleibt die Projektion des Zustands $|\chi\rangle$ in den klassischen Unterraum, der durch die Zustände $|k\rangle$ aufgespannt wird, zurück. Derselbe Anteil des Zustands $|\chi\rangle$ erscheint nun auch in Subsystem 2. Allerdings in dem klassischen Unterraum, der durch die Zustände $\sum_l \omega^{kl}|l\rangle$ aufgespannt wird. Die restliche Information über $|\chi\rangle$ ist in den Korrelationen versteckt. Im allgemeinen ist das System jetzt verschränkt.

Der Zustand $|\psi'\rangle$ hat außerdem die Eigenschaft, dass es möglich ist, durch eine Messung an einem Teilsystem den Zustand $|\chi\rangle$ im anderen Teilsystem wieder vollständig herzustellen. Eine Messung an Teilsystem 1 in der Basis $|\phi_m\rangle$ ergibt für Subsystem 2 den Zustand:

$$|\psi\rangle_2 = \sum_{k,l} \omega^{k(l-m)} a_k|l\rangle \tag{5.40}$$

[3] Die gleichen qualitativen Eigenschaften ergeben sich für alle Zustände der Form $|\varphi\rangle = \sum_l c_l|l\rangle$ mit $|c_l|^2 = \frac{1}{n}$ für alle l.

der bis auf die vom Messergebnis n anhängigen, lokalen unitären Transformation U^m aus (5.26) dem Zustand $|\chi\rangle$ entspricht. Durch die Transformation U_v und eine lokale Messung konnte der Zustand also von Subsystem 1 auf Subsystem 2 übertragen werden.

Entsprechend lässt sich durch Messung von Teilsystem 2 in der Basis $|j\rangle$ der Zustand in Subsystem 1 wieder herstellen. Die Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Messergebnisse sind immer $\frac{1}{n}$, also unabhängig von den a_k.

Bedeutung für die Teleportation

Die Teleportation lässt sich auf die hier beschriebene Übertragung des Zustands durch U_v und eine lokale Messung zurückführen. In (5.19) befinden sich die Subsysteme 2 und 3 vor der Teleportation im Zustand $|\phi_{0,0}\rangle$, der sich nach (1.60) durch U_v angewandt auf die Subsysteme 2 und 3 im Produktzustand $|\phi_0\rangle|\phi_0\rangle$ herstellen lässt. Da gilt $[U_v^{12}, U_v^{23}] = 0$, ist es für das Ergebnis irrelevant, ob zunächst der Zustand $|\phi_{0,0}\rangle$ der Subsysteme 2 und 3 präpariert wird, oder die nichlokale Transformation mit Subsystem 1 im unbekannten Zustand ausgeführt wird[4].

Wird nun zunächst die Transformation U_v^{12} ausgeführt, befinden sich die Subsysteme 1 und 2 im Zustand (5.38). Durch Anwendung der Transformation U_v^{23} und Messung des Subsystem 2, geht wie in (5.40) der Zustand von Subsystem 2 auf Subsystem 3 bis auf die lokale Transformation U^m über. Die Subsysteme 1 und 3 befinden sich jetzt im Zustand (5.38), aus dem durch Messung an Subsystem 1 der Zustand $|\chi\rangle$ in Subsystem 3 wieder hergestellt werden kann. Dies erklärt, warum Bob zunächst die unitäre Transformation U^m bezüglich des Messergebnisses an Teilchen 2 durchführen muss.

Ein weiterer äquivalenter Fall ist, da auch die Messung an Subsystem 1 mit U_v^{23} vertauscht, dass der Zustand $|\chi\rangle$ zunächst durch U_v^{12} und Messung von Subsystem 1 auf Subsystem 2 übertragen wird, und dann entsprechend nach Subsystem 3.

Verwandte Transformationen

Die Verwendung von U_v in (5.18) war natürlich nur eine spezielle Wahl, die eine kompakte Darstellung ermöglicht hat. Es lässt sich einsehen, dass die qualitativen Eigenschaften von U_v von allen Transformationen $\tilde{U}_v$ erfüllt werden, die sich durch Anwendung lokaler unitären Transformation vor und nach U_v ergeben:

$$\tilde{U}_v = U^1 U^2 U_v U^{1'} U^{2'} \tag{5.41}$$

Die Zustände unterschieden sich dann nur durch lokale unitäre Transformationen.

[4]Bezüglich des physikalischen Gedankens der Teleportation macht dies einen Unterschied, da danach Alice und Bob die Teilchen 2 bzw. 3 vor der Teleportation erhalten sollen und dann beliebig weit entfernt sein können.

Daraus folgt auch, dass die in diesem Abschnitt abgeleiteten Eigenschaften für die Teleportation mit lokalen Messungen für alle Szenarien, die eine Transformation der Klasse $\tilde{U}_v$ benutzten, zutreffen, da sich dann alle Eigenschaften nur durch lokale unitäre Transformationen unterscheiden, die sich in den Transformation U^m und $U^{m'}$ und den verwendeten lokalen Messbasen absorbieren lassen.

5.4 Teleportation in Blochdarstellung

Wie auch bei der Standard-Teleportation, vermittelt auch hier die Darstellung in Cluster-Operatoren ein anschauliches Bild, wie der Quantenzustand von Subsystem 1 in Subsystem 3 gelangt. Dies soll für den einfachen Fall n=2 untersucht werden. Hier entsprechen die Blochvektor-Komponenten gerade klassischen Unterräumen.

5.4.1 Transformation U_v

Zunächst soll die Auswirkung der Transformation U_v in Blochvektordarstellung untersucht werden. In Blochvektordarstellung ergeben sich die von 0 verschiedenen Koeffizienten nach (1.51):

$$c_{33}^{11} = c_{33}^{22} = c_{1122}^{(12)(12)} = c_{2211}^{(12)(12)} = c_{3333}^{(12)(12)} = 1 \tag{5.42}$$

$$c_{113}^{1(12)} = c_{223}^{1(12)} = c_{131}^{2(12)} = c_{232}^{2(12)} = c_{131}^{(12)1} =$$
$$c_{232}^{(12)1} = c_{311}^{(12)2} = c_{322}^{(12)1} = c_{1221}^{(12)(12)} = c_{2112}^{(12)(12)} = -1$$

Dies bedeutet: Die Komponenten λ_3^1, λ_3^2 und K_{33}^{12} bleiben unverändert. Dies ist jeweils ein klassischer Unterraum der lokalen Zustände. Die anderen Komponenten vertauschen jeweils paarweise:

$$\lambda_1^1 \leftrightarrow -K_{13}^{12}, \lambda_2^1 \leftrightarrow -K_{23}^{12}, \lambda_1^2 \leftrightarrow -K_{31}^{12}, \lambda_2^2 \leftrightarrow -K_{32}^{12}, K_{11}^{12} \leftrightarrow K_{22}^{12}, K_{12}^{12} \leftrightarrow K_{21}^{12} \tag{5.43}$$

Die lokalen Größen vertauschen also jeweils mit einer Komponente von K^{12}.

Man erkennt die in Abschnitt 5.3.5 abgeleiteten Eigenschaften: Wird U_v auf ein System angewandt, dass sich in einem Produktzustand, also $K_{ij}^{12} = \lambda_i^1 \lambda_j^2$, befindet, so bleibt der Zustand ein Produkt, wenn sich ein Subsystem im Zustand $\lambda = (0, 0, \pm 1)$ befindet, außerdem bleibt die Information des anderen Zustands lokal erhalten. Befindet sich der Zustand eines Subsystems vollständig in der $\lambda_1 - \lambda_2$-Ebene, so werden die λ_1- und λ_2-Komponente des anderen Zustands vollständig delokalisiert, d.h. sie erscheinen nur im Verschränkungstensor. So ergibt U_v angewandt auf der Zustand $\lambda^1 = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3), \lambda_2 = (0, 1, 0), M^{12} = 0$ den Zustand:

$$\lambda^1 = (0, 0, \lambda_3)\ ,\ \lambda_2 = (-\lambda_3, 0, 0)\ ,\ M^{12} = \begin{pmatrix} 0 & -\lambda_2 & -\lambda_1 \\ 0 & \lambda_1 & -\lambda_2 \\ 1-\lambda_3^2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{5.44}$$

In Subsystem 1 bleibt die λ_3-Komponente zurück, die auch in Subsystem 2 auftaucht. Dies ist gerade der klassische Unterraum, der durch die Zustände $|0\rangle$ und $|1\rangle$ aufgespannt wird. Die restlichen Komponenten sind nur in den Korrelationen sichtbar. Lokal ist also nur ein klassischer Unterraum sichtbar.

Eine weitere Eigenschaft aus Abschnitt 5.3.5 ist, dass es möglich ist, durch eine lokale Messung an einem der beiden Subsysteme den ursprünglichen Zustand $(\lambda^1, \lambda^2, \lambda^3)$ bis auf eine lokale unitäre Transformation im anderen Subsystem wieder herzustellen. Man erkennt, dass für alle Messbasen an Subsystem 1, die in der $\lambda^1 - \lambda^2$-Ebene liegen, die Wahrscheinlichkeit der Messwerte unabhängig vom Zustand ist. Entsprechendes gilt für alle Messbasen an Subsystem 2, die in der $\lambda^1 - \lambda^3$-Ebene liegen. Eine Messung in einer solchen Basis erhält also die Information über den Zustand, die dann im anderen Subsystem erscheint.

Beispielsweise folgt für eine Messung von Subsystem 2 mit Ergebnis $\lambda^{2(m)} = (0, 0, -1)$ mit (3.8):

$$\lambda^{1'} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\lambda_2 & -\lambda_1 \\ 0 & \lambda_1 & -\lambda_2 \\ 1-\lambda_3^2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} \tag{5.45}$$

Durch die Messung werden sozusagen die fehlenden Anteile aus M^{12} 'heraus projiziert'. Für die anderen möglichen Messergebnisse und -basen ergibt sich qualitativ ein ähnliches Ergebnis.

5.4.2 Teleportationsschema

Der anfangs präparierte Zustand (5.19) ergibt in Blochdarstellung:

$$\lambda^2 = \lambda^3 = 0, M^{23} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{5.46}$$

Teilchen 1 befindet sich im beliebigem Zustand $\lambda^1 = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$. Es folgt daher:

$$K^{12} = M^{12} = K^{13} = M^{13} = M^{123} = 0 \quad \text{und} \quad K^{123}_{ijk} = \lambda^1_i M^{23}_{jk} \tag{5.47}$$

Mit den Ergebnissen aus (5.4.1) lassen sich die Auswirkung der Transformation U_v^{12} deutlich machen. Da $\lambda_3^2 = 0$, werden die λ_1 und λ_2- Komponente des teleportierten Zustands in M^{12} delokalisiert. Die Korrelationstensoren K^{13},K^{23} und K^{123} transformieren sich nach (1.52).

Im einzelnen erhält man für den Zustand nach der Transformation U_v: $\lambda^1 = (0, 0, \lambda_3)$, $\lambda^2 = \lambda^3 = 0$ und

$$K^{12} = M^{12} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\lambda_1 \\ 0 & 0 & -\lambda_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad K^{13} = M^{13} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{5.48}$$

$$K^{23} = M^{23} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \lambda_3 \\ 0 & -\lambda_3 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{5.49}$$

Für die 3er Korrelationen ergibt sich:

$$K_{112} = K_{123} = \lambda^2, K_{212} = K_{213} = -\lambda^1, K_{331} = -\lambda^3, K_{321} = K_{313} = -1 \tag{5.50}$$

In Subsystem 1 bleibt lokal nur die λ_3-Komponente zurück. Die anderen Koeffizienten sind nur in den Korrelationen vorhanden. Da die folgenden lokalen Messungen nach (3.44) aus den Verschränkungstensoren lediglich einen Anteil heraus projizieren, sind die λ_i nach der Transformation in den Anteilen vom Subsystem 3 vorhanden.

Man erkennt auch die möglichen Messoperatoren in Subsystem 1. Da die Projektion des Blochvektors in die $\lambda_1 - \lambda_2$-Ebene 0 ist, sind die Wahrscheinlichkeiten für alle $\lambda^{1(m)}$, die in der $\lambda_1 - \lambda_2$-Ebene liegen gleich $\frac{1}{2}$. Als Messbasis wird $\lambda^{1(m)} = (\pm 1, 0, 0)$ gewählt.

Nach der ersten Messung mit Ergebnis $\lambda^{1(m)} = (1, 0, 0)$ ergibt sich mit (3.8) und (3.10):

$$\lambda^2 = (0, 0, -\lambda_1), \lambda^3 = (\lambda_1, 0, 0), \; K^{23} = \begin{pmatrix} 0 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ 0 & -\lambda_3 & \lambda_2 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{5.51}$$

Die λ_1- Komponente ist also bereits im ersten Schritt übertragen worden. Dies entspricht gerade dem klassischen Unterraum, der durch die Zustände der Messbasis aufgespannt wird. Auch in Subsystem 2 erscheint λ_1. Die anderen Koeffizienten sind noch in den Korrelationen verborgen. Die zweite Messung mit Ergebnis $\lambda^{1(m)} = (1, 0, 0)$ an Subsystem 2 ergibt mit (3.8):

$$\lambda^{3'} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ 0 & -\lambda_3 & -\lambda_2 \\ -1 + \lambda_1^2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} \tag{5.52}$$

Durch die zweite Messung wird der restliche Anteil aus M^{23} 'heraus projiziert'. Für die anderen Messergebnisse erhält man qualitativ ähnliche Ergebnisse. Nach (3.44) setzt sich $\lambda_k^{3'}$ insgesamt aus folgenden Anteilen zusammen:

$$\lambda_k^{3'} = M_{ik}^{13} \lambda_i^{1(m)} + M_{jk}^{23} \lambda_j^{2(m)} + M_{ijk}^{123} \lambda_i^{1(m)} \lambda_j^{2(m)} \tag{5.53}$$

Der erste Ausdruck liefert nach Messung an Subsystem 1 die λ_3-Komponenten, der zweite nach Messung an Subsystem 2 die λ_2-Komponente und der dritte Term nach beiden Messungen λ_1. Da die Reihenfolge der Messungen beliebig ist, kann auch zuerst λ_2 übertragen werden.

Im Gegensatz zur Standard-Teleportation, bei der der Quantenzustand durch die Korrelationen 'weitergeleitet' wird, vermittelt die Teleportation mit lokalen Messungen ein anderes Bild. Durch die nichlokale Transformation erscheint der Zustand in den Verschränkungstensoren. Die Korrelationen der Subsysteme 1 und 2 mit Subsystem 3 hängen daher von dem zu übertragenden Zustand ab. Das Ergebnis der lokalen Messungen wird daher durch den ursprünglichen Zustand beeinflusst, wodurch die Information übertragen wird.

5.4.3 Klassischer Fall

Auch dieses Teleportationsschema lässt sich mit rein klassischen Systemen realisieren. Da es bei Quantensystemen mit nur einer Messung möglich ist, einen klassischen Anteil des Zustands zu teleportieren, wird im klassischen Fall nur eine Messung nötig sein. Dies soll hier für den anschaulichen Fall $n = 2$ dargestellt werden.

Die Subsysteme 2 und 3 sollen sich wie in Abschnitt 4.4.2 im Zustand $\hat{\rho}^{23} = \frac{1}{2}\left(|01\rangle\langle 01| + |10\rangle\langle 10|\right)$ mit $M^{23} = -1$ befinden. Subsystem 1 befindet sich im unbekannten Zustand λ.

Als nichlokale Transformation kann ein klassisches CNOT gewählt werden, also $U_{kl} = |00\rangle\langle 00| + |11\rangle\langle 01| + |10\rangle\langle 10| + |01\rangle\langle 11|$. Die Transformation bewirkt die Vertauschungen:

$$\lambda^1 \leftrightarrow K^{12}\,, \quad K^{13} \leftrightarrow K^{123} \tag{5.54}$$

Die anderen Koeffizienten bleiben unverändert. Nach der Transformation ergibt sich der Zustand:

$$\lambda^1 = \lambda^2 = \lambda^3 = 0\,,\ -M^{12} = M^{13} = \lambda\,,\ M^{23} = -1\,,\ M^{123} = 0 \tag{5.55}$$

Durch die Messung an Subsystem 1 mit Ergebnis $\lambda^{1(m)} = 1$ geht Subsystem 3 nach (3.9) in den Zustand

$$\lambda^{3'} = M^{13}\lambda^{1(m)} = \lambda \tag{5.56}$$

über. Für das Messergebnis $\lambda^{1(m)} = -1$ folgt entsprechend $\lambda^{3'} = -\lambda$. Durch die unitäre Transformation $c = -1$ lässt sich dieser Zustand in den Originalzustand überführen. Subsystem 2 muss nicht gemessen werden. Der Zustand lässt sich also durch nur eine lokale Messung teleportieren. Subsystem 2 befindet sich nach der Messung im Zustand λ bzw. $-\lambda$.

Dieses Schema lässt sich ebenfalls im Hütchenmodell anschaulich machen (Abb. 5.2). Nach der nichlokalen Transformation U_{kl} enthält Hütchen 1 keine

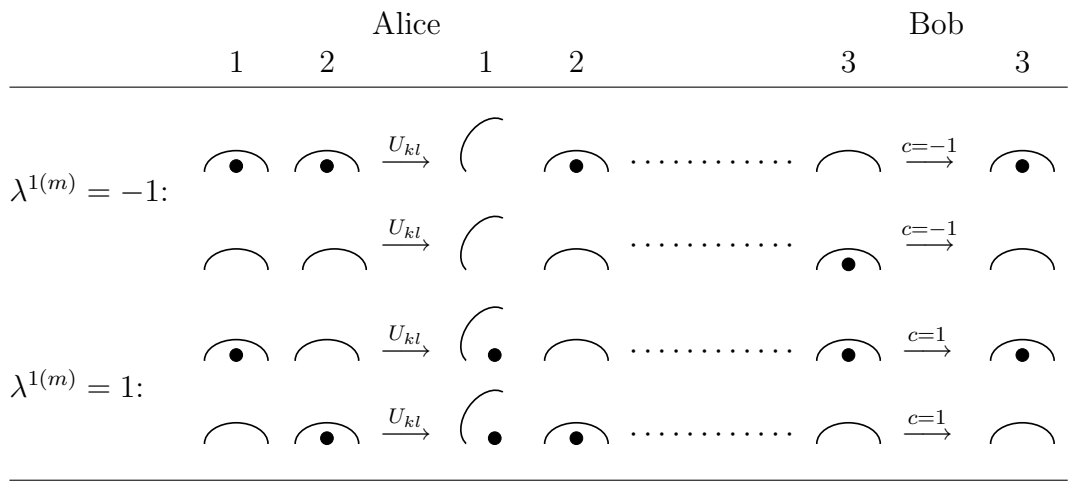


Abb. 5.2: Die 4 Möglichkeiten der klassischen Teleportation mit lokaler Messung. Alice führt zunächst an den Hütchen 1 und 2 die Transformation U_{kl} durch und misst anschließend Hütchen 1. Im Falle $\lambda^{1(m)} = -1$ muss Bob sein Hütchen 3 'invertieren'

Kugel, wenn Hütchen 1 und 2 gleich waren. Die Messung an Hütchen 1 liefert daher die Information, ob Hütchen 1 und 2 vor der unitären Transformation gleich waren und entspricht daher genau der nichlokalen Messung aus Abschnitt 4.4.2. Man erkennt auch, wie der Zustand von Hütchen 1 vor U_{kl} die Korrelation zwischen Hütchen 1 und 3 danach beeinflusst. War Hütchen 1 leer, sind nach U_{kl} Hütchen 1 und 3 antikorreliert, und entsprechend umgekehrt. Daher beeinflusst eine lokale Messung an Subsystem 1 direkt Subsystem 3.

Der Vergleich mit dem quantenmechanischen Fall ergibt sich, wenn man in Abschnitt 5.4.2 in den Subsystemen 1 und 3 die λ^1-Richtung, in Subsystem 2 die λ^3-Richtung also die 'klassische' Richtung annimmt, also nur diese Komponenten betrachtet. Im Gegensatz zur Standard-Teleportation, bei der die Übertragung der Information im quantenmechanischen und klassischen Fall bis auf den größeren Zustandsraum äquivalent verläuft, ergibt sich hier ein qualitativer Unterschied. Die zusätzlichen Dimensionen der Zustände, insbesondere des verschränkten Zustands M^{23} bewirken, dass nichlokale Transformation die λ^2 und λ^3-Komponente in M^{23} und M^{123} bringt, die im klassischen Fall keine Rolle spielen. Der nicht klassische Anteil der Zustands wird auf anderem Weg übertragen, für den die Messung von Subsystem 2 notwendig ist.

Zusammenfassung

Hauptsächlich wurden in dieser Arbeit Messszenarien behandelt. Es wurden allgemein die Auswirkung von lokalen Messungen auf die nicht gemessenen Subsysteme und die Möglichkeit durch Messungen Quantenzustände zu übertragen diskutiert.

Es ergab sich, dass bei lokalen Quantenoperation die Auswirkung auf den Zustand der anderen Subsysteme durch einen effektiv gemessenen Zustand $\lambda^{1(m)}$ beschrieben werden kann. Der effektiv gemessene Zustand kann jeder beliebe, lokale Zustand sein. Für lineare Quantenoperationen ist $\lambda^{1(m)} = 0$ und der Zustand der anderen Subsysteme bleibt unverändert. Für Messungen ergibt sich $\lambda^{1(m)}$ aus dem zum eingetreten Messergebnis korrespondierenden Operator. Der neue Zustand der nicht gemessenen Subsysteme ergibt sich durch Abbildung dieses effektiv gemessenen Zustands. Diese Abbildung wird durch die Verschränkungstensoren, die die reinen Korrelationen ausdrücken, generiert. Dabei ist die Übermittlung der klassischen Information über das Messergebnis an die anderen Beobachter wichtig. Nur mit Kenntnis des Messergebnisses, ändert sich auch für diese Beobachter ihr lokaler Zustand.

Bei der Teleportation wird der Zustand mittels der Korrelationen übertragen. Beim Standard-Teleportationsschema vermitteln die Korrelationen den Zustand direkt. Bei der Teleportation mit lokalen Messungen verändert durch die unitäre Transformation vor der Messung der zu übertragende Zustand die Korrelationen zwischen den Subsystemen. Dadurch beeinflusst dieser Zustand die Auswirkung der lokalen Messungen auf Subsystem 3 und wird auf diesem Weg übertragen. Durch die erste Messung kann dabei bereits ein klassischer Anteil des Zustands übertragen werden. Die jeweiligen klassischen Beispiele haben die Rolle der Korrelationen deutlich gemacht. Es wurden aber auch die Unterschiede deutlich.

Die abgeleitete Beschreibung, wie sich lokale Messungen auf die nicht gemessene Subsysteme auswirken, gelten auch für klassische Systeme. Dies wurde an einigen Beispielen demonstriert. Für den klassischen Fall fällt die Interpretation leicht. Man kann sagen, die Zustände beschreiben lediglich das Wissen des Beobachters und die reale Welt ist immer in einem reinen, aber unbekannten Zustand. Eine Messung verändert daher nur das Wissen des Beobachters. Damit lässt sich auch die klassische Teleportation leicht verstehen. Teleportiert wird nur das nötige Wissen, damit Bob die richtige Transformation durchführen kann, damit die

realen Zustände der Subsystem 1 und 3 nach der Teleportation gleich sind. Dies geschieht durch die klassische Kommunikation und durch das Wissen um den zuvor präparierten Zustand. Würde man bei Quantensystemen ähnlich argumentieren, könnte man das Bild einer real existierenden Welt in der gewohnten Form nicht aufrecht erhalten.

Anhang

A.1 Verschränkungstensor des $|cat\rangle_{00}$-Zustands

Für den Verschränkungstensor gilt:

$$M_{ij}^{cat_{00}} = \mathrm{Tr}\left(\hat{\rho}_{cat_{00}}\hat{\lambda}_i^1\hat{\lambda}_j^2\right) = \langle cat_{00}|\hat{\lambda}_i^1\hat{\lambda}_j^2|cat_{00}\rangle \tag{A.1}$$

Setzt man die Definition von $|cat\rangle_{00}$ ein, erhält man:

$$M_{ij} = \frac{1}{n}\sum_{k,l=1}^{n-1}\langle k,k|\hat{\lambda}_i^1\hat{\lambda}_j^2|l,l\rangle = \frac{1}{n}\sum_{k,l=1}^{n-1}\langle k|\hat{\lambda}_i|l\rangle\langle k|\hat{\lambda}_j|l\rangle \tag{A.2}$$

Betrachten wir zunächst für $k \neq l$ den Term $\langle k|\hat{\lambda}_i|l\rangle$:

Mit den Definitionen der $\hat{\lambda}_i$ aus (1.5) sieht man, dass gilt:

$$\langle k|\hat{\lambda}_i|l\rangle = \sqrt{\frac{n}{2}}\begin{cases} \delta_{ix} + i\delta_{iy} & : \quad k < l \\ \delta_{ix} - i\delta_{iy} & : \quad k > l \end{cases} \tag{A.3}$$

Dabei läuft die Größe x entsprechend den Indizes in (1.5) von 1 bis $\frac{n^2-n}{2}$, die Größe $y = \frac{n^2-n}{2} + x$ die Werte von $\frac{n^2-n}{2} + 1$ bis $n^2 - n$, wenn k und l die möglichen Kombinationen durchlaufen mit $k < l$ oder $k > l$. Es ergibt sich daher $\sum_{k<l} = \sum_x$, entsprechend $k > l$. Die nichtdiagonalen $\hat{\lambda}_i$ liefern alle 0. Es folgt damit:

$$\langle k|\hat{\lambda}_i|l\rangle\langle k|\hat{\lambda}_j|l\rangle = \frac{n}{2}\begin{cases} \delta_{ix}\delta_{jx} - \delta_{iy}\delta_{jy} + i(\delta_{iy}\delta_{jx} + \delta_{ix}\delta_{jy}) & : \quad k < l \\ \delta_{ix}\delta_{jx} - \delta_{iy}\delta_{jy} - i(\delta_{iy}\delta_{jx} + \delta_{ix}\delta_{jy}) & : \quad k > l \end{cases} \tag{A.4}$$

Und damit:

$$\sum_{k\neq l}\langle k|\hat{\lambda}_i|l\rangle\langle k|\hat{\lambda}_j|l\rangle = n\begin{cases} \delta_{ij} & : \quad 1 \leq i \leq \frac{n^2-n}{2} \\ -\delta_{ij} & : \quad \frac{n^2-n}{2} + 1 \leq i \leq n^2 - n \end{cases} \tag{A.5}$$

Bleibt noch der Fall $k = l$ zu behandeln. Mit den Definitionen (1.5) kann man

folgende Fälle unterscheiden:

$$\langle k|\hat{\lambda}_i|k\rangle\langle k|\hat{\lambda}_j|k\rangle = \begin{cases} 0 & : \quad x < kodery < k \\ n\frac{x}{x+1} & : \quad x = y = k \\ n\frac{1}{x(x+1)} & : \quad x = y > k \\ -nx\sqrt{\frac{1}{x(x+1)y(y+1)}} & : \quad y > x = k \\ -ny\sqrt{\frac{1}{x(x+1)y(y+1)}} & : \quad x > y = k \\ n\sqrt{\frac{1}{x(x+1)y(y+1)}} & : \quad y > x > koderx > y > k \end{cases} \tag{A.6}$$

Mit $x = i - n^2 - n$ und $y = j - n^2 - n$. Es spielen hier also nur die diagonalen $\hat{\lambda}_i$ mit $i > n^2 - n$ eine Rolle. Damit gilt für i=j:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \langle k|\hat{\lambda}_i|k\rangle\langle k|\hat{\lambda}_i|k\rangle = \sum_{k=0}^{x} \langle k|\hat{\lambda}_i|k\rangle\langle k|\hat{\lambda}_i|k\rangle = n\left(\frac{1}{x(x+1)}x + \frac{x}{x+1}\right) = n \tag{A.7}$$

Für $i < j$ gilt:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} \langle k|\hat{\lambda}_i|k\rangle\langle k|\hat{\lambda}_j|k\rangle &= \sum_{k=0}^{x} \langle k|\hat{\lambda}_i|k\rangle\langle k|\hat{\lambda}_j|k\rangle \\ &= n\left(\sqrt{\frac{1}{x(x+1)y(y+1)}}x - x\sqrt{\frac{1}{x(x+1)y(y+1)}}\right) = 0 \end{aligned} \tag{A.8}$$

und entsprechend für $i > j$:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} \langle k|\hat{\lambda}_i|k\rangle\langle k|\hat{\lambda}_j|k\rangle &= \sum_{k=0}^{y} \langle k|\hat{\lambda}_i|k\rangle\langle k|\hat{\lambda}_j|k\rangle \\ &= n\left(\sqrt{\frac{1}{x(x+1)y(y+1)}}y - y\sqrt{\frac{1}{x(x+1)y(y+1)}}\right) = 0 \end{aligned} \tag{A.9}$$

Insgesamt ergibt sich:

$$M_{ij}^{cat_{00}} = n\begin{cases} -\delta_{ij} & : \quad \frac{n^2-n}{2} + 1 \leq i \leq n^2 - n \\ \delta_{ij} & : \quad \text{sonst} \end{cases} \tag{A.10}$$

A.2 Beziehungen der Verschränkungstensoren

Beweis der Beziehungen :

$$M^{1\mu..}_{ik..} = \tilde{M}^{(12)\mu..}_{i0k..} \quad , \quad M^{12\mu..}_{ijk..} = \tilde{M}^{(12)\mu..}_{ijk..} - \mathcal{P}^{(12):2}_{m}(M^{12\mu..}_{ijk..}) \tag{A.11}$$

An dieser Stelle soll der noch ausstehende Beweis der in Kapitel 3 verwendeten Relationen der Verschränkungstensoren geliefert werden.

Nach Abschnitt 1.5.2 ergeben sich die Verschränkungstensoren $M^{\mu\nu..}_{ik..}$ aus den Korrelationstensoren $K^{\mu\nu..}_{ik..}$ durch Subtraktion aller möglichen kleineren Korrelationen. Es gilt (1.40):

$$K^{\mu\nu..}_{ik..} = \sum_{i=1}^{m} \mathcal{P}^{i}_{m}(M^{\mu\nu..}_{ik..}) \tag{A.12}$$

Relation 1:

$$M^{1\mu..}_{ik..} = \tilde{M}^{(12)\mu..}_{i0k..} \tag{A.13}$$

Sind nur 2 Subsysteme enthalten gilt:

$$M^{1\mu}_{ik} = K^{1\mu}_{ik} - \lambda^{1}_{i}\lambda^{\mu}_{k} = K^{(12)\mu}_{i0k} - K^{(12)}_{i0}\lambda^{\mu}_{k} = \tilde{M}^{(12)\mu}_{i0k} \tag{A.14}$$

Für m-Subsystemkorrelationen gilt:

$$\sum_{i=1}^{m} \mathcal{P}^{i}_{m}(M^{1\mu..}_{ik..}) = K^{1\mu..}_{ik..} = K^{(12)\mu..}_{i0k..} = \sum_{i=1}^{m} \mathcal{P}^{i}_{m}(\tilde{M}^{(12)\mu..}_{i0k..}) \tag{A.15}$$

Da die Anzahl der beteiligten Subsysteme gleich ist, ergeben sich auch auf beiden Seiten die gleichen Möglichkeiten der Partitionierung der Indizes. Gilt nun (A.13) für alle (m-1)-Subsystemverschränkungstensoren, so gilt induktiv (A.13) auch für den m-Subsystemverschränkungstensor.

Entsprechend gilt für alle $\tilde{M}$, dass die Subsysteme, die mit Index 0 vorkommen, nicht berücksichtigt werden müssen. So gilt, wenn nur die beliebigen Subsysteme $x, y..z$ von 0 verschiedene Indizes haben:

$$\tilde{M}^{(1..xy..z..n)\mu..}_{0..ij..k..0l..} = \tilde{M}^{(xy..z)\mu..}_{ijkl..} \tag{A.16}$$

Relation 2:

$$M^{12\mu..}_{ijk..} = \tilde{M}^{(12)\mu..}_{ijk..} - \mathcal{P}^{(12):2}_{m}(M^{12\mu..}_{ijk..}) \tag{A.17}$$

Für den Fall m=2 gilt (A.17):

$$\begin{aligned} M^{12}_{ij} &= \tilde{M}^{(12)}_{ij} - \mathcal{P}^{(12):2}_{2}(M^{12}_{ij}) && \text{(A.18)} \\ &= K^{(12)}_{ij} - \lambda^1_i \lambda^2_j = K^{12}_{ij} - \lambda^1_i \lambda^2_j && \text{(A.19)} \end{aligned}$$

Für m-Subsystemkorrelationen gilt :

$$\sum_{i=1}^{m} \mathcal{P}^{i}_{m}(M^{12\mu..}_{ijk..}) = K^{12\mu..}_{ijk..} = K^{(12)\mu..}_{ijk..} = \sum_{i=1}^{m-1} \mathcal{P}^{i}_{m-1}(\tilde{M}^{(12)\mu..}_{ijk..}) \tag{A.20}$$

Die Menge aller Partitionen lässt sich rekursiv bilden, indem man 1 Element herausgreift, eine Teilmenge wählt, die das Element enthält, und für den Rest alle möglichen Partitionierungen bildet. Dies macht man mit allen Teilmengen, die das gewählte Element enthalten. Damit lässt sich die rechte Seite in folgendem Schema, wobei nur die Subsystemindizes geschrieben werden, darstellen:

$$(12\mu\nu...)+(12)(allePart.Rest)+(12x)(allePart.)+...+(12xy)(allePart.Rest)+... \tag{A.21}$$

Dabei sind x,y alle möglichen anderen Elemente. Gilt nun (A.17) für alle kleineren Verschränkungstensoren, so lässt sich

$$(12) = (12) + (1)(2), (12x) = (12x) + (1)(2x) + (2)(1x), ... \tag{A.22}$$

einsetzten. Die linke Seite kann man in einem ähnlichen Schema darstellen:

$$(12\mu\nu..) + (1)(allePart) + (1x)(allePart.) + (1xy)(allePart.) + .. \tag{A.23}$$

Die meisten Terme sind auf der linken und rechten Seite identisch und heben sich raus. Man kann sich klarmachen, dass auf der linken Seite diejenigen Partitionen übrigbleiben, die aus zwei Teilen bestehen, wobei der eine Teil Index 1, der andere Index 2 enthält.

Es ergibt sich also aus (A.20):

$$M^{12\mu..}_{ijk..} + \mathcal{P}^{(12):2}_{m}(M^{12\mu..}_{ijk..}) = \tilde{M}^{(12)\mu..}_{ijk..} \tag{A.24}$$

Womit (A.17) induktiv bewiesen ist.

Relation 3:

$$M_{ij..k..}^{12..n\mu..} = \tilde{M}_{ij..k..}^{(12..n)\mu..} - \sum_{z=2}^{n} \mathcal{P}_m^{(12..n):z}(M_{ij..k..}^{12..n\mu..}) \tag{A.25}$$

Dass (A.25) für n=2 richtig ist, wurde gezeigt. Es ist zu zeigen, dass wenn (A.25) für n-1 richtig ist, dies auch für n zutrifft. Man kann folgendermaßen vorgehen: Wenn man die zusammengefassten Subsysteme 1..n wieder als Einzelsysteme auffasst, denkt man sich die Subsysteme 1 und 2 zunächst noch als ein System, dass dann in einem letzten Schritt aufgeteilt wird. Für diesen letzten Schritt gilt:

$$M_{ij..k..}^{12..n\mu..} = \tilde{M}_{ij..k..}^{(12)3..n\mu..} - \mathcal{P}_m^{(12):2}(M_{ij..k..}^{12..n\mu..}) \tag{A.26}$$

Nimmt man nun an, (A.25) gilt für die Aufteilung von n-1 Subsystemen, so gilt:

$$\tilde{M}_{ij..k..}^{(12)3..n\mu..} = \tilde{M}_{ij..k..}^{((12)3..n)\mu..} - \sum_{z=2}^{n-1} \mathcal{P}_{m-1}^{((12)..n):z}(\tilde{M}_{ij..k..}^{(12)..n\mu..}) \tag{A.27}$$

Da 1 und 2 noch als ein System aufgefasst werden, beziehen sich die Unterteilungen nur auf m-1 Subsysteme. In jedem der Terme in $\mathcal{P}_{m-1}^{((12)..n):z}(\tilde{M}_{ij..k..}^{(12)..n\mu..})$ ist nun genau ein Faktor mit Index (12) enthalten. Für diesen Faktor setzt man (A.17) ein. Man erhält also als zusätzliche Summanden die Menge aller Unterteilungen dieses Faktors, die 1 und 2 trennen. Diese zusätzlichen Summanden enthalten jetzt z+1 Faktoren. Man kann sich klarmachen, dass man, wenn man diese Terme zu denen in $\mathcal{P}_{m-1}^{((12)..n):z+1}(\tilde{M}_{ij..k..}^{(12)..n\mu..})$ dazunimmt, genau die Unterteilungen von allen m Subsystemen in z+1 Partitionen, die die Subsysteme 1..n trennen, erhält. Zu $\mathcal{P}_{m-1}^{((12)..n):2}(\tilde{M}_{ij..k..}^{(12)..n\mu..})$ nimmt man die zusätzlichen Terme aus $\mathcal{P}_m^{((12)..n):2}(M_{ij..k..}^{12..n\mu..})$.

Die zusätzlichen Terme, die sich aus dem Term $\mathcal{P}_{m-1}^{((12)..n):n-1}(\tilde{M}_{ij..k..}^{(12)..n\mu..})$ ergeben, bilden schon alle Möglichkeiten für $\mathcal{P}_m^{(12..n):n}(\tilde{M}_{ij..k..}^{(12)..n\mu..})$, da es bei n Partitionen nur noch die Möglichkeiten gibt, die in jedem Faktor eines des Subsysteme 1..n enthalten.

Damit ist gezeigt, dass (A.25) für allgemeine n gilt.

A.3 Beweis von Gleichung (3.15)

An dieser Stelle soll noch der ausstehende Beweis der Gleichung

$$M_{ijk..}^{\mu\nu\kappa..\prime} = M_{ijk..}^{\mu\nu\kappa..} + \frac{1}{\tilde{p}}\lambda_i^{1(m)} M_{lijk..}^{1\mu\nu\kappa..} - \mathcal{R}_m(M_{ijk..}^{\mu\nu\kappa..}) \tag{A.28}$$

erbracht werden.

Wie im vorigen Abschnitt kann man die Summe über alle Partitionen bilden, indem man ein Element herausgreift, alle Teilmengen bildet, die dieses Element enthalten und für den Rest alle Partitionen bildet. Greift man die Elemente μ und ν heraus, lässt sich $\mathcal{R}_m(M_{ijk..}^{\mu\nu\kappa..})$ umschreiben als:

$$\mathcal{R}_m(M^{\mu\nu\kappa..}) = \sum_{x\in X} \mathcal{R}(M^{\overline{x}})\Bigg((M^{x\prime} - M^x) + \sum_{z\in Z(x)} (M^{z\prime} - M^z)(M^{\overline{z}\prime} - M^{\overline{z}})\Bigg) \tag{A.29}$$

Dabei ist X die Menge aller Teilmengen der Menge $G = (\mu\nu\kappa..)$, die μ und ν enthalten. $\overline{x}$ ist die komplementäre Menge zu x, die μ und ν daher nicht enthält. $Z(x)$ ist die Menge aller Teilmengen aus x, die μ enthält, nicht aber ν. $\overline{z}$ ist die komplementäre Teilmenge zu z aus x. Im Summand mit $x = G$, darf der Term $(M^{x\prime} - M^x)$ nicht berücksichtigt werden.

Das (A.28) für m-Verschränkungstensoren mit $m = 1, 2, 3$ gilt, wurde in Kapitel 3 explizit nachgewiesen. Es soll nun gezeigt werden, dass, wenn (A.28) für alle $m' < m$ gilt, dies auch für m richtig ist.

Denkt man sich, wie in Abschnitt 3.2 argumentiert, die Teilsysteme μ und ν zu einem Teilsystem zusammengefasst und gilt (A.28) für alle $m' < m$, so gilt:

$$M_{ijk..}^{(\mu\nu)\kappa..\prime} = M_{ijk..}^{(\mu\nu)\kappa..} + \frac{1}{\tilde{p}}\lambda_i^{1(m)} M_{lijk..}^{1(\mu\nu)\kappa..} - \mathcal{R}_{m-1}(M_{ijk..}^{(\mu\nu)\kappa..}) \tag{A.30}$$

Benutzt man die Ergebnisse aus A.2, folgt:

$$M_{ijk..}^{\mu\nu\kappa..\prime} = M_{ijk..}^{\mu\nu\kappa..} + \frac{1}{\tilde{p}}\lambda_i^{1(m)} M_{lijk..}^{1\mu\nu\kappa..} - \mathcal{R}^*$$

mit:

$$\mathcal{R}^* = \underbrace{\mathcal{P}_m^{(\mu\nu):2}(M_{ijk..}^{\mu\nu\kappa..})}_{1} - \underbrace{\mathcal{P}_m^{(\mu\nu):2}(M_{ijk..}^{\mu\nu\kappa..\prime})}_{2} + \underbrace{\frac{1}{\tilde{p}}\lambda_i^{1(m)}\mathcal{P}_{m+1}^{(\mu\nu):2}(M_{ijk..}^{1\mu\nu\kappa..})}_{3} + \mathcal{R}^{**} \tag{A.31}$$

und:

$$\mathcal{R}^{**} = \sum_{x\in X'} \mathcal{R}(M^{\overline{x}})\Bigg(\underbrace{M^{x\prime}}_{4} - \underbrace{M^x}_{5} + \underbrace{\mathcal{P}^{(\mu\nu):2}(M^{x\prime})}_{6} - \underbrace{\mathcal{P}^{(\mu\nu):2}(M^x)}_{7}\Bigg) \tag{A.32}$$

Es ist nun zu zeigen, dass $\mathcal{R}^*$ gleich (A.29) ist. X' ist die Menge X ohne G. Terme 4 und 5 liefern bereits den ersten Teil in (A.29), also alle Terme die μ und ν nicht trennen. Es fehlen also noch diejenigen Partitionen, die μ und ν trennen. Term 3 ergibt mit (A.11) und wenn (A.28) für alle $m' < m$ gilt:

$$\begin{aligned} 3 &= \sum_{y\in Y} \frac{1}{\tilde{p}} \lambda_i^{1(m)} (M^{1\overline{y}} M^y + M^{1y} M^{\overline{y}}) \qquad \text{(A.33)} \\ &= \sum_{y\in Y} \Bigg(\Big(\underbrace{M^{\overline{y}'}}_{8} - \underbrace{M^{\overline{y}}}_{9} + \underbrace{\mathcal{R}(M^{\overline{y}})}_{10} \Big) M^y + \Big(\underbrace{M^{y'}}_{11} - \underbrace{M^y}_{12} + \underbrace{\mathcal{R}(M^y)}_{13} \Big) M^{\overline{y}} \Bigg) \end{aligned}$$

Y ist die Menge aller Teilmengen aus G, die ν und nicht μ enthalten. Jede Teilmenge y mit der komplementären Teilmenge $\overline{y}$ liefert ein $M^y = M^{\nu\cdot\cdot}$ und $M^{1y} = M^{1\nu\cdot\cdot}$, entsprechend $M^{\overline{y}} = M^{\mu\cdot\cdot}$ und $M^{1\overline{y}} = M^{1\mu\cdot\cdot}$.

Term 9 mit $\sum_y$ und Term 1 sind gleich, heben sich also raus. Die Terme 8, 11 und 12 bilden zusammen mit Term 2:

$$\sum_y (M^{y'} - M^y)(M^{\overline{y}'} - M^{\overline{y}}) \qquad \text{(A.34)}$$

Sie ergeben in (A.29) den Summand mit $x = G$, also alle Terme in $\mathcal{R}_m(M^{\mu\nu\kappa\cdot\cdot}_{ijk\cdot\cdot})$, die aus zwei Faktoren bestehen und μ und ν trennen.

Da in Term 10 genau ein Faktor dessen Indizes μ enthält, und mit $\sum_y$ alle Partitionierungen der anderen Indizes enthalten sind, lässt sich Term 10 schreiben als:

$$10 = \sum_{x\in X', z\in Z(x)} \mathcal{R}(M^{\overline{x}})(M^{z'} - M^z) M^{\overline{z}} \qquad \text{(A.35)}$$

$Z(x)$ ist wie oben, die Menge aller Teilmengen von x, die μ aber nicht ν enthalten. Entsprechend lässt sich Term 13 umformen, mit $z \leftrightarrow \overline{z}$. Damit ergeben die Terme 6, 7, 10, 13:

$$\begin{aligned} &\sum_{x,z(x)} \mathcal{R}(M^{\overline{x}})((M^{z'} - M^z)M^{\overline{z}} + (M^{\overline{z}'} - M^{\overline{z}})M^z + M^{z'}M^{\overline{z}'} - M^z M^{\overline{z}}) \qquad \text{(A.36)} \\ &= \sum_{x,z(x)} \mathcal{R}(M^{\overline{x}})(M^{z'} - M^z)(M^{\overline{z}'} - M^{\overline{z}}) \end{aligned}$$

Dies sind die noch fehlenden Terme in (A.29). Alle Summanden aus (A.31) ergeben also den Ausdruck (A.29), womit gilt:

$$\mathcal{R}^* = \mathcal{R}_m(M^{\mu\nu\kappa\cdot\cdot}_{ijk\cdot\cdot}) \qquad \text{(A.37)}$$

A.4 Beispiele der definierten Größen

$\mathcal{P}^{\mathbf{z}}_{\mathbf{m}}(\mathbf{M}^{\mathbf{123..}}_{\mathbf{ijk..}})$:

$$
\begin{aligned}
P^1_2(M^{12}) &= M^{12} \\
P^2_2(M^{12}) &= \lambda^1\lambda^2 \\
P^1_3(M^{123}) &= M^{123} \\
P^2_3(M^{123}) &= \lambda^1 M^{23} + \lambda^2 M^{13} + \lambda^3 M^{12} \\
P^3_3(M^{123}) &= \lambda^1\lambda^2\lambda^3 \\
P^1_4(M^{1234}) &= M^{1234} \\
P^2_4(M^{1234}) &= \lambda^1 M^{234} + \lambda^2 M^{134} + \lambda^3 M^{124} + \lambda^4 M^{123} \\
&\quad + M^{12}M^{34} + M^{13}M^{24} + M^{14}M^{23} \\
P^3_4(M^{1234}) &= \lambda^1\lambda^2 M^{34} + \lambda^1\lambda^3 M^{24} + \lambda^1\lambda^4 M^{23} + \lambda^2\lambda^3 M^{14} + \lambda^2\lambda^4 M^{13} + \lambda^3\lambda^4 M^{12} \\
P^4_4(M^{1234}) &= \lambda^1\lambda^2\lambda^3\lambda^4
\end{aligned}
$$

$\mathcal{P}^{(\mathbf{12}):\mathbf{2}}_{\mathbf{m}}(\mathbf{M}^{\mathbf{123..}}_{\mathbf{ijk..}})$:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{P}^{(12):2}_3(M^{123}) &= \lambda^1 M^{23} + \lambda^2 M^{13} \\
\mathcal{P}^{(12):2}_4(M^{1234}) &= \lambda^1 M^{234} + \lambda^2 M^{134} + M^{13}M^{24} + M^{14}M^{23} \\
\mathcal{P}^{(123):2}_4(M^{1234}) &= \lambda^1 M^{234} + \lambda^2 M^{134} + \lambda^3 M^{124} + M^{12}M^{34} + M^{13}M^{24} + M^{23}M^{14} \\
\mathcal{P}^{(123):3}_4(M^{1234}) &= \lambda^1\lambda^2 M^{34} + \lambda^1\lambda^3 M^{24} + \lambda^2\lambda^3 M^{14} \\
\mathcal{P}^{(12):2}_5(M^{12345}) &= \lambda^1 M^{2345} + \lambda^2 M^{1345} + M^{13}M^{245} + M^{14}M^{234} + M^{15}M^{234} \\
&\quad + M^{23}M^{145} + M^{24}M^{135} + M^{25}M^{134} \\
\mathcal{P}^{(123):2}_5(M^{12345}) &= \lambda^1 M^{2345} + \lambda^2 M^{1345} + \lambda^3 M^{1245} + M^{12}M^{345} + M^{13}M^{245} + \\
&\quad M^{23}M^{145} + M^{14}M^{235} + M^{24}M^{135} + M^{34}M^{125} + M^{15}M^{234} \\
&\quad + M^{25}M^{134} + M^{35}M^{124} \\
\mathcal{P}^{(123):3}_5(M^{12345}) &= \lambda^1\lambda^2 M^{345} + \lambda^1\lambda^3 M^{245} + \lambda^2\lambda^3 M^{145} + \lambda^1 M^{25}M^{34} + \lambda^1 M^{35}M^{24} \\
&\quad + \lambda^2 M^{35}M^{14} + \lambda^2 M^{15}M^{34} + \lambda^3 M^{15}M^{24} + \lambda^3 M^{25}M^{14} \\
\mathcal{P}^{(1234):4}_5(M^{12345}) &= \lambda^1\lambda^2\lambda^3 M^{45} + \lambda^1\lambda^2\lambda^4 M^{35} + \lambda^1\lambda^3\lambda^4 M^{25} + \lambda^2\lambda^3\lambda^4 M^{15}
\end{aligned}
$$

$\mathcal{R}_{\mathbf{m}}(\mathbf{M}^{\mathbf{123..}}_{\mathbf{ijk..}})$:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{R}_2(M^{12}) &= (\lambda^{1'} - \lambda^1)(\lambda^{2'} - \lambda^2) \\
\mathcal{R}_3(M^{123}) &= (\lambda^{1'} - \lambda^1)(M^{23'} - M^{23}) + (\lambda^{2'} - \lambda^2)(M^{13'} - M^{13}) \\
&\quad + (\lambda^{3'} - \lambda^3)(M^{12'} - M^{12}) + (\lambda^{1'} - \lambda^1)(\lambda^{2'} - \lambda^2)(\lambda^{3'} - \lambda^3)
\end{aligned}
$$

Literaturverzeichnis

[1] A.Einstein, B.Podolsky, N.Rosen, Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete?, Phys. Rev. **47**, 777 (1935).

[2] J.F.Clauser, M.A.Horne, A.Shimony, A.Holt, Proposed experiment to test hidden-variable theories, Phys. Rev. Lett **23**, 880 (1969).

[3] A.Aspect, P.Grangier, G.Roger, Experimental realisation of Einstein-Podolsky-Rosen-Bohm Gedanken experiment, Phy. Rev. Lett **49**, 2407 (1982).

[4] C.H.Bennett et al., Teleporting an unknown quantum state via dual classical and Einstein-Podolski-Rosen channels, Phys. Rev. Lett **70**, 1895 (1993).

[5] A.K.Ekert, Quantum cryptography based on Bell's theorem, Phy. Rev. Lett **67**, 661 (1991).

[6] C.H.Bennett, S.J.Wiesner, Communication via one- and two-particle operators on Einstein-Podolsky-Rosen states, Phys. Rev. Lett. **69**, 2881 (1992).

[7] D.DiVincenzo, Quantum Computation, Science **270**, 255 (1995).

[8] G.Mahler, *Quantum networks: dynamics of open nanostructures*, Springer-Verlag, Berlin, zweite edition, 1998.

[9] S.Albeverio, Shao-Ming Fei, A remark on the optimal cloning of an n-level quantum system, quant-ph/9912038 (1999).

[10] A.Peres, *Quantum Theory, Concepts and Methods*, Dordrecht: Kluwer, 1993.

[11] E.B.Davis, J.T.Lewis, Comm. Math. Phys. **17**, 239 (1970).

[12] B.Schumacher, Sending entanglement through noisy channels, Phys. Rev. A **54**, 2614 (1996), quant-ph/9604023.

[13] A.Peres, Quantum entanglement: Criteria and collective tests, quant-ph/9707026 (1997).

[14] A.Otte, *Separabilität in Quantennetzwerken*, Dissertation, Universität Stuttgart, 2001.

[15] A.O.Pittenger, M.H.Rubin, Note on separability of the Werner-states in arbitrary dimensions, quant-ph/0001110 (2000).

[16] R.Wawer, *Verschränkte Zustände in Quantennetzwerken*, Dissertation, Universität Stuttgart, 1998.

[17] H.Lüneberg, *Tools and fundamental constructions of combinatorial mathematics*, BI-Wiss.Verl., 1989.

[18] A. Rieckers, H. Stumpf, *Thermodynamik, Band 2*, Vieweg, 1977.

[19] J.Schlienz, G.Mahler, Description of entanglement.

[20] A.Otte, Physik und Quanteninformation, Diplomarbeit, Universität Stuttgart, 1998.

[21] C.Shannon, Bell. Syst. Tech. J. **27**, 179.

[22] A.I.Khinchin, *Mathematical foundations of information theory*, Dover Publications, 1957.

[23] E.T.Jaynes, Information theory and statistical mechanics, Phys. Rev. **106**, 620 (1957).

[24] H.Araki, E.Lieb, Entropy inequalities, Commun. Math. Phys (18), 160 (1970).

[25] C.A.Fuchs, C.M.Caves, Ensembledependent bounds for accessible information in quantum mechanics, Phys. Rev. Lett **73**, 3047 (1994).

[26] B.W.Schumacher, M.Westermoreland, W.K.Wootters, Limitation on the amount of accessible information in a quantum channel, Phys. Rev. Lett **73**, 3499 (1996).

[27] P.Hausladen, R.Josza, B.Schumacher, M.Westmoreland, K.Wooters, Classical information capacity of a quantum channel, Phys. Rev. A **34**, 1669 (1996).

[28] A.Peres, Classical interventions in quantum systems. II. Relativistic invariance, Phy. Rev. A **61**, 22117 (2000).

[29] V.Buzurek, M.Hillery, Quantum Copying: Beyond the No-Cloning Theorem, Phys. Rev. A **54**, 1844 (1996).

[30] M.A.Nielson, C.M.Caves, Reversible quantum operations and their application to teleportation, quant-ph/9608001 .

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich einigen Personen, die zum Entstehen dieser Arbeit beigetragen haben, explizit meinen Dank aussprechen:

Prof. Dr. G. Mahler für die Betreuung dieser Arbeit, die Aufnahme in seine Arbeitsgruppe und die gewährte wissenschaftliche Freiheit

Prof. Dr. R. Friedrich für die Übernahme des Mitberichts

Prof. Dr. G. Wunner für die Aufnahme am Institut für Theoretische Physik I

Harry Schmidt für die Gesellschaft im Arbeitszimmer und den vielfachen Expertenrat in Linux- und Latex-Fragen, sowie den anderen Mitgliedern der Arbeitsgruppe, Peter Borowski, Jochen Gemmer, Mathias Michel, Dr. Alexander Otte, Markus Stollsteimer, Friedemann Tonner, Thomas Wahl für anregende Diskussionen und Hilfsbereitschaft bei Fragen

Insbesondere danke ich meinen Eltern für die gewährte ideelle wie finanzielle Unterstützung während des Studiums.