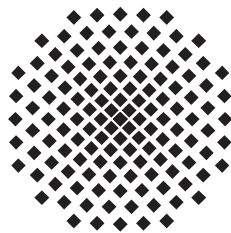


Analytische Fortsetzung der Gross-Pitaevskii-Gleichung für \mathcal{PT} -symmetrische Bose-Einstein-Kondensate

Bachelorarbeit von
Helmut Frasch

24. Februar 2014

Prüfer: Prof. Dr. Jörg Main



1. Institut für Theoretische Physik
Universität Stuttgart
Pfaffenwaldring 57, 70550 Stuttgart

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung	1
1.1. Motivation und Einführung in das Thema	1
1.2. Aufbau der Arbeit	2
2. \mathcal{PT}-symmetrische Quantenmechanik	5
2.1. Eigenschaften des \mathcal{PT} -Operators	5
2.1.1. Eigenwerte und Eigenzustände des \mathcal{PT} -Operators	6
2.2. Lineare \mathcal{PT} -symmetrische Operatoren	6
2.2.1. Konsequenzen des \mathcal{PT} -symmetrischen Potentials	8
2.3. Nichtlineare Operatoren	10
3. Gross-Pitaevskii Gleichung für Bose-Einstein Kondensate	11
3.1. Herleitung der Gross-Pitaevskii-Gleichung (GPE)	11
3.2. GPE mit schwacher Wechselwirkung	14
3.3. Gross-Pitaevskii-Gleichung in dimensionslosen Koordinaten	14
3.4. Bisherige Ergebnisse für eine GPE mit \mathcal{PT} -symmetrischem Doppelmuldenpotential	15
4. Kritische Punkte und analytische Funktionen	19
4.1. Analytische Funktionen	19
4.2. Bifurkationen	21
4.2.1. Tangentenbifurkation	22
4.2.2. Heugabelbifurkation	22
4.2.3. Verhalten bei komplexen Parametern	23
4.3. Exzeptionelle Punkte	23
4.4. Bedeutung für die Gross-Pitaevskii Gleichung mit \mathcal{PT} -symmetrischem Potential	25
5. Analytische Fortsetzung der Gross-Pitaevskii-Gleichung	27
5.1. Analytische Fortsetzung	27
5.1.1. Bikomplexe Zahlen	27
5.1.2. Fortsetzung mithilfe von bikomplexen Zahlen	30
5.1.3. Fortsetzung durch \mathcal{PT} -Konjugation	30
5.1.4. \mathcal{PT} -konjugierte bikomplexe GPE	32
5.2. Analytisch erweiterte GPE mit Doppel- δ -Potential	36

5.2.1. Numerische Umsetzung der Nullstellensuche	38
5.2.2. Spektrum der analytisch erweiterten GPE	39
5.2.3. Wellenfunktionen	40
5.2.4. Besonderheiten der kombinierten Zustände	45
6. Zusammenfassung und Ausblick	47
A. Beweise zu bikomplexen und hyperkomplexen Zahlen	49
Literaturverzeichnis	53
Danksagung	55

1. Einleitung

1.1. Motivation und Einführung in das Thema

In der Quantenmechanik werden physikalische Messwerte mit den Eigenwerten von Operatoren eines Hilbertraums in Verbindung gebracht. Die Forderung von Hermitizität an die Operatoren stellt sicher, dass das Spektrum der Operatoren rein reell ist und somit auch wirklich physikalische Messgrößen beschreibt. Hermitizität selbst ist jedoch keine notwendige Folge eines allgemeineren physikalischen Konzepts und stellt daher auch keine notwendige Eigenschaft eines physikalisch sinnvollen Operators dar. Es müsste demnach auch andere Klassen von Operatoren geben, die ein reelles Spektrum ermöglichen. Eine solche Klasse von nichthermiteschen Operatoren sind die \mathcal{PT} -symmetrischen Operatoren, welche von Bender und Boettcher anhand der Verallgemeinerung des harmonischen Potentials entdeckt wurden [1]. Ein Operator H ist \mathcal{PT} -symmetrisch, wenn dieser mit dem Paritäts-Zeit-Operator \mathcal{PT} kommutiert. Wenn die Eigenzustände von H zusätzlich Eigenzustände des \mathcal{PT} -Operators sind, existiert ein reelles Spektrum des Operators H für diese Zustände. Durch nichthermitesche Operatoren können unter anderem offene Quantensysteme mit Gewinn- und Verlusteffekten viel einfacher beschrieben werden, als dies mit hermiteschen Operatoren der Fall ist.

Die Realisierung eines \mathcal{PT} -symmetrischen Systems ist bereits in optischen Wellenleitern beobachtet worden [2], da die Beschreibung der Moden im Wellenleiter auf eine zur Schrödingergleichung analoge Gleichung führt. Bislang wurde \mathcal{PT} -Symmetrie aber noch in keinem echten quantenmechanischen System beobachtet. Ein Vorschlag der Realisierung eines solchen Quantensystems besteht in der Betrachtung eines Bose-Einstein-Kondensats (BEC) in einem Doppelmuldenpotential, bei dem Teilchen in der einen Mulde kohärent eingekoppelt und in der anderen Mulde kohärent ausgekoppelt werden [3].

Die Bose-Einstein-Kondensation beschreibt den Grundzustand der bosonischen Materie, welcher bei Temperaturen nahe des absoluten Nullpunkts auftritt. Verschiedene Bosonen können im Gegensatz zu Fermionen den gleichen quantenmechanischen Zustand einnehmen. Wenn alle Teilchen im Grundzustand sind, kann das System durch eine einzige makroskopische Wellenfunktion beschrieben werden. Die Dynamik eines BEC erfolgt gemäß der Gross-Pitaevskii-Gleichung (GPE), die aus der Vielteilchen-Schrödingergleichung über eine Mean-Field-Näherung hergeleitet wird. Die GPE ist eine nichtlineare Differentialgleichung, welche in ihrer einfachsten Form eine schwache, kurzreichweitige Wechselwirkung zwischen den Teilchen berücksichtigt. Bei einem BEC

kommt es zu geringen Teilchenzahldichten, weshalb das Wechselwirkungspotential durch ein Streupotential genähert werden kann. Im Falle von Temperaturen nahe des absoluten Nullpunkts wird die Streuung allein durch die s-Wellen Streulänge charakterisiert. Die Wechselwirkung zwischen den Teilchen kann daher durch die Teilchenzahl und die Streulänge beschrieben werden. In einer experimentellen Realisierung des Bose-Einstein-Kondensats, können beide Größen gezielt beeinflusst werden, wobei man die Streulänge mithilfe von Feshbach-Resonanzen festlegt.

Bisherige theoretische Untersuchungen eines BEC im \mathcal{PT} -symmetrischen Doppelmultipotential [4–8] konnten die Existenz von reellen sowie komplexen Eigenwerten nachweisen. Die komplexen Eigenwerte treten in zueinander komplex konjugierten Paaren auf. Es gibt auch Paare von reellen Eigenwerten, die bei einer bestimmten Stärke der Nichthermitizität des Potentials in einen einzigen Eigenwert mit nur einem Eigenzustand überführt werden. Ein Punkt, in dem verschiedene Zustände in einen einzigen übergehen, wird allgemein als kritischer Punkt bezeichnet. In diesen kritischen Punkten entstehen bei weiterer Erhöhung der Nichthermitizität auch die Zustände mit komplexen Eigenwerten. Bei der GPE kommt es auch vor, dass sich die Zahl der Zustände nach überschreiten des kritischen Punktes verändert. Dieses Verhalten konnte mit der nichtanalytischen Nichtlinearität der GPE in Verbindung gebracht werden. Die Gleichung kann durch eine analytische Erweiterung der Nichtlinearität auf eine Form gebracht werden, in der für jede Stärke des Potentials und der Nichtlinearität die Zahl der Lösungen erhalten bleibt. Bisher ist eine vollständige analytische Erweiterung nur gelungen, wenn die Algebra von den komplexen Zahlen auf die bikomplexen Zahlen erweitert wurde. Die Nichtlinearität der GPE mit schwacher Wechselwirkung hat die Form eines Betragsquadrats $|\psi(x)|^2$ der Wellenfunktion ψ . Unter Ausnutzung des \mathcal{PT} -Operators konnte auch eine analytische Erweiterung innerhalb der komplexen Zahlen mit $|\psi(x)|^2 \rightarrow \psi(x)\psi(-x)$ gefunden werden, die einen Teil der Zustände als Lösung hat. In dieser Arbeit geht es darum diesen Ansatz zu verallgemeinern, so dass alle Zustände der bikomplex erweiterten GPE als Lösungen vorkommen. Als Ansatz dienen die Symmetrieeigenschaften der Lösungen mit komplexen Eigenwerten der ursprünglichen GPE. Es wird vermutet, dass ein Ansatz mit verschiedenen Wellenfunktionen ψ_1 und ψ_2 eine analytische Ersetzung $|\psi(x)|^2 \rightarrow \psi_1(x)\psi_2(-x)$ liefert, die alle geforderten Lösungen zur Folge hat.

1.2. Aufbau der Arbeit

- KAPITEL 2 beginnt mit den Eigenschaften des \mathcal{PT} -Operators. Um \mathcal{PT} -Symmetrie zu erfüllen ergeben sich Bedingungen an die nichthermiteschen Operatoren und vor allem an deren Potentiale. Es werden sowohl lineare, wie auch nichtlineare Operatoren untersucht.
- In KAPITEL 3 wird die Gross-Pitaevskii-Gleichung für ein BEC mit schwacher Wechselwirkung hergeleitet. Anhand von vorhergehenden Arbeiten zu diesem The-

ma, werden die Eigenschaften einer solchen GPE mit \mathcal{PT} -symmetrischem Doppelmuldenpotential, sowie deren Spektrum für ein \mathcal{PT} -symmetrisches Doppel- δ -Potential aufgeführt.

- Die kritischen Punkte des Spektrums werden in KAPITEL 4 näher erläutert. Dazu gehören Bifurkationen und exzeptionelle Punkte. Zudem wird die Bedeutung von analytischen Funktionen für die Lösungen der Gleichung angesprochen.
- KAPITEL 5 beschreibt schließlich die Ergebnisse dieser Arbeit. Zunächst werden die Eigenschaften von bikomplexen Zahlen dargestellt und die Erweiterung der GPE mit bikomplexen Zahlen vorgestellt. Es folgt eine genauere Herleitung der analytischen Erweiterung mit $|\psi(x)|^2 \rightarrow \psi_1(x)\psi_2(-x)$, sowie der Zusammenhang der resultierenden Gleichungen mit der bikomplexen GPE. Schließlich wird die Gleichung mithilfe einer numerischen Nullstellensuche und Runge-Kutta-Integration für verschiedene Stärken des nichthermiteschen Anteils des Potentials als auch der Nichtlinearität gelöst. Abschließend kommt es zu einer Diskussion der Ergebnisse.
- Im ANHANG A werden zusätzlich noch einige Beweise zu den Eigenschaften der bikomplexen Zahlen durchgeführt, die sich auf einen Teil der hyperkomplexen Zahlen verallgemeinern lassen.

2. \mathcal{PT} -symmetrische Quantenmechanik

2.1. Eigenschaften des \mathcal{PT} -Operators

Der \mathcal{PT} -Operator setzt sich aus dem Paritätsoperator \mathcal{P} und dem Zeitumkehroperator \mathcal{T} zusammen. Diese beiden Operatoren werden über ihre Transformationseigenschaften bezüglich des Orts- und Impulsoperators definiert:

$$\mathcal{P}\hat{x}\mathcal{P}^{-1} = -\hat{x} \quad \mathcal{P}\hat{p}\mathcal{P}^{-1} = -\hat{p} \quad (2.1)$$

$$\mathcal{T}\hat{x}\mathcal{T}^{-1} = \hat{x} \quad \mathcal{T}\hat{p}\mathcal{T}^{-1} = -\hat{p}. \quad (2.2)$$

Der Paritätsoperator stellt somit eine Ortsspiegelung dar, wohingegen der Zeitumkehroperator strenggenommen nur eine Umkehr der Bewegung bewirkt. Eine echte Zeitumkehr kann über einen Operator nicht definiert werden, da Zeit keine quantenmechanische Observable ist.

Aus der fundamentalen Kommutatorrelation $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$ folgt weiterhin

$$\begin{aligned} \mathcal{T}i\hbar\mathcal{T}^{-1} &= \mathcal{T}\hat{x}\mathcal{T}^{-1}\mathcal{T}\hat{p}\mathcal{T}^{-1} - \mathcal{T}\hat{p}\mathcal{T}^{-1}\mathcal{T}\hat{x}\mathcal{T}^{-1} \\ &= -\hat{x}\hat{p} + \hat{p}\hat{x} \\ &= -i\hbar \end{aligned} \quad (2.3)$$

was nur gilt wenn \mathcal{T} ein antilinear Operator mit $\mathcal{T}i\mathcal{T}^{-1} = -i$ ist. Dadurch wird auch \mathcal{PT} zu einem antilinearen Operator mit

$$\mathcal{PT}\hat{x}(\mathcal{PT})^{-1} = -\hat{x} \quad \mathcal{PT}\hat{p}(\mathcal{PT})^{-1} = \hat{p} \quad \mathcal{PT}i(\mathcal{PT})^{-1} = -i. \quad (2.4)$$

In der Ortsdarstellung wirkt der \mathcal{PT} -Operator als komplexe Konjugation mit gleichzeitiger Spiegelung des Ortes.

Ein antilinear Operator $T(x)$ ist allgemein durch die Eigenschaft $T(\lambda x + \mu y) = \lambda^*T(x) + \mu^*T(y)$ definiert, wobei λ und μ komplexe Zahlen sind. Dies bedeutet unter anderem, dass der Dirac'sche Bra-ket-Formalismus auf solche Operatoren nicht vollständig übertragen werden kann, da Bra-Vektoren über lineare Funktionale definiert sind. Die Anwendung eines antilinearen Operators auf einen Bra-Vektor zerstört dessen Linearität wodurch sich kein wohldefinierter Ausdruck mehr ergibt [9]. Dieses Problem kann umgangen werden indem man die Anwendung von antilinearen Operatoren auf Ket-Vektoren beschränkt.

2.1.1. Eigenwerte und Eigenzustände des \mathcal{PT} -Operators

Zweimaliges anwenden von \mathcal{PT} auf einen beliebigen Zustand führt den Zustand in sich selbst über. Bei Anwendung auf einen Eigenzustand $|\psi\rangle$ von \mathcal{PT} mit Eigenwert λ ergibt sich folglich

$$\begin{aligned} \mathcal{PT}\mathcal{PT}|\psi\rangle &= \mathcal{PT}\lambda|\psi\rangle = \lambda^*\lambda|\psi\rangle \stackrel{!}{=} |\psi\rangle \\ &\rightarrow |\lambda|^2 = 1 \\ &\rightarrow \lambda = e^{i\phi}. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Eigenzustände zum \mathcal{PT} -Operator werden \mathcal{PT} -symmetrische Zustände genannt. Alle anderen Zustände werden als \mathcal{PT} -gebrochene Zustände bezeichnet. Für einen Eigenzustand $|\phi\rangle$ mit Eigenwert 1 gilt in der Ortsdarstellung

$$\langle \mathbf{x} | \mathcal{PT} | \phi \rangle = \phi^*(-\mathbf{x}) = \text{Re } \phi(-\mathbf{x}) - \text{Im } \phi(-\mathbf{x}) = \text{Re } \phi(\mathbf{x}) + \text{Im } \phi(\mathbf{x}) = \phi(\mathbf{x}). \tag{2.6}$$

Eigenzustände zum Eigenwert 1 besitzen also einen symmetrischen Realteil und einen antisymmetrischen Imaginärteil. Veränderung der Phase eines solchen Zustandes durch $|\tilde{\phi}\rangle = e^{i\theta}|\phi\rangle$ verändert auch den Eigenwert gemäß:

$$\begin{aligned} \mathcal{PT}|\phi\rangle &= |\phi\rangle \\ \mathcal{PT}e^{-i\theta}|\tilde{\phi}\rangle &= e^{-i\theta}|\tilde{\phi}\rangle \\ e^{i\theta}\mathcal{PT}|\tilde{\phi}\rangle &= e^{-i\theta}|\tilde{\phi}\rangle \\ \mathcal{PT}|\tilde{\phi}\rangle &= e^{-i2\theta}|\tilde{\phi}\rangle. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Also führt die Veränderung der Phase zu einem Eigenzustand mit Eigenwert $e^{-i2\theta}$. Bei einer Wahl von $\theta = \pm\pi/2$ Wird der Realteil antisymmetrisch und der Imaginärteil symmetrisch. Der Eigenwert zu einem solchen Zustand ergibt sich aus (2.7) zu -1 . Wird also ein einzelner \mathcal{PT} -symmetrischer Zustand betrachtet, so kann immer entweder der Real- oder Imaginärteil der Wellenfunktion in einem vorgegebenen Punkt x_0 durch die Wahl der globalen Phase auf 0 gesetzt werden.

2.2. Lineare \mathcal{PT} -symmetrische Operatoren

Der bisherige Formalismus der Quantenmechanik postuliert, dass jede physikalische Observable durch einen hermiteschen Operator dargestellt werden kann. Jede Messung projiziert den Zustand des Systems auf einen der Eigenzustände des Operators. Die Norm des projizierten Zustandes gibt die Wahrscheinlichkeit an, bei einer Messung den Eigenwert des Operators zu erhalten, sofern der Ausgangszustand normiert war. Hermitesche Operatoren garantieren zum einen reelle Eigenwerte und damit eine einfache Korrespondenz der Messwerte zu den Eigenwerten. Andererseits sind Zustände zu verschiedenen

Eigenwerten orthogonal zueinander. Kommutierende Operatoren besitzen gemeinsame Eigenzustände zu im Allgemeinen verschiedenen Eigenwerten. Durch diese Eigenschaft und die Orthogonalität der Zustände kann eine vollständige Orthonormalbasis zu einem Satz kommutierender Observablen gefunden werden, wodurch eine eindeutige Beschreibung des Systems möglich ist. Die Dynamik eines Quantensystems wird durch die Schrödingergleichung postuliert. Die ausschließliche Verwendung von hermiteschen Operatoren impliziert dadurch eine unitäre Zeitentwicklung, welche die Norm der Zustände erhält. Die Einführung des hermiteschen Operators in den Formalismus der Quantenmechanik erfolgte allein aus diesen mathematischen Gründen. Hermitizität folgt also an sich aus keinem physikalischen Konzept und ist zudem auch keine notwendige Bedingung für reelle Eigenwerte.

Hermitizität eines Operators wird üblicherweise durch $H = H^\dagger$ definiert. Diese Definition gilt strenggenommen nur in endlichdimensionalen Hilberträumen. In unendlichdimensionalen Hilberträumen werden durch diese Bedingung nur selbstadjungierte Operatoren definiert während hermitesche Operatoren allgemeiner durch

$$\langle \psi | H | \phi \rangle = \langle \phi | H | \psi \rangle^* \quad (2.8)$$

gegeben sind. Der adjungierte Operator H^\dagger kann auch durch eine Ähnlichkeitstransformation mit einem entsprechenden Operator A durch $H^\dagger = AHA^{-1}$ dargestellt werden. Hermitizität von H ist also gleichbedeutend mit

$$H = AHA^{-1} \quad \Leftrightarrow \quad [H, A] = 0. \quad (2.9)$$

Es stellt sich die Frage, ob auch andere, mit H kommutierende Operatoren ein reelles Spektrum ermöglichen. Der bereits vorgestellte \mathcal{PT} -Operator wird dieser Anforderung gerecht, so dass ein anderer Satz von Operatoren mit reellen Eigenwerten durch die \mathcal{PT} -Symmetrie

$$[H, \mathcal{PT}] = 0 \quad (2.10)$$

beschrieben wird. Mit dieser Bedingung folgt für einen Eigenzustand $|\psi\rangle$ von H zu einem nichtentartetem Eigenwert μ

$$\begin{aligned} H\mathcal{PT}|\psi\rangle &= \mathcal{PT}H|\psi\rangle \\ &= \mathcal{PT}\mu|\psi\rangle \\ &= \mu^*\mathcal{PT}|\psi\rangle. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Ist einerseits $|\psi\rangle$ ein \mathcal{PT} -symmetrischer Zustand, so gilt $\mu = \mu^*$ und der Eigenwert ist reell. Andererseits fordert ein nichtentarteter reeller Eigenwert, dass $|\psi\rangle$ und $\mathcal{PT}|\psi\rangle$ linear abhängig sind, wodurch die \mathcal{PT} -symmetrie des Zustandes folgt. Handelt es sich um einen \mathcal{PT} -gebrochenen Zustand, dann gibt es ein Paar von zueinander komplex konjugierten Eigenwerten. Das gleiche gilt bei linearen Hamiltonoperatoren auch für entartete Eigenwerte. Ein Beweis dazu findet sich in [4, 5]. Zusätzlich ist der Eigenraum

zu einem solchen entarteten Eigenwert invariant gegenüber der Anwendung des \mathcal{PT} -Operators.

Ob die so erhaltene Menge von Operatoren größer als die Menge der hermiteschen Operatoren ist, kann nicht beantwortet werden. Es ist möglich, ein alternatives Skalarprodukt bezüglich des \mathcal{PT} -Operators zu konstruieren, welches (2.8) für \mathcal{PT} -symmetrischer Operatoren erfüllt [10]. Dadurch scheint die \mathcal{PT} -symmetrische Quantenmechanik lediglich eine andere Darstellungsmöglichkeit der herkömmlichen Quantenmechanik zu sein [11].

2.2.1. Konsequenzen des \mathcal{PT} -symmetrischen Potentials

Aus (2.10) folgt für das Potential eines allgemeinen \mathcal{PT} -symmetrischen Hamiltonoperators $H = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{\mathbf{x}})$:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{P}\mathcal{T}H &= H\mathcal{P}\mathcal{T} \\
 \mathcal{P}\mathcal{T}H\mathcal{P}\mathcal{T}^{-1} &= H \\
 \mathcal{P}\mathcal{T} \left(\frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{\mathbf{x}}) \right) \mathcal{P}\mathcal{T}^{-1} &= \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{\mathbf{x}}) \\
 \mathcal{P}\mathcal{T}V(\hat{\mathbf{x}})\mathcal{P}\mathcal{T}^{-1} &= V(\hat{\mathbf{x}}) \\
 \Rightarrow V(\hat{\mathbf{x}}) &= V^*(-\hat{\mathbf{x}}).
 \end{aligned} \tag{2.12}$$

Analog zu einem Eigenzustand des \mathcal{PT} -Operators mit Eigenwert 1 muss das Potential einen symmetrischen Real- und einen antisymmetrischen Imaginärteil bezüglich des Ortsoperators haben. Hermitesche Potentiale müssen diese Symmetrieeigenschaften bezüglich einer beliebigen Basis des Hilbertraums erfüllen. Adjungiert man das Potential, ergibt sich:

$$\begin{aligned}
 V^\dagger(\hat{\mathbf{x}}) &= \left(\int_{\mathbb{R}^6} d^3x d^3x' |\mathbf{x}\rangle \langle \mathbf{x}| V(\hat{\mathbf{x}}) |\mathbf{x}'\rangle \langle \mathbf{x}'| \right)^\dagger \\
 &= \left(\int_{\mathbb{R}^6} d^3x d^3x' |\mathbf{x}\rangle V(\mathbf{x}) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \langle \mathbf{x}'| \right)^\dagger \\
 &= \int_{\mathbb{R}^3} d^3x |\mathbf{x}\rangle \langle \mathbf{x}| V^*(\mathbf{x}) \\
 &= V^*(\hat{\mathbf{x}}).
 \end{aligned} \tag{2.13}$$

Hermitesche Potentiale müssen also reell sein, während dies für \mathcal{PT} -symmetrische Potentiale nicht mehr gilt. Demnach unterscheidet sich der adjungierte Operator zu H um einen Imaginärteil,

$$H = H^\dagger + H - H^\dagger = H^\dagger + 2i\text{Im}V. \tag{2.14}$$

Orthogonalität von Zuständen $|\psi_i\rangle$ zu unterschiedlichen Eigenwerten α_i wird im hermiteschen Fall durch die Rechnung

$$\begin{aligned} \langle \psi_m | H | \psi_n \rangle &= \langle \psi_m | H^\dagger + 2i \text{Im}V | \psi_n \rangle \\ (\alpha_n - \alpha_m) \langle \psi_m | \psi_n \rangle &= \langle \psi_m | 2i \text{Im}V | \psi_n \rangle \end{aligned} \quad (2.15)$$

gezeigt. Da der Imaginärteil des Potentials nicht in jedem Fall verschwindet, gilt dies für die Zustände eines \mathcal{PT} -symmetrischen Operators im Allgemeinen nicht mehr. Auch die Normerhaltung wird durch den Imagärteil des Potentials aufgehoben, wenn die Dynamik weiterhin gemäß der Schrödingergleichung beschrieben wird:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle \psi | \psi \rangle &= \langle \psi | \frac{\partial}{\partial t} | \psi \rangle^* + \langle \psi | \frac{\partial}{\partial t} | \psi \rangle \\ &= \frac{i}{\hbar} (\langle \psi | H | \psi \rangle^* - \langle \psi | H | \psi \rangle) \\ &= \frac{2}{\hbar} \langle \psi | \text{Im}V(\hat{\mathbf{x}}) | \psi \rangle. \end{aligned} \quad (2.16)$$

In der Ortsdarstellung kann die Wahrscheinlichkeitsdichte $\rho(\mathbf{x}) = |\psi(\mathbf{x})|^2$ betrachtet werden, wodurch aus (2.16) mit der Wahrscheinlichkeitsstromdichte

$$\mathbf{j}(\mathbf{x}) = \frac{i\hbar}{2m} (\psi(\mathbf{x}) \nabla \psi^*(\mathbf{x}) - \psi^*(\mathbf{x}) \nabla \psi(\mathbf{x})) \quad (2.17)$$

die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{d}{dt} \rho(\mathbf{x}) + \text{div} \mathbf{j}(\mathbf{x}) = \frac{2}{\hbar} \rho(\mathbf{x}) \text{Im}V(\mathbf{x}) \quad (2.18)$$

folgt. In ihr beschreibt der Term $\frac{2}{\hbar} \rho(\mathbf{x}) \text{Im}V(\mathbf{x})$ eine Quelle bei positivem Imaginärteil des Potentials und eine Senke bei negativem Imaginärteil. \mathcal{PT} -symmetrische Operatoren mit einem imaginären Beitrag zum Potential können also keine geschlossenen Systeme beschreiben. Die Normerhaltung ist eine notwendige physikalische Forderung an ein geschlossenes Quantensystem. Dies hängt mit der Interpretation der Norm als Wahrscheinlichkeit zusammen [9]. Operatoren mit imaginärem Potential können bezüglich dieser Norm also nur offene Systeme beschreiben, wobei eine physikalisch sinnvolle Normierung der Zustände nur im Rahmen eines abgeschlossenen Systems geschehen kann. Es sei angemerkt, dass die Kopplung von zwei offenen Systemen mit zueinander konjugierten Potentials zu einem hermiteschen Gesamtsystem führt.

Die Norm des Hilbertraums wird durch dessen Skalarprodukt induziert. Ein Skalarprodukt, welches (2.8) bezüglich \mathcal{PT} -symmetrischer Operatoren erfüllt, sichert die Orthogonalität der Zustände und die Normerhaltung auch in \mathcal{PT} -symmetrischen Systemen. Die dadurch induzierte Norm beschreibt allerdings eine andere physikalische Größe, wie zum Beispiel den Paritätserwartungswert [4].

2.3. Nichtlineare Operatoren

In dieser Arbeit wird ein nichtlineares Quantensystem betrachtet. Das heißt, es gibt einen Term $H_{nl} = f(\psi)$ im Hamiltonoperator, der vom Zustand selbst abhängt. Der Hamiltonoperator selbst ist eine Summe seiner linearen und nichtlinearen Anteile,

$$H = H_l + H_{nl} = H_l + f(\psi), \quad (2.19)$$

wobei der lineare Anteil weiterhin die Form $H_l = \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m} + V(\hat{\mathbf{x}})$ hat. Betrachtet man Gleichung (2.8) für einen solchen Operator, so kann dieser nur hermitesch sein, wenn der nichtlineare Anteil die Bedingung

$$\langle \psi | f(\phi) | \phi \rangle = \langle \phi | f(\psi) | \psi \rangle^* \quad (2.20)$$

erfüllt. Weil Hermitizität also von den Hilbertraumzuständen selbst abhängt, wird die Menge der möglichen hermiteschen nichtlinearen Operatoren stark eingeschränkt. Bei Annahme von \mathcal{PT} -Symmetrie wird mit (2.10) eine schwächere Bedingung an die Nichtlinearität gestellt:

$$\mathcal{PT} f(\psi) | \psi \rangle = f(\mathcal{PT} \psi) \mathcal{PT} | \psi \rangle. \quad (2.21)$$

Die \mathcal{PT} -Symmetrie eines nichtlinearen Operators der Form (2.19) hängt also nur von der \mathcal{PT} -Symmetrie seiner Zustände und des linearen Potentials ab. Ist der Zustand \mathcal{PT} -symmetrisch, gilt außerdem

$$\mathcal{PT} f(\psi) | \psi \rangle = f(e^{i\phi} \psi) e^{i\phi} | \psi \rangle = e^{i\phi} f(e^{i\phi} \psi) | \psi \rangle, \quad (2.22)$$

wodurch die Nichtlinearität invariant gegenüber der Phase der Wellenfunktion sein muss, um \mathcal{PT} -Symmetrie zu garantieren. Die Eigenschaft (2.10) garantiert allerdings nur noch ein reelles Spektrum, wenn die Eigenwerte nicht entartet sind. Dies folgt aus (2.11), da diese Gleichung auch für nichtlineare Operatoren gilt. Allerdings folgt trotzdem, dass die Eigenwerte in komplex konjugierten Paaren auftreten deren Eigenzustände durch den \mathcal{PT} -Operator in einander übergehen. Gleichung (2.11) besagt auch weiterhin, dass der Eigenwert genau dann reell ist, wenn der Zustand \mathcal{PT} -Symmetrie hat. Interessant ist diese Eigenschaft insbesondere, wenn der nichtlineare Hamiltonoperator stetig aus dem rein linearen Operator hervorgeht. Das ist zum Beispiel der Fall, wenn der Operator $f(\psi)$ stetig von einem Parameter α abhängt und für einen bestimmten Wert des Parameters verschwindet.

3. Gross-Pitaevskii Gleichung für Bose-Einstein Kondensate

Ein Bose-Einstein-Kondensat beschreibt den Grundzustand eines Quantensystems, welches nur aus Bosonen besteht. Die Aufteilung der Welt in fermionische und bosonische Materie basiert auf Symmetrieeigenschaften von ununterscheidbaren Teilchen. Die Wellenfunktion eines Systems aus Fermionen ist antisymmetrisch unter Paarvertauschung der Teilchen während bosonische Wellenfunktionen symmetrisch bei Paarvertauschung sind. Aufgrund dieser Eigenschaft folgt für Fermionen das Pauli-Prinzip, wonach verschiedene Fermionen nicht den gleichen quantenmechanischen Zustand besetzen können. Bosonen hingegen können gleiche Zustände besetzen, so dass der Grundzustand eines bosonischen Systems gleichzeitig der Grundzustand der einzelnen nicht wechselwirkenden Teilchen ist. Dadurch ist die Beschreibung des Gesamtsystems durch eine makroskopische Wellenfunktion möglich. Die theoretische Existenz dieses neuen Zustandes der Materie wurde erstmals 1924/25 von Bose [12] und Einstein [13, 14] behandelt. Gemäß der von ihnen entwickelten Verteilungsfunktion für Bosonen, der Bose-Einstein-Statistik, stellt sich der Grundzustand erst bei Temperaturen nahe des absoluten Nullpunkts ein, sobald eine kritische Temperatur unterschritten wird. Die Wellenfunktion des Grundzustandes hängt allerdings auch von der Wechselwirkung zwischen allen Atomen des Kondensats ab. Bei schwacher Wechselwirkung wird die Dynamik durch die Gross-Pitaevskii-Gleichung (GPE) beschrieben [15]. Eine experimentelle Realisierung von Bose-Einstein-Kondensaten erfolgte erst 1995 von Davis et al. [16] und Anderson et al. [17].

3.1. Herleitung der Gross-Pitaevskii-Gleichung (GPE)

Grundsätzlich wird die Dynamik eines Systems mit reinen Zuständen durch die Schrödingergleichung beschrieben. Die stationäre Vielteilchen-Schrödingergleichung für ein aus N Teilchen bestehendes Quantensystem mit Zweiteilchenwechselwirkung $W(\hat{\mathbf{x}}_i - \hat{\mathbf{x}}_j)$ lautet

$$\left(\sum_{i=1}^N \frac{\hat{\mathbf{p}}_i^2}{2m} + \sum_{i=1}^N V(\hat{\mathbf{x}}_i) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i}^N W(\hat{\mathbf{x}}_i - \hat{\mathbf{x}}_j) \right) |\Psi\rangle = E|\Psi\rangle. \quad (3.1)$$

Dabei ist $V(\hat{\mathbf{x}}_i)$ das Einteilchenpotential, m die Masse jedes Teilchens und $|\Psi\rangle$ der Gesamtzustand. Für den Grundzustand kann eine Näherung vorgenommen werden, in der

$|\Psi\rangle$ als Tensorprodukt aller N Einteilchenzustände

$$|\Psi\rangle = |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle \otimes \cdots \otimes |\psi_N\rangle \quad (3.2)$$

ausgedrückt wird. Da der Grundzustand gesucht ist, sollten im Nachhinein alle Einteilchenzustände gleich sein. In Ortsdarstellung ergibt sich somit:

$$\langle \mathbf{x} | \Psi \rangle = \prod_{i=1}^N \psi(\mathbf{x}_i). \quad (3.3)$$

Die Energie des Grundzustandes wird durch einen Mean-Field-Ansatz angenähert, bei dem die Wellenfunktion eines Einteilchenzustandes durch die gemittelte Wellenfunktion aller anderen Einteilchenzustände beeinflusst wird. Dazu wird eine Variation der Wellenfunktionen durchgeführt, so dass sich die Mean-Field-Energie E_{mf} durch Minimierung des Funktionals

$$E = \frac{\langle \Psi | H | \Psi \rangle}{\langle \Psi | \Psi \rangle} \quad (3.4)$$

ergibt. Die Berechnung dieser Gleichung erfolgt in Ortsdarstellung für die einzelnen Terme des Hamiltonoperators aus (3.1)

$$H = \left(\sum_{i=1}^N \frac{\hat{\mathbf{p}}_i^2}{2m} + \sum_{i=1}^N V(\hat{\mathbf{x}}_i) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i}^N W(\hat{\mathbf{x}}_i - \hat{\mathbf{x}}_j) \right) = H_T + H_V + H_W. \quad (3.5)$$

Mit normierten Zuständen $\langle \Psi | \Psi \rangle = 1$ ergeben sich die einzelnen Terme des Gesamtfunktional zu

$$\begin{aligned} E_T &= \langle \Psi | H_T | \Psi \rangle = \sum_{i=1}^N \int d^3x \psi^*(\mathbf{x}_i) \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta_i \right) \psi(\mathbf{x}_i) \\ &= -N \frac{\hbar^2}{2m} \int d^3x \psi^*(\mathbf{x}) \Delta \psi(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$E_V = \langle \Psi | H_V | \Psi \rangle = N \int d^3x \psi^*(\mathbf{x}) V(\mathbf{x}) \psi(\mathbf{x}) \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned} E_W &= \langle \Psi | H_W | \Psi \rangle = \sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i}^N \int d^3x_i \int d^3x_j \psi^*(\mathbf{x}_i) \psi^*(\mathbf{x}_j) \frac{1}{2} W(|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|) \psi(\mathbf{x}_i) \psi(\mathbf{x}_j) \\ &= N(N-1) \frac{1}{2} \int d^3x \int d^3x' \psi^*(\mathbf{x}) \psi^*(\mathbf{x}') W(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \psi(\mathbf{x}) \psi(\mathbf{x}'). \end{aligned} \quad (3.8)$$

Die Variation des Funktionals (3.4) lässt es zu, die Bra- und Ket-Zustände als unabhängig voneinander zu betrachten. Ein hermitescher Hamiltonoperator führt bei einem nichtentarteten Eigenwert zwangweise auf die Gleichheit der beiden Zustände. Es reicht

also aus, nur nach der Wellenfunktion ψ^* zu variieren. Aufgrund der Normierung der Zustände wird die Variation unter der Nebenbedingung

$$\langle \Psi | \Psi \rangle = \left(\int d^3x \psi^*(\mathbf{x}) \psi(\mathbf{x}) \right)^N = 1 \quad (3.9)$$

durchgeführt. Mit der Optimierungsmethode der Lagrange-Multiplikatoren kann die Nebenbedingung über einen Lagrange-Parameter μ in der Form

$$E_\mu = \mu (\langle \Psi | \Psi \rangle - 1) = 0 \quad (3.10)$$

in das Funktional eingeführt werden. Der Term mit dem Lagrange-Parameter wird in negativer Form eingeführt, so dass das Funktional dann

$$E = E_T + E_V + E_W - E_\mu \quad (3.11)$$

lautet. Die Variation δE ist eine lineare Operation, wodurch die einzelnen Terme für sich variiert werden können. Wenn nach $\delta\psi^*$ variiert wird, führt dies auf die Ausdrücke

$$\delta E_T = -\frac{\hbar^2}{2m} N \int d^3x \delta\psi^*(\mathbf{x}) \{\Delta\psi(\mathbf{x})\}, \quad (3.12)$$

$$\delta E_V = N \int d^3x \delta\psi^*(\mathbf{x}) \{V(\mathbf{x})\psi(\mathbf{x})\}, \quad (3.13)$$

$$\delta E_W = N(N-1) \int d^3x \delta\psi^*(\mathbf{x}) \left\{ \int d^3x' \psi^*(\mathbf{x}') W(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \psi(\mathbf{x}) \psi(\mathbf{x}') \right\}, \quad (3.14)$$

$$\begin{aligned} \delta E_\mu &= \mu N \int d^3x \delta\psi^*(\mathbf{x}) \left\{ \psi(\mathbf{x}) \left(\int d^3x' \psi^* \mathbf{x}' \psi \mathbf{x}' \right)^{N-1} \right\} \\ &\stackrel{(3.9)}{=} \mu N \int d^3x \delta\psi^*(\mathbf{x}) \{\psi(\mathbf{x})\}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Das Funktional nimmt ein Minimum an wenn es gemäß $\delta E = 0$ stationär wird. Dies muss für jedes $\delta\psi^*$ erfüllt werden, so dass sich mit (3.11) bis (3.15) die Gleichung

$$N \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V(\mathbf{x}) + (N-1) \int d^3x' \psi^*(\mathbf{x}') W(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \psi(\mathbf{x}') - \mu \right) \psi(\mathbf{x}) = 0 \quad (3.16)$$

ergibt. Für große Teilchenzahlen kann weiterhin $N-1 \approx N$ vereinfacht werden. Die Gross-Pitaevskii-Gleichung mit einem allgemeinen Wechselwirkungspotential ergibt sich, wenn die letzte Gleichung durch N dividiert wird:

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V(\mathbf{x}) + N \int d^3x' \psi^*(\mathbf{x}') W(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \psi(\mathbf{x}') \right) \psi(\mathbf{x}) = \mu \psi(\mathbf{x}). \quad (3.17)$$

Thermodynamisch betrachtet entspricht diese Herleitung der Minimierung der Freien Energie $F = E - \mu N$ mit dem chemischen Potential μ . Damit kann der Lagrange-Parameter μ mit dem chemischen Potential identifiziert werden.

3.2. GPE mit schwacher Wechselwirkung

Bei vielen Arten von bosonischen Systemen besteht nur eine schwache Wechselwirkung der Teilchen untereinander. In dieser Arbeit werden sich die Untersuchungen auf ein solches System mit schwacher Wechselwirkung beschränken. Es handelt sich bei dieser Wechselwirkung um eine kurzreichweitige Van-der-Waals-Wechselwirkung, die auch oft als Kontaktwechselwirkung bezeichnet wird. Das Zwei-Teilchen-Potential W kann mit dieser Wechselwirkung durch ein Lennard-Jones-Potential

$$W(r) = \frac{C_n}{r^n} - \frac{C}{r^6} \quad (3.18)$$

beschrieben werden, wobei r den Abstand zwischen den Teilchen bezeichnet und $n > 6$ sein muss. Die GPE kann letztendlich mit einem einfacheren Potential auskommen. Hierzu wird die Streutheorie zu Rate gezogen, da Kondensate mit relativ geringer Teilchendichte betrachtet werden, in denen sich schwach wechselwirkende Teilchen wie bei einem Streuexperiment verhalten. Wenn das Problem bei Temperaturen nahe dem absoluten Nullpunkt behandelt wird, reduziert sich der Großteil der Wechselwirkung zwischen den Atomen auf eine s-Wellen-Streuung. Die gesamte Wechselwirkung kann dann durch die Streuwellenlänge a dieses Orbitals beschrieben werden. Um das Lennard-Jones-Potential zu modellieren, muss das Streupotential lediglich eine Streuung beschreiben, welche die gleiche Streulänge wie bei einem Lennard-Jones-Potential annimmt. Dadurch reicht es aus, ein Pseudopotential [15]

$$W(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = 2\pi\hbar^2 \frac{a}{M} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad (3.19)$$

mit der reduzierten Masse M zweier Teilchen zu untersuchen. Im Kondensat sollen nur Teilchen von gleicher Masse m sein, weshalb die reduzierte Masse zu $M = m/2$ wird. Negative Streulängen a beschreiben eine attraktive Wechselwirkung, während positive Streulängen eine abstoßende Wechselwirkung zur Folge haben. Wird das Pseudopotential in die GPE (3.17) eingesetzt, ergibt sich die Gross-Pitaevskii-Gleichung mit schwacher Wechselwirkung zu

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V(\mathbf{x}) + 4\pi\hbar^2 \frac{a}{m} N |\psi(\mathbf{x})|^2 \right) \psi(\mathbf{x}) = \mu \psi(\mathbf{x}). \quad (3.20)$$

3.3. Gross-Pitaevskii-Gleichung in dimensionslosen Koordinaten

Die numerische Lösung von Differentialgleichungen erfordert die Wahl einer geeigneten Größenordnung der vorkommenden Zahlen. Wird eine ungeeignete Skala verwendet, kann die Lösung an numerischen Instabilitäten scheitern. Eine dimensionslose Formulierung

3.4. Bisherige Ergebnisse für eine GPE mit \mathcal{PT} -symmetrischem Doppelmuldenpotential

der GPE überführt die Gleichung in eine allgemeine Form, die für den Vergleich mit konkreten physikalischen Größen beliebig skaliert werden kann. Als ersten Schritt einer solchen Formulierung wird eine charakteristische Längenskala a_0 eingeführt. Dadurch wird der Ortsvektor durch $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x}/a_0$ ersetzt. Diese Veränderung wirkt sich in der GPE sowohl auf die Wellenfunktion ψ als auch auf den Laplace-Operator Δ aus. Weil die Normierung erhalten bleiben muss, verändert sich die Wellenfunktion durch die Forderung

$$\int d^3x \left| \tilde{\psi}(\tilde{\mathbf{x}}) \right|^2 = \int d^3x |\psi(\mathbf{x})|^2 \quad \Rightarrow \quad \tilde{\psi}(\tilde{\mathbf{x}}) = a_0^{\frac{3}{2}} \psi(\mathbf{x}). \quad (3.21)$$

Dies wirkt sich wie folgt auf die GPE aus:

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2ma_0^2} \tilde{\Delta} + V(a_0\tilde{\mathbf{x}}) + 4\pi\hbar^2 \frac{a}{a_0^3 m} N \left| \tilde{\psi}(\tilde{\mathbf{x}}) \right|^2 \right) a_0^{\frac{3}{2}} \tilde{\psi}(\tilde{\mathbf{x}}) = \mu a_0^{\frac{3}{2}} \tilde{\psi}(\tilde{\mathbf{x}}). \quad (3.22)$$

Nun muss nur noch die Energieskala $E_0 = \frac{\hbar^2}{2ma_0^2}$ gewählt werden. Dadurch werden gleichzeitig das chemische Potential μ und das Einteilchenpotential V verändert:

$$\tilde{\mu} = \frac{\mu}{E_0}, \quad \tilde{V}(\tilde{\mathbf{x}}) = \frac{V(a_0\tilde{\mathbf{x}})}{E_0}. \quad (3.23)$$

Die GPE verändert sich mit diesen Ersetzungen zu

$$\left(-\tilde{\Delta} + \tilde{V}(\tilde{\mathbf{x}}) + 8\pi \frac{a}{a_0} N \left| \tilde{\psi}(\tilde{\mathbf{x}}) \right|^2 \right) E_0 a_0^{\frac{3}{2}} \tilde{\psi}(\tilde{\mathbf{x}}) = \tilde{\mu} E_0 a_0^{\frac{3}{2}} \tilde{\psi}(\tilde{\mathbf{x}}). \quad (3.24)$$

Wird nun noch durch $E_0 a_0^{3/2}$ geteilt und der dimensionslose Nichtlinearitätsparameter

$$g = 8\pi \frac{a}{a_0} N \quad (3.25)$$

eingeführt, ergibt sich die GPE in der Form, wie sie von nun an für den Rest dieser Arbeit verwendet wird. Zusätzlich werden die Tilden für eine bessere Darstellung weggelassen:

$$(-\Delta + V(\mathbf{x}) + g |\psi(\mathbf{x})|^2) \psi(\mathbf{x}) = \mu \psi(\mathbf{x}). \quad (3.26)$$

3.4. Bisherige Ergebnisse für eine GPE mit \mathcal{PT} -symmetrischem Doppelmuldenpotential

In dieser Arbeit wird die GPE mit einem \mathcal{PT} -symmetrischen Doppel- δ -Potential

$$V(\gamma, x) = -((1 - i\gamma)\delta(x + b) + (1 + i\gamma)\delta(x - b)) \quad (3.27)$$

untersucht. Der positive Imaginärteil bei $x = -b$ beschreibt eine Teilchenquelle und der negative Imaginärteil bei $x = +b$ eine Teilchensenke. Wie im Kapitel über die

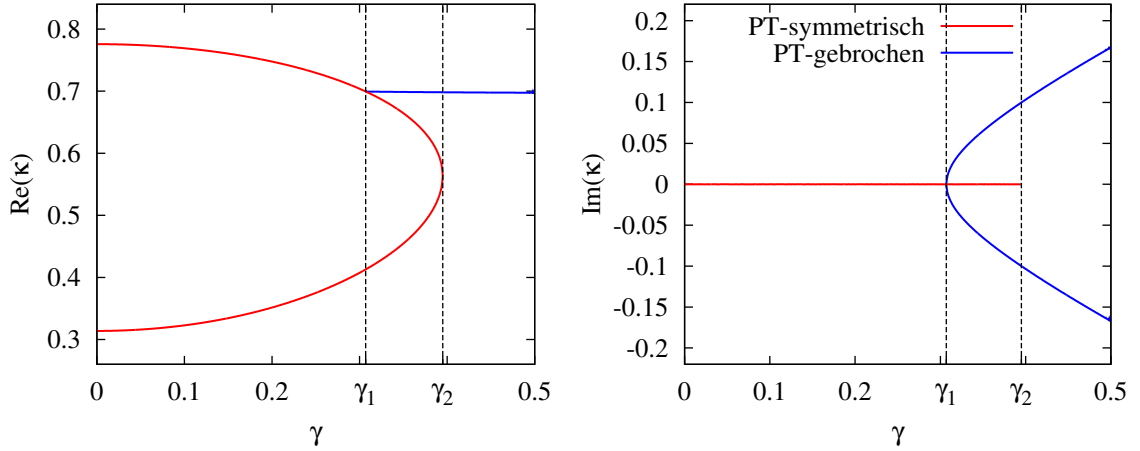


Abbildung 3.1.: Spektrum der GPE mit Doppel- δ -Potential und einem Nichtlinearitätsparameter $g = 1.0$ in Abhängigkeit des Nichthermitizitätsparameters γ . Die Parameter γ_i der kritischen Punkte werden bei größeren Nichtlinearitätsparametern kleiner. Ein funktionaler Zusammenhang $\gamma_i(g)$ wurde in [6] berechnet. Zwischen den beiden kritischen Punkten verdoppelt sich die Anzahl der Lösungen.

\mathcal{PT} -symmetrische Quantenmechanik gesagt wurde, beschreibt ein solches Potential ein offenes Quantensystem, das an die Quellen und Senken gekoppelt ist. Das Potential beschreibt allerdings keine Realisierung der Kopplung, sondern nur den Effekt von Quellen und Senken in diesem System. Werden die Kopplungspotentiale explizit in den Hamiltonoperator gebracht, wird dieser wieder hermitesch. Das kann zum Beispiel durch weitere Potentialmulden erreicht werden, mit denen die Teilchen durch einen Tunnelprozess auskoppeln und wieder einkoppeln können [6, 18].

Das Spektrum der dimensionslosen GPE mit Doppel- δ -Potential in Abhängigkeit des Nichthermitizitätsparameters γ ist für den Nichtlinearitätsparameter $g = 1.0$ in Abbildung 3.1 dargestellt. Das chemische Potential wurde hier durch $\mu = -\kappa^2$ ersetzt, so dass der Zustand mit größeren Werten von κ der Grundzustand ist. Der Abstand $2b$ zwischen den beiden δ -Potentialen muss größer als ein bestimmter Wert sein, um neben dem Grundzustand auch einen angeregten Zustand vorzufinden. Das charakteristische Merkmal dieses Spektrums ist die Existenz von Punkten, an denen mehrere Lösungen gleich werden. Diese Punkte an den Werten $\gamma_{1,2}$ des Nichthermitizitätsparameters werden kritische Punkte genannt. Der Punkt bei γ_1 wird als erster kritischer Punkt und der Punkt bei γ_2 als zweiter kritischer Punkt bezeichnet. Man erkennt, dass ein Teil des Spektrums mit rein reellen Eigenwerten κ existiert. Diese Lösungen besitzen \mathcal{PT} -symmetrische Zustände. Ab dem ersten kritischen Punkt kommen auch Lösungen mit komplexen Eigenwerten und \mathcal{PT} -gebrochenen Zuständen auf. Die komplexen Eigenwerte treten in zueinander komplex konjugierten Paaren auf. Dieser Umstand folgt notwendigerweise

3.4. Bisherige Ergebnisse für eine GPE mit \mathcal{PT} -symmetrischem Doppelmuldenpotential

gerweise aus der \mathcal{PT} -Symmetrie des Potentials, wie im vorhergehenden Kapitel gezeigt wurde. Im linearen Fall mit $g = 0$ fallen die beiden kritischen Punkte zusammen, so dass für jeden Wert von γ die gleiche Anzahl von Lösungen gegeben ist. Bei Erhöhung der Nichtlinearität treten die kritischen Punkte bei kleineren Werten von γ auf. Der Wert $\gamma_1(g)$ des ersten kritischen Punktes verringert sich viel schneller als der Wert $\gamma_2(g)$ des zweiten kritischen Punktes. Die beiden Funktionen $\gamma_i(g)$ wurden in [6] berechnet. Dadurch, dass die kritischen Punkte für Nichtlinearitäten $g \neq 0$ nicht mehr mit der selben Nichthermitizität auftreten, existieren Werte γ mit $\gamma_1(g) \leq \gamma \leq \gamma_2(g)$, bei denen sich die Anzahl an Lösungen verdoppelt. Nach dem zweiten kritischen Punkt verschwinden die \mathcal{PT} -symmetrischen Lösungen zudem abrupt. Wird ein bestimmter Wert der Nichtlinearität überschritten, spalten sich die \mathcal{PT} -gebrochenen Lösungen komplett vom Grundzustand ab und existieren schon für das hermitesche Potential. Das Auftreten der \mathcal{PT} -gebrochenen Lösungen bewirkt zudem, dass der Grundzustand hinter dem ersten kritischen Punkt instabil wird. Dieses Verhalten konnte auf ein Wechselspiel zwischen der Nichtlinearität und der Nichthermitizität zurückgeführt werden [19]. Die nichtanalytische Form der Nichtlinearität ist außerdem der Grund für die Änderung in der Anzahl der Lösungen an den kritischen Punkten. Eine analytische Erweiterung des Betragsquadrats führt zur Erhaltung der Lösungsanzahl in allen Werten von γ , wie im nächsten Kapitel erläutert wird.

Das Doppel- δ -Potential ist eine Idealisierung eines Potentials mit zwei breiteren Potentialmulden. Ein realistisches Potential, das zwei gekoppelte harmonische Fallen beschreibt, wurde in [4, 5] behandelt. Der Grundzustand und der erste angeregte Zustand der Systeme mit diesem Potential weisen qualitativ die gleichen Merkmale bezüglich der kritischen Punkte und Wellenfunktionen auf wie im Fall des Doppel- δ -Potentials. Deshalb sollten die Ergebnisse dieser Arbeit prinzipiell auf ein realistisches Potential übertragbar sein.

4. Kritische Punkte und analytische Funktionen

Das Eigenwertspektrum von nichtlinearen und nichthermiteschen Differentialgleichungen kann bei der Variation bestimmter Parameter des Differentialoperators kritische Punkte enthalten, an denen mehrere Lösungen zusammenfallen. In nichtlinearen Systemen spricht man von einer Bifurkation, während dieses Phänomen in linearen nichthermiteschen Differentialgleichungen als exzeptioneller Punkt bezeichnet wird. Die Stabilitätseigenschaften der Lösungen vor und hinter dem kritischen Punkt können sich unterscheiden. Um das Verhalten eines physikalischen Systems, welches durch eine solche Gleichung beschrieben wird, besser zu verstehen, müssen auch die kritischen Punkte untersucht werden. Um die Art des kritischen Punktes zu bestimmen, kann die entsprechende Gleichung mit einem Minimalbeispiel verglichen werden, das qualitativ gleiche Eigenschaften besitzt. Eine Bifurkation wird vollständig durch die Zahl der Lösungen sowie deren Stabilität charakterisiert. Bei exzeptionellen Punkten spielt dagegen die Vielfachheit der Eigenwerte eine Rolle. Gewöhnlich handelt es sich bei dem zu variierenden Parameter um eine reelle Größe. Ist die Gleichung analytisch, kann man diesen Parameter in die komplexe Ebene erweitern, so dass die Lösungen vor und hinter dem kritischen Punkt auf eindeutige Weise verbunden werden. Dadurch bleibt auch die Zahl der Lösungen vor und hinter dem kritischen Punkt erhalten.

4.1. Analytische Funktionen

Eine Funktion ist analytisch genau dann, wenn sie in ihrem Definitionsbereich durch eine absolut konvergente Potenzreihe dargestellt werden kann. Anhand der Potenzreihe ist ersichtlich, dass solche Funktionen auch beliebig oft differenzierbar sind. Besonders interessant ist dieses Verhalten bei Funktionen deren Definitionsbereich eine Teilmenge der komplexen Zahlen ist. Hier ist Analytizität gleichbedeutend mit komplexer Differenzierbarkeit. Eine einmal komplex differenzierbare Funktion ist beliebig oft differenzierbar. Diese sehr starke Eigenschaft wird als Holomorphie bezeichnet und hat besondere Konsequenzen, die keine Entsprechungen im Reellen besitzen. Die Real- und Imaginärteile einer holomorphen Funktion $f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$ sind auch für sich reell differenzierbar nach dem Real- und Imaginärteil ihrer komplexen Variable $z = x + iy$, wobei die

Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen

$$\begin{aligned}\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} &= \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} \\ \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} &= -\frac{\partial v(x, y)}{\partial x}\end{aligned}\tag{4.1}$$

erfüllt werden. Umgekehrt ist die Funktion holomorph, wenn sie diese Differentialgleichungen erfüllt. Außerdem bleibt Holomorphie, wie bei reeller Differentiation, durch lineare Operationen wie Addition und Multiplikation erhalten.

Eine holomorphe Funktion auf einer offenen und einfach zusammenhängenden Menge ist aufgrund des Cauchyschen Integralsatzes schon allein durch ihre Funktionswerte auf dem Rand bestimmt. Eine wichtige Folge daraus ist der Identitätssatz: Gibt es für zwei holomorphe Funktionen $f(z)$ und $g(z)$ auf einer offenen und zusammenhängenden Menge U einen Häufungspunkt in $\{z \in U \mid f(z) = g(z)\}$, dann gilt $f(z) = g(z)$ auf ganz U . Dadurch lässt sich eine gegebene analytische Funktion auf einer beschränkten Teilmenge der komplexen Zahlen auf eindeutige Weise in den Rest der komplexen Zahlen bis auf die Menge der Singularitäten fortsetzen. Insbesondere hat jede reelle analytische Funktion eine eindeutige komplexe Erweiterung. Es gibt also nur eine komplexe Exponentialfunktion sowie einen komplexen Sinus und Kosinus auf einem bestimmten Definitionsbereich. Dabei können Teile der komplexen Ebene durchaus doppelt in der Definitionsmenge vorkommen. Das ist zum Beispiel der Fall, wenn zwei Funktionen an einem Rand ihrer Definitionsbereiche miteinander verbunden werden können, aber trotzdem einen gemeinsamen Definitionsbereich besitzen, auf dem sich die Funktionswerte unterscheiden. Man sagt, dass die gesamte Funktion auf verschiedenen Riemannschen Blättern der komplexen Ebene existiert, wenn im Definitionsbereich gleiche Zahlen mehrfach vorkommen und der Definitionsbereich selbst eine zusammenhängende Menge darstellt. Somit kann jede holomorphe Funktion auf unendlich viele Riemannsche Blätter fortgesetzt werden, wobei es oft vorkommt, dass sich die Funktionswerte nach $n \in \mathbb{N}$ Blättern wiederholen. Eine solche periodische Funktion ist zum Beispiel die komplexe Wurzel. Andere Funktionen wie der Logarithmus sind auf allen Blättern verschieden.

Der Prozess des Erweiterns kann durch die Potenzreihenentwicklung veranschaulicht werden. Wird die Funktion in einem Punkt entwickelt, so hat sie meistens einen endlichen Konvergenzradius und die Entwicklung gilt nur für eine beschränkte Menge. Eine erneute Entwicklung in einem anderen Punkt dieser Menge wird im Allgemeinen einen anderen Konvergenzradius besitzen, wodurch die bisher erhaltene Definitionsmenge erweitert werden kann. Dadurch kann nach und nach der gesamt mögliche Definitionsbereich der Fortsetzung erschlossen werden.

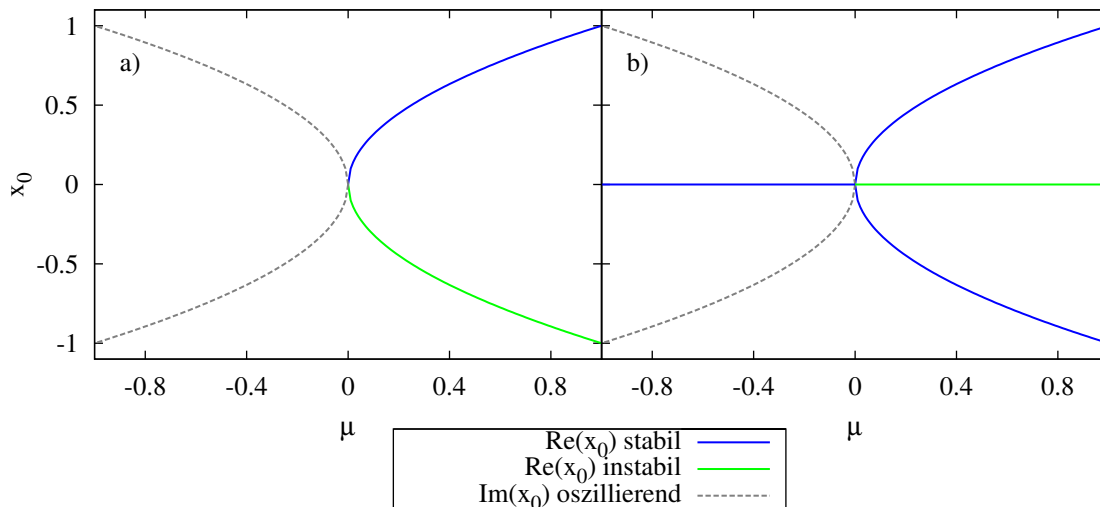


Abbildung 4.1.: Die Bifurkationsdiagramme für die Tangentenbifurkation a) und die Heugabelbifurkation b). Der bedeutendste Unterschied zwischen diesen beiden Fällen zeigt sich im Stabilitätsverhalten der reellen Quadratwurzellösungen. In der Tangentenbifurkation ist nur der positive Zweig stabil, während die Heugabelbifurkation in beiden Zweigen stabil bleibt.

4.2. Bifurkationen

Verschiedene Typen von Bifurkationen sind vollständig über Minimalbeispiele charakterisiert. Solche Minimalbeispiele haben die Form

$$\dot{x} = f(x, \mu). \quad (4.2)$$

Vor allem die stationären Lösungen dieser Gleichung mit $f(x_0, \mu) = 0$ sind von Interesse. Kleine Auslenkungen $x_0 + \delta x$ aus diesen stationären Lösungen geben über deren Stabilität Auskunft. In linearer Näherung lautet die Gleichung für die Auslenkung

$$\delta \dot{x} = \delta x \left. \frac{\partial f(x, \mu)}{\partial x} \right|_{x=x_0} \quad (4.3)$$

und hat Exponentialfunktionen als Lösungen. Bei reellen positiven Werten von $\left. \frac{\partial f(x, \mu)}{\partial x} \right|_{x=x_0}$ führt dies zu einer exponentiellen Verstärkung der Auslenkung und die stationäre Lösung ist instabil. Ist dieser Ausdruck negativ kommt es zu einer exponentiellen Dämpfung der Auslenkung, so dass der Zustand zurück in die stationäre Lösung gebracht wird und stabil bleibt. Imaginäre Werte ergeben schließlich noch zusätzlich eine Oszillation um die stationäre Lösung.

4.2.1. Tangentenbifurkation

Das Minimalbeispiel einer Tangentenbifurkation lautet

$$f(x, \mu) = \mu - x^2 \quad (4.4)$$

und hat die stationären Lösungen

$$x_{\pm} = \pm\sqrt{\mu}. \quad (4.5)$$

Für $\mu > 0$ ergeben sich also rein reelle, für $\mu < 0$ ergeben sich rein imaginäre Lösungen. Die Stabilität der Lösungen folgt mit (4.3) zu

$$\frac{\partial f(x, \mu)}{\partial x} = -2x \quad \Rightarrow \quad \left. \frac{\partial f(x, \mu)}{\partial x} \right|_{x=x_{\pm}} = \mp 2\sqrt{\mu}. \quad (4.6)$$

Man erkennt, dass die stationäre Lösung x_+ stabil und die Lösung x_- instabil ist sofern $\mu > 0$ gilt. Negative μ ergeben in beiden Lösungen ein oszillierendes Verhalten. Das Bifurkationsdiagramm für einen reellen Parameter μ ist in Abbildung 4.1a) aufgetragen.

4.2.2. Heugabelbifurkation

Eine Heugabelbifurkation wird durch das kubische Minimalbeispiel

$$f(x, \mu) = \mu x - x^3 \quad (4.7)$$

beschrieben. Zwei Lösungen stimmen mit denen der Tangentenbifurkation überein. Es kommt eine weitere Lösung hinzu, welche konstant ist. Die stationären Lösungen in diesem Fall lauten also

$$x_{\pm} = \pm\sqrt{\mu}, \quad x_0 = 0. \quad (4.8)$$

Das Stabilitätsverhalten der Lösungen ändert sich allerdings grundlegend

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(x, \mu)}{\partial x} &= \mu - 3x^2 \\ \Rightarrow \quad \left. \frac{\partial f(x, \mu)}{\partial x} \right|_{x=x_{\pm}} &= -2\mu, & \left. \frac{\partial f(x, \mu)}{\partial x} \right|_{x=x_0} &= \mu. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Die Lösung x_0 wechselt am Bifurkationspunkt $\mu = 0$ die Stabilität von stabil auf instabil für steigende Werte von μ , wohingegen beide Lösungen x_{\pm} nun für positive Werte von μ stabil sind. Die beiden Quadratwurzellösungen zeigen auch weiterhin oszillierendes Verhalten für $\mu < 0$. Das Bifurkationsdiagramm für diesen Fall befindet sich in Abbildung 4.1b).

4.2.3. Verhalten bei komplexen Parametern

In beiden Bifurkationstypen kommt die Quadratwurzelfunktion als stationäre Lösung vor. Für komplexe Parameter $\mu = |\mu| e^{i\phi}$ existieren immer zwei unterschiedliche Lösungen auf verschiedenen Riemannschen Blättern

$$x_1 = \sqrt{|\mu|} e^{i\frac{\phi}{2}}, \quad x_2 = \sqrt{|\mu|} e^{i\frac{\phi+2\pi}{2}} = -x_1. \quad (4.10)$$

Die verschiedenen Lösungen x_{\pm} hängen also durch eine komplexe Funktion zusammen. Die bei der Heugabelbifurkation hinzukommende konstante Lösung ist auch für alle komplexen Parameter konstant. Die Lösungen x_{\pm} und x_0 können nicht durch eine analytische Funktion miteinander verbunden werden. Gemäß dem in Abschnitt 4.1 vorgestellten Identitätssatz müsste es einen Häufungspunkt in der Menge $\{\mu \in \mathbb{C} \mid \sqrt{\mu} = 0\}$ geben, um eine analytische Fortsetzung von einer Lösung zur anderen zu ermöglichen. Da jede Wurzelfunktion nur im Ursprung verschwindet, hat diese Menge nur die 0 als Element und es wird unmöglich die beiden Lösungen analytisch zu verbinden.

4.3. Exzeptionelle Punkte

Hermiteische Operatoren sind gemäß dem Spektralsatz immer diagonalisierbar. Ein nicht-hermitescher Operator erfüllt diese Eigenschaft im Allgemeinen nicht. Trotzdem existieren eindeutige Darstellungen durch Normalformen sofern die Operatoren innerhalb der komplexen Zahlen dargestellt werden. Die algebraischen und geometrischen Vielfachheiten der Eigenwerte müssen nicht mehr übereinstimmen, weshalb eine Zerlegung des Vektorraums in Eigenräume nicht mehr garantiert ist. Ein Eigenraum des Operators A zu einem seiner Eigenwerte λ ist

$$\ker(A - \lambda I), \quad (4.11)$$

wobei der Kern eines Operators der Unterraum aller Vektoren ist, bei denen die Anwendung des Operators den Nullvektor ergibt. Eine Verallgemeinerung des Eigenraums ist der Hauptraum

$$\ker(A - \lambda I)^{\nu_\lambda} \quad (4.12)$$

mit der algebraischen Vielfachheit ν_λ des Eigenwerts. Zu jedem Eigenvektor existiert ein A -invarianter Unterraum des zugehörigen Hauptraums. Die Zerlegung des Hauptraums in diese Unterräume sowie die Zerlegung des Vektorraums in alle Haupträume des Operators ist eindeutig. Eine mögliche Matrixdarstellung eines solchen nichtdiagonalisierbaren Operators ist die Jordannormalform. Jedem Unterraum zu einem Eigenvektor entspricht ein Jordanblock der Art

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & \\ & \lambda & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda & 1 \\ & & & & \lambda \end{pmatrix}, \quad (4.13)$$

so dass die gesamte Matrix als Blockdiagonalmatrix mit Jordanblöcken erscheint. Die Summe der Dimensionen jedes einzelnen Jordanblocks zu einem Eigenwert ergibt schließlich die Dimension des Hauptraums.

Als Minimalbeispiel für exzeptionelle Punkte wird eine zunächst diagonalisierbare Matrix betrachtet, bei der ein Parameter variiert werden kann. Für einen bestimmten Wert dieses Parameters soll mindestens einer der Haupträume nicht mehr mit dem zugehörigen Eigenraum übereinstimmen oder verschiedene Eigenräume in einen einzigen Hauptraum übergehen. Dadurch fallen mindestens zwei der zuvor verschiedenen Eigenvektoren zusammen und die Matrix wird in diesem exzeptionellen Punkt auch nicht mehr diagonalisierbar. Das ist zum Beispiel für die Matrix

$$\begin{pmatrix} \mu & 1 \\ k & \mu \end{pmatrix} \quad (4.14)$$

mit den Eigenwerten $\lambda_{\pm} = \pm\sqrt{k} + \mu$ der Fall. Für $k \neq 0$ bleibt die Matrix diagonalisierbar und wird für den exzeptionellen Punkt $k = 0$ zu einem zweidimensionalen Jordanblock des entarteten Eigenwerts μ . Dadurch, dass zwei Eigenwerte in einen einzigen übergehen spricht man von einem EP2. Wie bei der Bifurkation hängen beide Lösungen über den Parameter k aufgrund der Wurzel im Eigenwert zusammen. Die Variation dieses Parameters in der komplexen Ebene lässt beide Lösungen ineinander übergehen.

Überträgt man dieses Beispiel auf einen dreidimensionalen Jordanblock, muss darauf geachtet werden, in welchem Eintrag der Parameter steht. Eine Matrix der Form

$$\begin{pmatrix} \mu & 1 & 0 \\ k & \mu & 1 \\ l & k & \mu \end{pmatrix} \quad (4.15)$$

hat das charakteristische Polynom

$$\chi(\lambda) = (\mu - \lambda) ((\mu - \lambda)^2 - 2k) + l. \quad (4.16)$$

Der exzeptionelle Punkt wird für $k = l = 0$ angenommen. Dieser kann jedoch durch das Zusammenführen von entweder zwei oder drei Zuständen erreicht werden. Ist $l = 0$, erkennt man anhand von (4.16), dass einer der Eigenwerte schon mit dem Eigenwert des Jordanblocks übereinstimmt. Nur die anderen beiden Eigenwerte sind mit $\lambda_{\pm} = \pm\sqrt{2k} + \mu$ davon verschieden. Dieser Fall ist also analog zur zweidimensionalen Matrix, da nur zwei der Eigenwerte über die Quadratwurzelfunktion miteinander zusammenhängen. Deswegen wird ein solcher exzeptioneller Punkt als EP3,2 bezeichnet. Ist hingegen $k = 0$, so sind alle drei Eigenwerte verschieden vom Eigenwert des Jordanblocks mit $\lambda_n = \sqrt[3]{|l|} e^{i\frac{2\pi n}{3}} + \mu$. Demnach sind drei verschiedene Zustände im exzeptionellen Punkt miteinander verbunden und gehen bei stetiger Variation des Parameters l im komplexen Raum zyklisch ineinander über. Dieser exzeptionelle Punkt wird EP3,3 genannt.

Allgemein wird ein exzeptioneller Punkt als EPN,M bezeichnet wenn der Unterraum zum entsprechenden Eigenvektor die Dimension N hat und M verschiedene Zustände in der Umgebung des Punktes von diesem abspalten.

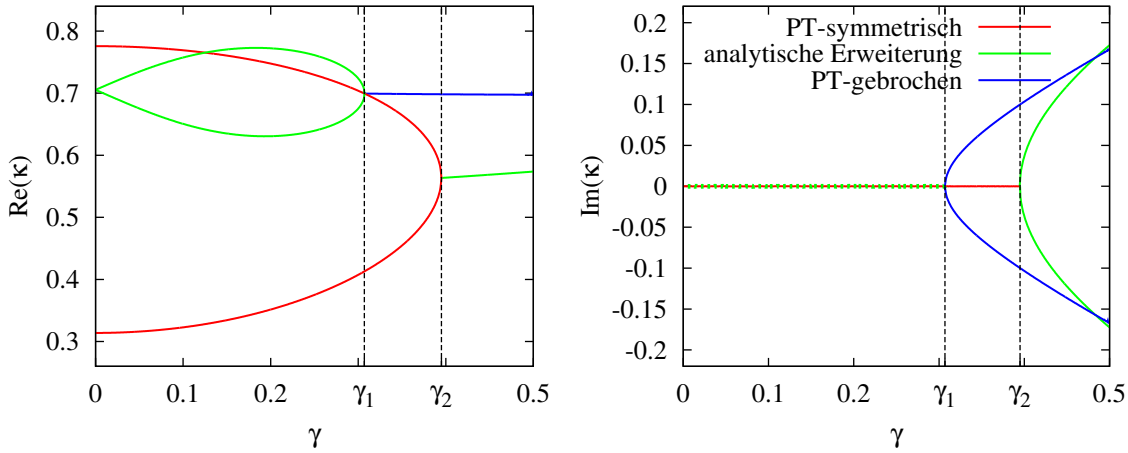


Abbildung 4.2.: Spektrum der analytisch erweiterten GPE mit Doppel- δ -Potential bei $g = 1.0$. Durch die analytische Erweiterung des Betragsquadrats werden die zuvor abgebrochenen Lösungen an den kritischen Punkten stetig fortgesetzt. Die Zahl der Lösungen bleibt dadurch für jede Parameterwahl erhalten.

4.4. Bedeutung für die Gross-Pitaevskii Gleichung mit \mathcal{PT} -symmetrischem Potential

Die Nichtlinearität der GPE ist keine analytische Funktion. Dies lässt sich leicht anhand der Cauchy-Riemanschen Differentialgleichungen (4.1) einsehen. Für die komplexe Konjugation $i \rightarrow -i$ einer komplexen Zahl $z = x + iy$ gilt nämlich

$$\frac{\partial x}{\partial x} = -\frac{\partial y}{\partial y}. \quad (4.17)$$

Das verletzt die erste Cauchy-Riemansche Differentialgleichung, weshalb die komplexe Konjugation keine holomorphe Funktion ist. Die Nichtlinearität der GPE hat die Form $|\psi|^2 = \psi\psi^*$ mit der komplexen Wellenfunktion ψ . Da die komplexe Konjugation im Betragsquadrat enthalten ist, kann das Betragsquadrat also keine analytische Funktion sein.

Um eine vollständige Untersuchung der mathematischen Struktur der GPE mit den in diesem Kapitel vorgestellten Methoden zu ermöglichen, muss das Betragsquadrat durch eine analytische Funktion ersetzt werden. Dies wird im nächsten Kapitel durchgeführt. Das Spektrum der GPE mit analytischer Erweiterung mit Doppel- δ -Potential ist in Abbildung 4.2 gezeigt. Bisherige Untersuchungen der analytisch erweiterten GPE mit \mathcal{PT} -symmetrischem Potential [4, 5, 8] konnten zeigen, dass der erste kritische Punkt ein EP3 und der zweite kritische Punkt ein EP2 ist.

5. Analytische Fortsetzung der Gross-Pitaevskii-Gleichung

Die Nichtlinearität der Gross-Pitaevskii-Gleichung mit kurzreichweitiger Wechselwirkung besteht aus dem Betragsquadrat der Wellenfunktion. Da das Betragsquadrat allerdings keine analytische Funktion im Körper der komplexen Zahlen ist, kann a priori nicht gesagt werden, wie viele Lösungen für jedes Tupel (g, γ) der Parameter für die Stärke der Nichtlinearität und des komplexen Potentials vorhanden sind. Tatsächlich stellt sich heraus, dass eine Variation des Nichtlinearitätsparameters g die kritischen Punkte bei anderen Werten von γ erscheinen lässt, so dass sich die Zahl der Lösungen innerhalb von einem bestimmten Parameterbereich verdoppelt. Die doppelte Anzahl an Lösungen existiert dann für ein festes g bei Nichtthermitizitäten γ im Bereich von $\gamma_1(g) \leq \gamma \leq \gamma_2(g)$, wobei die kritischen Punkte bei den Parametern $\gamma_i(g)$ auftreten.

5.1. Analytische Fortsetzung

Durch eine analytische Fortsetzung der Nichtlinearität bleibt die Anzahl der Lösungen für alle Parametertupel erhalten. Im Folgenden werden zwei Möglichkeiten einer analytischen Erweiterung vorgestellt und in Verbindung gebracht.

5.1.1. Bikomplexe Zahlen

Der allgemeinste Ansatz einer Erweiterung, bei der die Anzahl der Lösungen für jede Parameterwahl erhalten bleibt, ist der Übergang in eine allgemeinere algebraische Struktur. Für das betrachtete Problem bietet sich die Wahl von bikomplexen Zahlen an. Bikomplexe Zahlen sind wie die Quaternionen eine Verallgemeinerung der komplexen Zahlen und sind Teil der hyperkomplexen Zahlen. Hyperkomplexe Zahlen werden durch die Einführung neuer imaginärer Einheiten konstruiert. Dabei wird mindestens eine der Körpereigenschaften der komplexen Zahlen nicht mehr erfüllt. Bei den Quaternionen gilt die Kommutativität der multiplikativen Gruppe nicht mehr. In den bikomplexen Zahlen gibt es dagegen nicht mehr für jedes Element der multiplikativen Gruppe ein inverses Element. Die restlichen Körpereigenschaften gelten trotzdem. Ein Beweis dazu, sowie zu anderen Eigenschaften, die in diesem Abschnitt vorgestellt werden, befindet sich im Anhang A. Eine anschauliche Einführung der bikomplexen Zahlen geschieht durch die Ersetzung des Real- und Imaginärteils einer komplexen Zahl mit imaginärer Einheit i

durch neue komplexe Zahlen mit einer von i unabhängigen imaginären Einheit j . Dies lässt sich für die neuen reellen Komponenten der bikomplexen Zahl fortsetzen, so dass weitere Strukturen in den hyperkomplexen Zahlen mit ähnlichen Eigenschaften konstruiert werden.

Sei $z = \chi + i\xi$ eine komplexe Zahl mit imaginärer Einheit i . Durch die Einführung von neuen komplexen Zahlen $\chi = x + jv$, $\xi = y + jw$ ergibt sich die bikomplexe Zahl

$$z = (x + jv) + i(y + jw) = x + iy + jv + kw, \quad (5.1)$$

wenn die Abkürzung $k = ij$ verwendet wird. Die Eigenschaften von k folgen aus den Eigenschaften von i und j eindeutig, wenn für jede neu eingeführte imaginäre Einheit $i^2 = j^2 = -1$ verlangt wird. Demnach gilt

$$k^2 = i^2 j^2 = (-1)(-1) = 1. \quad (5.2)$$

Die Addition und Multiplikation sind durch diese Eigenschaften vollständig festgelegt. Die Neutralen Elemente der Addition und Multiplikation bleiben auch weiterhin eindeutig 0 und 1. Ob sich grundlegende Funktionen der komplexen Zahlen auch in die bikomplexen Zahlen übertragen, wird hier nur für die komplexe Konjugation behandelt. Die komplexe Konjugation zeichnet sich durch die Operation $i \rightarrow -i$ aus. Es ist natürlich ebenfalls möglich, die komplexe Konjugation in der imaginären Einheit j auszuführen. Für eine bikomplexe Zahl gibt es dadurch drei verschiedene Möglichkeiten der komplexen Konjugation:

$$i : \quad z^* = x - iy + jv - kw, \quad (5.3a)$$

$$j : \quad \bar{z} = x + iy - jv - kw, \quad (5.3b)$$

$$i + j : \quad \bar{z}^* = x - iy - jv + kw. \quad (5.3c)$$

Die Multiplikation einer bikomplexen Zahl mit einer zu ihr konjugierten Zahl projiziert die Zahl in eine der drei komplexen Ebenen. Bei Konjugation der primären imaginären Einheiten i und j wird die Zahl in die Ebene des jeweils anderen Elements gebracht, während die Konjugation in beiden imaginären Einheiten die Zahl in die $(1, k)$ Ebene bringt:

$$zz^* = (x^2 + y^2 - v^2 - w^2) + 2j(xv - yw), \quad (5.4a)$$

$$z\bar{z} = (x^2 - y^2 + v^2 - w^2) + 2i(xy - vw), \quad (5.4b)$$

$$z\bar{z}^* = (x^2 - y^2 - v^2 + w^2) + 2k(xw - yv). \quad (5.4c)$$

Da es sich jetzt nur noch um komplexe Zahlen handelt, führt eine weitere Multiplikation mit einer, in der verbleibenden imaginären Einheit konjugierten, Zahl zu einem reellen Wert. Insgesamt wird die Projektion der bikomplexen Zahl auf die reelle Achse durch das Produkt der Zahl mit allen dazu konjugierten Zahlen erreicht. Dieses Produkt kann

allerdings auf verschiedene Arten dargestellt werden:

$$\begin{aligned} zz^* \overline{zz^*} &= (x^2 + y^2 - v^2 - w^2)^2 + 4(xv - yw)^2 \\ &= (x^2 - y^2 + v^2 - w^2)^2 + 4(xy - vw)^2 \\ &= (x^2 - y^2 - v^2 + w^2)^2 + 4(xw - yv)^2, \end{aligned} \quad (5.5)$$

wobei noch andere Möglichkeiten verbleiben. Zwar ist die Konstruktion dieses Produkts analog zur komplexen Norm, jedoch hat diese Funktion auch Nullstellen, die von 0 verschieden sind. Dadurch ist diese Funktion nur positiv semidefinit, wodurch sie sich nicht als Norm eignet. Es haben im Übrigen genau diejenigen bikomplexen Zahlen kein inverses Element, für die dieser Ausdruck Null wird, wie im Anhang A gezeigt wird.

Eine erstaunliche Eigenschaft der bikomplexen Zahlen ist die Existenz von idempotenten Elementen. Eine Idempotente ist ein Element $a \in G$ einer Gruppe G , das bei Anwendung der Gruppenverknüpfungen $\bullet(., .)$ auf sich selbst gleich bleibt gemäß $a \bullet a = a$. Das neutrale Element ist eine ausgezeichnete Idempotente. Die neu hinzukommenden Idempotenten beruhen auf der Eigenschaft $k^2 = 1$ der zusammengesetzten imaginären Einheit und ergeben sich als

$$e_{\pm} = \frac{1 \pm k}{2}, \quad (5.6)$$

wie durch einfaches Nachrechnen gezeigt werden kann. Diese Zahlen besitzen neben $e_{\pm}^2 = e_{\pm}$ auch weitere besondere Eigenschaften

$$e_+ + e_- = 1, \quad e_+ - e_- = k, \quad e_+ e_- = 0. \quad (5.7)$$

Anhand der letzten dieser drei Eigenschaften erkennt man auch, dass die bikomplexen Zahlen nicht nullteilerfrei sind. Jede bikomplexe Zahl kann in der Basis der idempotenten Zahlen e_{\pm} eindeutig in komplexen Komponenten dargestellt werden. Die Zerlegung der Zahl $z = z_+ e_+ + z_- e_-$ in zwei Komponenten kann, je nach imaginärer Einheit, auf zwei verschiedene Arten erfolgen. In der Darstellung $z = z_r + iz_i + jz_j + kz_k$ ergibt sich

$$z_+ = (z_r + z_k) + i(z_i - z_j) = (z_r + z_k) + j(z_j - z_i), \quad (5.8a)$$

$$z_- = (z_r - z_k) + i(z_i + z_j) = (z_r - z_k) + j(z_j + z_i), \quad (5.8b)$$

wodurch sich die Formulierung in verschiedenen imaginären Einheiten nur durch komplexe Konjugation in der z_+ Komponente unterscheidet. Betrachtet man die Summe und das Produkt zweier bikomplexer Zahlen a und b in dieser Basis, stellt sich aufgrund der Idempotenz und der letzten Eigenschaft in (5.7) heraus, dass die Operationen effektiv nur in den komplexen Komponenten wirken

$$a + b = (a_+ + b_+)e_+ + (a_- + b_-)e_- \quad (5.9a)$$

$$ab = a_+ b_+ e_+ + a_- b_- e_- \quad (5.9b)$$

Solange nur Operationen betrachtet werden, die sich nur aus Addition und Multiplikation zusammensetzen, reicht es also aus, nur die komplexen Komponenten der bikomplexen Zahlen zu betrachten.

5.1.2. Fortsetzung mithilfe von bikomplexen Zahlen

Mit den Ergebnissen des letzten Abschnitts wird die komplexe GPE mit Wellenfunktionen $\psi = \psi_r + i\psi_i$ und Eigenwerten $\mu = \mu_r + i\mu_i$,

$$(-\Delta + V + g(\psi_r^2 + \psi_i^2))\psi = \mu\psi, \quad (5.10)$$

zu der bikomplexen GPE mit bikomplexen Wellenfunktionen $\psi = \psi_r + i\psi_i + j\psi_j + k\psi_k$ und entsprechenden bikomplexen Eigenwerten $\mu = \mu_r + i\mu_i + j\mu_j + k\mu_k$,

$$(-\Delta + V + g((\psi_r + j\psi_j)^2 + (\psi_i + j\psi_k)^2))\psi = \mu\psi. \quad (5.11)$$

Die bikomplexe GPE kann auch durch die Aufteilung in ein Gleichungssystem mit zwei komplexen oder vier reellen Gleichungen gelöst werden. Mit der Aufteilung in komplexe Komponenten erfolgte die Lösung in [4, 5, 8]. Die Annahme bezüglich der Erhaltung von Lösungen wurde dadurch bestätigt. Es ergeben sich zwei weitere Lösungen vor γ_1 sowie nach γ_2 . Außerdem konnte der zweite kritische Punkt als reiner EP2 identifiziert werden, während sich sowohl Eigenschaften eines EP3,2 als auch eines EP3,3 im ersten kritischen Punkt zeigen.

Eine andere Möglichkeit, Gleichung (5.11) in ein Gleichungssystem umzuwandeln, ist die Darstellung in der idempotenten Basis $e_{\pm} = \frac{1}{2}(1 \pm k)$ mit den Komponenten a_{\pm} der bikomplexen Zahl. Die Herleitung erfolgt am einfachsten, wenn das Betragsquadrat als Produkt der Wellenfunktion mit der zugehörigen komplex konjugierten Wellenfunktion betrachtet wird. Es ist zu beachten, dass die ursprüngliche komplexe Konjugation nur auf die ursprüngliche imaginäre Einheit wirkt. Da aber $k = ij$ gilt, wird auch das Vorzeichen der imaginären Einheit k umgedreht und die idempotenten Zahlen e_{\pm} wandeln sich ineinander um. Dadurch ergibt sich

$$\psi^* = (\psi_+e_+ + \psi_-e_-)^* = \psi_+^*e_- + \psi_-^*e_+. \quad (5.12)$$

Ob die Konjugation letztlich auf die Komponenten selbst wirkt, hängt also davon ab, welche imaginäre Einheit für deren Darstellung gewählt wird. Allgemein lauten die Komponenten der GPE in idempotenter Basis also

$$(-\Delta + V_- + g\psi_- \psi_+^*)\psi_- = \mu_- \psi_-, \quad (5.13a)$$

$$(-\Delta + V_+ + g\psi_+ \psi_-^*)\psi_+ = \mu_+ \psi_+. \quad (5.13b)$$

5.1.3. Fortsetzung durch \mathcal{PT} -Konjugation

Die zweite Möglichkeit einer analytischen Fortsetzung kommt ohne Erweiterung auf bikomplexe Zahlen aus. Ziel ist es, eine analytische Funktion auf dem gesamten Parameterraum zu finden, welche die bereits bestehenden Lösungen enthält. Ein möglicher Ansatz besteht darin, die komplexe Konjugation im Betragsquadrat durch Anwendung des \mathcal{PT} -Operators zu ersetzen. Es gilt nämlich

$$\psi^*(x) = \mathcal{PT}\psi(-x), \quad (5.14)$$

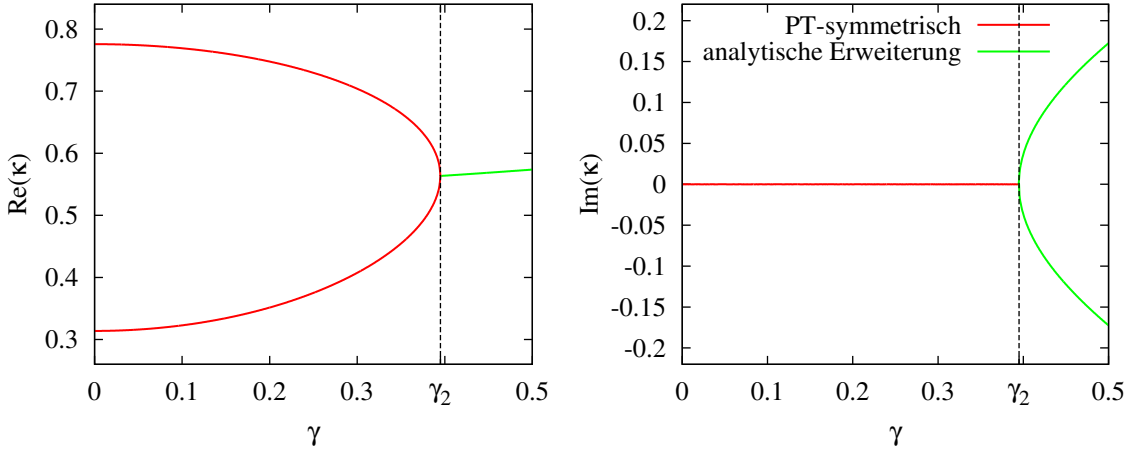


Abbildung 5.1.: Spektrum der GPE mit Doppel- δ -Potential und analytischer Ersetzung $|\psi(x)|^2 \rightarrow \psi(x)\psi(-x)$ bei $g = 1.0$. Mit dieser Art der analytischen Erweiterung verschwinden die \mathcal{PT} -gebrochenen Lösungen komplett.

wodurch die Ersetzung des Betragsquadrats durch eine analytische Funktion möglich wird. Diese lautet

$$|\psi(x)|^2 = \psi(x)\psi^*(x) \quad \longrightarrow \quad \psi(x)\mathcal{PT}\psi(-x) \quad (5.15)$$

und ergibt bei \mathcal{PT} -symmetrischen Funktionen mit geeigneter Wahl der globalen Phase $\psi(x)\mathcal{PT}\psi(-x) = \psi(x)\psi(-x)$. Diese Ersetzung wurde bereits in [4, 5] mit einem \mathcal{PT} -symmetrischem Doppelmuldenpotential behandelt und hat die ursprünglichen \mathcal{PT} -symmetrischen Zustände sowie neue Zustände hinter dem zweiten kritischen Punkt γ_2 als Lösung. Das wird in Abbildung 5.1 für den Fall $g = 1.0$ mit dem \mathcal{PT} -symmetrischen Doppel- δ Potential dargestellt. Die \mathcal{PT} -gebrochenen Lösungen der ursprünglichen GPE verschwinden dabei. Die Wellenfunktionen dieser Lösungen erfüllen eine andere Symmetrie bezüglich des \mathcal{PT} -Operators. Wenn ψ_1 die Wellenfunktion eines \mathcal{PT} -gebrochenen Zustandes mit Eigenwert μ ist und ψ_2 die Wellenfunktion des Zustandes zu dem Eigenwert μ^* ist, gilt die Beziehung

$$\psi_1(x) = \mathcal{PT}\psi_2(x) \quad (5.16)$$

für die beiden Zustände. Eine Erweiterung mit der Ersetzung (5.15) würde für diese beiden Zustände

$$|\psi_1|^2 \quad \longrightarrow \quad \psi_1(x)\psi_2(-x) \quad (5.17)$$

lauten. Die Hauptaufgabe dieser Arbeit, ist zu untersuchen, ob diese Ersetzung auch die Zustände der bikomplexen analytischen Erweiterung vor dem ersten kritischen Punkt ergibt. Um dies zu gewährleisten, müssen zwei Lösungen gleichzeitig berechnet werden.

Hierzu wird das gekoppelte Gleichungssystem

$$(-\Delta + V(x) + g\psi_1(x)\psi_2(-x))\psi_1(x) = \mu_1\psi_1(x) \quad (5.18a)$$

$$(-\Delta + V(-x) + g\psi_1(x)\psi_2(-x))\psi_2(-x) = \mu_2\psi_2(-x) \quad (5.18b)$$

betrachtet. Eine Lösung dieses Gleichungssystems erfolgt numerisch, wie in Abschnitt 5.2.1 beschrieben wird.

5.1.4. \mathcal{PT} -konjugierte bikomplexe GPE

Das Gleichungssystem (5.18) weist Ähnlichkeiten mit der bikomplexen GPE in idempotenter Basis (5.13) auf. Um einen Zusammenhang zwischen den beiden Gleichungssystemen herzustellen, sind einige Vorüberlegungen notwendig, die eine systematische und präzise Herleitung erlauben:

- Bei der Anwendung des \mathcal{PT} -Operators in den bikomplexen Zahlen muss unterschieden werden, auf welche imaginäre Einheit die komplexe Konjugation wirkt. Dies wird durch die Notation \mathcal{PT}^ξ gewährleistet, wobei $\xi \in \{i, j, i + j\}$ die imaginäre Einheit bezeichnet, auf welche die komplexe Konjugation wirkt. Bei Anwendung der verschiedenen \mathcal{PT}^ξ -Operatoren auf eine Wellenfunktion $\psi_1 = \psi_{1+}e_+ + \psi_{1-}e_-$ ergibt sich

$$\mathcal{PT}^\xi\psi_1(x) = \begin{cases} \psi_{1-}^*(-x)e_+ + \psi_{1+}^*(-x)e_-, & \xi = i, \\ \bar{\psi}_{1-}(-x)e_+ + \bar{\psi}_{1+}(-x)e_-, & \xi = j, \\ \bar{\psi}_{1+}^*(-x)e_+ + \bar{\psi}_{1-}^*(-x)e_-, & \xi = i + j. \end{cases} \quad (5.19)$$

In den Fällen $\xi = i$ und $\xi = j$ kann die Wellenfunktion ψ_1 mit anderen Wellenfunktionen ψ_2 und ψ_3 identifiziert werden gemäß

$$\mathcal{PT}^i\psi_1(x) = \psi_2(x), \quad \psi_{2+}(x) = \psi_{1-}^*(-x), \quad \psi_{2-}(x) = \psi_{1+}^*(-x), \quad (5.20)$$

$$\mathcal{PT}^j\psi_1(x) = \psi_3(x), \quad \psi_{3+}(x) = \bar{\psi}_{1-}(-x), \quad \psi_{3-}(x) = \bar{\psi}_{1+}(-x). \quad (5.21)$$

Dies hat nur den Zweck einer übersichtlicheren Darstellung der weiter unten hergeleiteten Gleichungssysteme. Es werden dadurch keine neuen Wellenfunktionen eingeführt. Anhand von (5.19) besteht zwischen ψ_2 und ψ_3 die Beziehung

$$\psi_2 = \bar{\psi}_3^*. \quad (5.22)$$

Es ist eine weitere Art der \mathcal{PT} -Konjugation möglich. Der Operator \mathcal{PT}^{i+j} wird hier als $\mathcal{PT}^i\mathcal{T}^j$ aufgefasst. Es besteht allerdings auch die Möglichkeit einer Konjugation mit

$$\tilde{\mathcal{PT}}^{i+j} = \mathcal{PT}^i\mathcal{PT}^j = \mathcal{PT}^j\mathcal{PT}^i = \mathcal{T}^i\mathcal{T}^j. \quad (5.23)$$

Dieser Fall wird im Zusammenhang mit den einfachen Konjugationen \mathcal{PT}^i und \mathcal{PT}^j diskutiert.

- Die Darstellungen der ψ_{\pm} Komponenten mit den imaginären Einheiten i und j beschreiben in der e_{\pm} -Basis die gleiche Wellenfunktion ψ . Die Beschreibung des gesamten Gleichungssystems in jeweils einer Darstellung ist äquivalent zur Beschreibung des Gleichungssystems in der anderen Darstellung. Das heißt eine Lösung der Gleichung in einer Darstellung muss auch in der anderen Darstellung vorkommen und umgekehrt. Deshalb macht es im Endeffekt keinen Unterschied, mit welcher imaginären Einheit die Gleichungen selbst betrachtet werden. Um dies zu verdeutlichen und zur besseren Übersicht in den später hergeleiteten Gleichungen werden Darstellungsfunktionen

$$\mathcal{D}^i : \quad \mathbb{C}^i \longrightarrow \mathbb{C}^{\iota}, \quad z_{\pm} = x_{\pm}^i + iy_{\pm}^i \mapsto x_{\pm}^i + \iota y_{\pm}^i, \quad (5.24a)$$

$$\mathcal{D}^j : \quad \mathbb{C}^j \longrightarrow \mathbb{C}^{\iota}, \quad z_{\pm} = x_{\pm}^j + jy_{\pm}^j \mapsto x_{\pm}^j + \iota y_{\pm}^j \quad (5.24b)$$

eingeführt, welche die imaginäre Einheit in der jeweiligen Darstellung auf eine neue imaginäre Einheit ι abbilden. Durch die neue imaginäre Einheit werden die beiden Darstellungen durch eine gemeinsame komplexe Zahlenmenge verknüpft. Zugleich wird dadurch die Unterscheidung zwischen verschiedenen komplexen Konjugationen durch eine neue Konjugation

$$(x + \iota y)^{\bullet} = (x - \iota y) \quad (5.25)$$

aufgehoben. Das Einzige, was bei der Anwendung der Darstellungsfunktionen beachtet werden muss, ist der Unterschied zwischen den z_{+} -Komponenten einer bikomplexen Zahl z in den verschiedenen Darstellungen mit $\mathcal{D}^i(z_{+}) = \mathcal{D}^j(z_{+})^{\bullet}$. Wegen der Äquivalenz beider Darstellungen beschreibt dieser Zusammenhang eine Symmetrie jeder komplexen Gleichung, die wie die bikomplexe GPE mit den bikomplexen Zahlen verbunden ist. Wenn eine Lösung $\mathcal{D}^i(\psi_{+})$ vorkommt, muss auch die komplex konjugierte Lösung $\mathcal{D}^j(\psi_{+})^{\bullet}$ in irgendeiner Weise vorkommen.

- Es werden nur komplexe \mathcal{PT} -symmetrische Potentiale $V = V_r + iV_i$ betrachtet, so dass $V(x) = V^*(-x)$ vorausgesetzt werden kann. Wird das Potential in der idempotenten Basis dargestellt, gelten für Darstellungen mit den imaginären Einheiten i und j die Beziehungen

$$\mathcal{D}^i(V_{-}) = V_r + \iota V_i, \quad \mathcal{D}^i(V_{+}) = V_r + \iota V_i, \quad \longrightarrow \quad \mathcal{D}^i(V_{-}) = \mathcal{D}^i(V_{+}), \quad (5.26a)$$

$$\mathcal{D}^j(V_{-}) = V_r + \iota V_i, \quad \mathcal{D}^j(V_{+}) = V_r - \iota V_i, \quad \longrightarrow \quad \mathcal{D}^j(V_{-}) = \mathcal{D}^j(V_{+})^{\bullet}, \quad (5.26b)$$

wobei \mathcal{D}^i und \mathcal{D}^j die Darstellungsfunktionen (5.24) sind. Dadurch wird die \mathcal{PT} -Symmetrie des Potentials unabhängig von der jeweiligen Darstellung. Um die Gleichung für negative x -Richtung aufzustellen, muss die \mathcal{PT} -Symmetrie durch

$$\mathcal{D}^i(V_{\pm}(x)) = \mathcal{D}^i(V_{\pm}(-x))^{\bullet} \quad \text{und} \quad \mathcal{D}^j(V_{\pm}(x)) = \mathcal{D}^j(V_{\pm}(-x))^{\bullet} \quad (5.27)$$

ausgenutzt werden. Bevor eine der beiden Darstellungen ausgewählt wird, kann die Ortsspiegelung des Potentials durch $V_{\pm}(x) = \bar{V}_{\pm}^*(-x)$ in der Gleichung (5.13)

	V_-	\bar{V}_+^*	V_+	\bar{V}_-^*
\mathcal{D}^i	V	V^\bullet	V	V^\bullet
\mathcal{D}^j	V	V	V^\bullet	V^\bullet

Tabelle 5.1.: Durch die Darstellungsfunktionen \mathcal{D}^i und \mathcal{D}^j (5.24) werden die Komponenten V_\pm des \mathcal{PT} -symmetrischen Potentials V aus den i - und j -Darstellungen in eine gemeinsame komplexe Zahlenmenge mit der imaginären Einheit ι und komplexen Konjugation \bullet gebracht. Alle Ergebnisse sind für die Gleichungen in diesem Abschnitt relevant.

berücksichtigt werden. Dadurch ändert sich nichts am Ergebnis, wenn eine der beiden Darstellungen gewählt wird:

$$\mathcal{D}^i(\bar{V}_\pm^*(-x)) = \mathcal{D}^i(V_\pm(-x))^\bullet, \quad \mathcal{D}^j(\bar{V}_\pm^*(-x)) = \mathcal{D}^j(V_\pm(-x))^\bullet. \quad (5.28)$$

Zur besseren Übersicht werden diese Beziehungen für die relevanten Fälle noch einmal in Tabelle 5.1 aufgeführt.

Unter Berücksichtigung dieser drei Punkte kann das Gleichungssystem in der idempotenten Basis (5.13) nun mit der \mathcal{PT}^ξ -Konjugation betrachtet werden. Dabei kann sowohl ψ_{1+} als auch ψ_{1-} durch den \mathcal{PT}^ξ -Operator umgeformt werden. Im Folgenden werden beide Fälle berücksichtigt. Zunächst sollen nur die \mathcal{PT}^i - und \mathcal{PT}^j -Konjugationen ohne Festlegung auf eine Darstellung betrachtet werden:

Ersetzung mit $\mathcal{PT}^i\psi_{1+}(x) = \psi_{2-}(x)$

$$(-\Delta + V_-(x) + g\psi_{1-}(x)\psi_{2-}(-x))\psi_{1-}(x) = \mu_-\psi_{1-}(x) \quad (5.29a)$$

$$\left(-\Delta + \bar{V}_+^*(-x) + g\psi_{2-}^*(-x)\psi_{1-}^*(x)\right)\psi_{2-}^*(-x) = \mu_+\psi_{2-}^*(-x) \quad (5.29b)$$

Ersetzung mit $\mathcal{PT}^i\psi_{1-}(x) = \psi_{2+}(x)$

$$\left(-\Delta + \bar{V}_-^*(-x) + g\psi_{2+}^*(-x)\psi_{1+}^*(x)\right)\psi_{2+}^*(-x) = \mu_-\psi_{2+}^*(-x) \quad (5.30a)$$

$$(-\Delta + V_+(x) + g\psi_{1+}(x)\psi_{2+}(-x))\psi_{1+}(x) = \mu_+\psi_{1+}(x) \quad (5.30b)$$

Ersetzung mit $\mathcal{PT}^j\psi_{1+}(x) = \psi_{3-}(x)$

$$\left(-\Delta + V_-(x) + g\psi_{1-}(x)\bar{\psi}_{3-}^*(-x)\right)\psi_{1-}(x) = \mu_-\psi_{1-}(x) \quad (5.31a)$$

$$\left(-\Delta + \bar{V}_+^*(-x) + g\bar{\psi}_{3-}(-x)\psi_{1-}^*(x)\right)\bar{\psi}_{3-}(-x) = \mu_+\bar{\psi}_{3-}(-x) \quad (5.31b)$$

Ersetzung mit $\mathcal{PT}^j \psi_{1-}(x) = \psi_{3+}(x)$

$$\left(-\Delta + \bar{V}_-^*(-x) + g\bar{\psi}_{3+}(-x)\psi_{1+}^*(x)\right)\bar{\psi}_{3+}(-x) = \mu_- \bar{\psi}_{3+}(-x) \quad (5.32a)$$

$$\left(-\Delta + V_+(x) + g\psi_{1+}(x)\bar{\psi}_{3+}^*(-x)\right)\psi_{1+}(x) = \mu_+ \psi_{1+}(x) \quad (5.32b)$$

Es fällt sofort eine Ähnlichkeit zwischen den beiden Arten der Konjugation auf. In der Tat gilt aufgrund von (5.22) die Äquivalenz von (5.29) mit (5.31) und (5.30) mit (5.32). Für eine Diskussion dieser Gleichungen in den i - und j -Darstellungen reicht es also aus, die Gleichungen mit \mathcal{PT}^i Konjugation zu betrachten. Konjugation mit dem zusätzlich erwähnten Operator $\mathcal{PT}^i \mathcal{PT}^j$ führt die Gleichung gemäß diesem Ergebnis also in sich selbst über. Die GPE ist bei einem \mathcal{PT} -symmetrischen Potential mit einer imaginären Einheit demnach invariant gegenüber $\mathcal{PT}^i \mathcal{PT}^j$ -Konjugation der Wellenfunktionen.

Als nächstes werden die beiden Gleichungen mit \mathcal{PT}^i -Ersetzung in den i - und j -Darstellungsweisen verglichen. Alle Darstellungen werden durch die Darstellungsfunktion in den komplexen Zahlen mit imaginärer Einheit ι und komplexer Konjugation \bullet geschrieben. Die in den Gleichungen auftretenden Potentiale lassen sich durch Tabelle 5.1 in die jeweilige Darstellung überführen.

Ersetzung mit $\mathcal{PT}^i \psi_{1+}(x) = \psi_{2-}(x)$ in i -Darstellung

$$(-\Delta + V(x) + g\psi_{1-}(x)\psi_{2-}(-x))\psi_{1-}(x) = \mu_- \psi_{1-}(x) \quad (5.33a)$$

$$(-\Delta + V^\bullet(-x) + g\psi_{2-}^\bullet(-x)\psi_{1-}^\bullet(x))\psi_{2-}^\bullet(-x) = \mu_+ \psi_{2-}^\bullet(-x) \quad (5.33b)$$

Ersetzung mit $\mathcal{PT}^i \psi_{1-}(x) = \psi_{2+}(x)$ in i -Darstellung

$$(-\Delta + V^\bullet(-x) + g\psi_{2+}^\bullet(-x)\psi_{1+}^\bullet(x))\psi_{2+}^\bullet(-x) = \mu_- \psi_{2+}^\bullet(-x) \quad (5.34a)$$

$$(-\Delta + V(x) + g\psi_{1+}(x)\psi_{2+}(-x))\psi_{1+}(x) = \mu_+ \psi_{1+}(x) \quad (5.34b)$$

Ersetzung mit $\mathcal{PT}^i \psi_{1+}(x) = \psi_{2-}(x)$ in j -Darstellung

$$(-\Delta + V(x) + g\psi_{1-}(x)\psi_{2-}(-x))\psi_{1-}(x) = \mu_- \psi_{1-}(x) \quad (5.35a)$$

$$(-\Delta + V(-x) + g\psi_{2-}(-x)\psi_{1-}(x))\psi_{2-}(-x) = \mu_+ \psi_{2-}(-x) \quad (5.35b)$$

Ersetzung mit $\mathcal{PT}^i \psi_{1-}(x) = \psi_{2+}(x)$ in j -Darstellung

$$(-\Delta + V^\bullet(-x) + g\psi_{2+}(-x)\psi_{1+}(x))\psi_{2+}(-x) = \mu_- \psi_{2+}(-x) \quad (5.36a)$$

$$(-\Delta + V^\bullet(x) + g\psi_{1+}(x)\psi_{2+}(-x))\psi_{1+}(x) = \mu_+ \psi_{1+}(x) \quad (5.36b)$$

Es fällt sofort auf, dass die Gleichungen (5.35) in j -Darstellung den im letzten Abschnitt hergeleiteten Gleichungen (5.18) mit \mathcal{PT} -Konjugation in den komplexen Zahlen entsprechen. Wenn man die andere Gleichung in j -Darstellung (5.36) komplett komplex konjugiert, hat sie die gleiche Form wie (5.35). Das heißt die Konjugation der ψ_- -Komponente

führt auf eine äquivalente Gleichung für das komplex konjugierte Potential. Es besteht ein ähnlicher Zusammenhang mit den Gleichungen in i -Darstellung. Konjugiert man in diesen Gleichungssystemen die Gleichungen (5.33b) und (5.34a), ergibt sich wiederum das Gleichungssystem (5.18). Die bikomplexen Gleichungen sind also insgesamt äquivalent zu (5.18), wenn die Wellenfunktionen durch \mathcal{PT}^i - oder \mathcal{PT}^j -Konjugation ersetzt werden. Die Eigenwerte μ_{\pm} der Gleichungen zum Potential V sind komplex konjugiert zu den Gleichungen mit komplex konjugiertem Potential V^{\bullet} .

Zuletzt wird noch die \mathcal{PT}^{i+j} -Konjugation betrachtet. Wegen der Ergebnisse für die anderen Konjugationen reicht es aus, nur eine der beiden Wellenfunktionen zu ersetzen, da die Ersetzung der anderen Funktion lediglich auf das komplex konjugierte Gleichungssystem führt. In diesem Fall wird in der Notation nicht mehr zwischen ψ_1 , ψ_2 und ψ_3 unterschieden, so dass nur noch eine Kennzeichnung der ψ_+ und ψ_- Komponenten erfolgt.

Ersetzung mit $\mathcal{PT}^{i+j}\psi_+(x) = \bar{\psi}_+^*(-x)$

$$(-\Delta + V_-(x) + g\psi_-(x)\bar{\psi}_+(-x))\psi_-(x) = \mu_-\psi_-(x) \quad (5.37a)$$

$$\left(-\Delta + \bar{V}_+^*(-x) + g\bar{\psi}_+^*(-x)\psi_{1-}^*(x)\right)\bar{\psi}_+^*(-x) = \mu_+\bar{\psi}_+^*(-x) \quad (5.37b)$$

Wird die zweite Gleichung (5.37b) dieses Gleichungssystems in der imaginären Einheit i konjugiert, so hat das gesamte Gleichungssystem sowohl in der i - als auch in der j -Darstellung die gleiche Struktur wie (5.18), wenn $\mathcal{D}^i(\psi_+) = \mathcal{D}^j(\psi_+)^{\bullet}$ beachtet wird und führt dadurch auf die gleichen Lösungen wie (5.18). Letztendlich führt jede Ersetzung einer der Wellenfunktionen in der idempotenten GPE (5.13) durch einen der \mathcal{PT}^{ξ} -Operatoren auf das Gleichungssystem (5.18). Lediglich der Zusammenhang zwischen der Konjugation in einer imaginären Einheit und der Konjugation in zwei imaginären Einheiten muss nicht unbedingt vorhanden sein.

Zusammenfassend kann gesagt werden, dass bei Wahl von $\psi_1(x) = \psi_-(x)$ die Wellenfunktion $\psi_2(x)$ je nach Anwendung der \mathcal{PT}^{ξ} -Konjugation folgendermaßen identifiziert wird:

$$\psi_2(x) = \begin{cases} \psi_+^*(-x), & \xi \in \{i, j\}, \\ \bar{\psi}_+(x), & \xi = i + j. \end{cases} \quad (5.38)$$

Es ergibt sich insgesamt der Schluss $\mathcal{D}^i(\psi_{1,2}) = \mathcal{D}^j(\psi_{1,2})$. Ob diese Eigenschaft der bikomplexen Komponenten allerdings notwendigerweise mit den Eigenschaften des \mathcal{PT} -Operators zusammenhängt, kann an dieser Stelle nicht beantwortet werden.

5.2. Analytisch erweiterte GPE mit Doppel- δ -Potential

Das Ziel dieser Arbeit ist die Überprüfung der Gültigkeit der analytischen Erweiterung mit der Ersetzung (5.17) durch numerische Nullstellensuche für ein \mathcal{PT} -symmetrisches

Doppel- δ -Potential in einer Dimension. Es hat sich gezeigt [4], dass die Betrachtung eines eindimensionalen Fallenpotentials ausreichend ist, sofern die anderen Dimensionen der Falle zylindersymmetrisch um diese Achse gewählt werden. Das hier verwendete idealisierte Potential zur qualitativen Analyse lautet

$$V(\gamma, x) = -((1 - i\gamma)\delta(x + b) + (1 + i\gamma)\delta(x - b)). \quad (5.39)$$

Das heißt also, die Potentialtöpfe sowie Quell- und Verlustterme beschränken sich auf die Orte $x = b$ und $x = -b$. Der positive Imaginärteil des Potentials bei $x = -b$ beschreibt die Einkopplung von Teilchen und der negative Imaginärteil bei $x = b$ entsprechend die Auskopplung. Es werden außerdem nur gebundene Zustände betrachtet, was bei diesem Potential Eigenwerte $\mu < 0$ bedeutet. In Analogie zum linearen und hermiteschen Standardproblem aus Lehrbüchern werden die Eigenwerte durch $\mu_i = -\kappa_i^2$ ersetzt. Die gekoppelte, analytisch erweiterte GPE nimmt dann die Form

$$(-\Delta + V(\gamma, x) + g\psi_1(x)\psi_2(-x) + \kappa_1^2) \psi_1(x) = 0, \quad (5.40a)$$

$$(-\Delta + V(\gamma, -x) + g\psi_1(x)\psi_2(-x) + \kappa_2^2) \psi_2(-x) = 0 \quad (5.40b)$$

an. Da es sich um eine Differentialgleichung zweiter Ordnung handelt, ist für eine eindeutige Lösung die Angabe eines Anfangswertes $\psi_i(x_0)$ und der Ableitung $\psi'_i(x_0)$ an der gleichen Stelle erforderlich. Eine physikalisch sinnvolle Lösung von (5.40) entspricht einer Nullstellensuche mit bestimmten Randbedingungen. Die numerische Umsetzung einer δ -Funktion geschieht durch Änderung der Ableitung an den Stellen, an denen die δ -Funktion einen Beitrag liefert. Dadurch wird die Stetigkeit der Wellenfunktion selbst garantiert. Beginnt man die Integration im Ursprung lauten die Sprungbedingungen für das Potential (5.39)

$$\psi'_{x>b}(b) = \psi'_{x<b}(b) + (1 - i\gamma)\psi(b), \quad (5.41)$$

$$\psi'_{x<-b}(-b) = \psi'_{x>-b}(-b) - (1 + i\gamma)\psi(-b). \quad (5.42)$$

Da der Hamiltonoperator des Problems stetig in den Parametern (g, γ) ist, wird angenommen, dass auch die Eigenwerte $\kappa_i(g, \gamma)$ und Wellenfunktionen $\psi_i(g, \gamma)$ für jeweils einen Zustand stetig von g und γ abhängen. Dadurch wird es möglich, die Nullstelle zu einem Parametertupel (g, γ) als Startwert für die Nullstellensuche bei kleiner Veränderung der Parameter $(g + \delta g, \gamma + \delta \gamma)$ zu verwenden. Wird durch die Parametervariation ein kritischer Punkt überschritten, so ergibt die Nullstellensuche per Zufall einen der Zustände, welche im kritischen Punkt zusammenfallen und dahinter noch existieren. Es kommt allerdings auch oft vor, dass die Zustände hinter dem kritischen Punkt nicht mehr gefunden werden. Gelingt dieses Verfahren jedoch, so kann prinzipiell das gesamte Spektrum für jede Parameterwahl aus dem Grundzustand der hermiteschen linearen GPE berechnet werden.

5.2.1. Numerische Umsetzung der Nullstellensuche

Als Programmiersprache wird FORTRAN90 verwendet. Die Durchführung der Nullstellensuche erfolgt mit der Routine `hybrid1` aus dem Paket `minpack`, welche auf der Powell-Hybrid Methode beruht. Mithilfe des Runge-Kutta-Algorithmus wird das Gleichungssystem (5.40) integriert, um geeignete Funktionswerte zu erhalten. Die Parameter g und γ werden in jedem Schritt festgehalten, wodurch nur die Eigenwerte und Anfangsbedingungen als Variablen der Nullstellensuche verwendet werden. Dabei muss jede komplexe Variable in Real- und Imaginärteil aufgeteilt werden. Anhand der Struktur des Gleichungssystems (5.40) kann die globale Phase so gewählt werden, dass eine der Wellenfunktionen im Ursprung verschwindet. Deshalb geschieht die Integration vom Ursprung aus in positive und negative x -Richtung. Es bleibt also ein minimaler Satz von 11 Variablen

$$\begin{array}{cccc} \text{Re}[\kappa_1] & \text{Im}[\kappa_1] & \text{Re}[\kappa_2] & \text{Im}[\kappa_2] \\ \text{Re}[\psi_1(0)] & & \text{Re}[\psi_2(0)] & \text{Im}[\psi_2(0)] \\ \text{Re}[\psi_1'(0)] & \text{Im}[\psi_1'(0)] & \text{Re}[\psi_2'(0)] & \text{Im}[\psi_2'(0)]. \end{array} \quad (5.43)$$

Der Algorithmus `hybrid1` ist eine Variante des Newton-Verfahrens und verwendet folglich eine quadratische Jacobi-Matrix, weshalb die Nullstellensuche eine elfdimensionale Funktion erfordert. Als Funktionswerte kommen Randbedingungen an physikalisch sinnvolle Lösungen in Frage. Wellenfunktionen müssen für $x \rightarrow \pm\infty$ verschwinden. Dies ergibt bei zwei Wellenfunktionen mit jeweils Real- und Imaginärteil insgesamt 8 Bedingungen. Um die Normierung des Betragsquadrats der nichtanalytischen GPE beizubehalten wird außerdem

$$N_\infty = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_1(x)\psi_2(-x)dx = 1 \quad (5.44)$$

gesetzt. Weil dieses Integral im Allgemeinen komplexe Werte annimmt, ergibt dies wiederum je eine Bedingung für dessen Real- und Imaginärteil. Es fehlt damit nur noch ein letzter Funktionswert, welcher durch eine willkürliche Normierung einer der beiden Wellenfunktionen festgelegt werden kann. Die Forderung (5.44) legt außerdem das Verhältnis zwischen den Normen der beiden Wellenfunktionen fest. Die Festsetzung der Norm einer Wellenfunktion bestimmt durch (5.44) also gleichzeitig die Norm der anderen Wellenfunktion. Diese elf Bedingungen reichen aus, um eine eindeutige Lösung von (5.40) zu erhalten. Die numerische Integration kann allerdings nur in einem beschränkten Intervall $[-d, d]$ durchgeführt werden. Der Randwert d wird mit $x = \infty$ gleichgesetzt, so dass die Wellenfunktionen schon an diesem Punkt verschwinden müssen. Somit lauten die Bedingungen

$$\begin{array}{cccc} \text{Re}[\psi_1(d)] = 0 & \text{Im}[\psi_1(d)] = 0 & \text{Re}[\psi_2(d)] = 0 & \text{Im}[\psi_2(d)] = 0 \\ \text{Re}[\psi_1(-d)] = 0 & \text{Im}[\psi_1(-d)] = 0 & \text{Re}[\psi_2(-d)] = 0 & \text{Im}[\psi_2(-d)] = 0 \\ \text{Re}[N_d] - 1 = 0 & \text{Im}[N_d] = 0 & \int_{-d}^d |\psi_1|^2 dx - 1 = 0. & \end{array} \quad (5.45)$$

Damit die Nullstellensuche allerdings auch wirklich Lösungen des Potentials (5.39) ergeben, muss im Nachhinein zusätzlich die Ableitung im Unendlichen betrachtet werden. Durch die Festlegung der Integration kommen auch Lösungen eines zusätzlichen Kastenpotentials in der Nullstellensuche vor, welche keine verschwindenden Ableitungen der Wellenfunktionen am Rand aufweisen. Bei dem eigentlich untersuchten Potential müssen die Ableitungen aber verschwinden. Bei kleinem Verhältnis b/d werden die Lösungen des Kastenpotentials bevorzugt gefunden. Wählt man dieses Verhältnis zu groß, so versagt die Nullstellensuche, da die Krümmung der Wellenfunktionen am Rand nicht verschwindet und die Funktion selbst ab einem gewissen Punkt dadurch wieder anwächst.

5.2.2. Spektrum der analytisch erweiterten GPE

In dieser Arbeit wird das Spektrum für Nichthermitizitäten γ im Intervall $[-0.5, 0.5]$ berechnet. Die im Abschnitt 3.4 vorgestellten kritischen Punkte bei γ_1 und γ_2 existieren natürlich auch im negativen Intervall bei $-\gamma_1$ und $-\gamma_2$. Um zwischen den positiven und negativen kritischen Punkten zu unterscheiden wird die Notation $\gamma_i^\pm(g)$ eingeführt, wobei das $+$ für die positiven und das $-$ für die negativen kritischen Punkte steht. Für die letztendliche Lösung des Problems werden die Parameter $b = 1.1$ und $d = 12.0$ gewählt. Der Startwert des Grundzustandes im hermiteschen linearen Fall wird mit den Parametern

$$\operatorname{Re}[\kappa_{1,2}] = 0,626, \quad \operatorname{Re}[\psi_{1,2}(0)] = 0,444 \quad (5.46)$$

gefunden. Startwerte auf anderen Zuständen finden sich durch die Berechnung des Spektrums im linearen Fall. Durch mehrmaliges Überschreiten der kritischen Punkte bei $\gamma_0^\pm(g) \approx \pm 0.401$ zu jeweils größeren und niedrigeren Werten von γ werden verschiedene Kombinationen der beiden \mathcal{PT} -symmetrischen und \mathcal{PT} -gebrochenen Zustände angenommen, wobei Lösungen mit $\psi_1 = \psi_2$ häufiger auftreten. Das lineare Spektrum ist in Abbildung 5.2 gezeigt. In dieser Arbeit werden die Zustände im linearen Fall nur als Startwerte für die Berechnung des Spektrums im nichtlinearen Fall verwendet, weshalb das lineare Spektrum nicht weiter behandelt wird.

Bei Erhöhung des Nichtlinearitätsparameters g spalten sich die Zustände der Gleichung (5.18) mit $\psi_1 = \psi_2$ für jeden Wert von γ von den Zuständen mit $\psi_1 \neq \psi_2$ ab, so dass sich die Zahl der Zustände im linearen Fall für alle γ von zwei auf vier verdoppelt. Zustände mit $\kappa_1 = \kappa_2$ führen auf die schon in [4, 5] berechneten Lösungen der Ersetzung (5.15) während die noch fehlenden Lösungen aus $\kappa_1 \neq \kappa_2$ hervorgehen. Spektren mit den Nichtlinearitätsparametern $g \in \{0.25, 0.5, 1.0\}$ sind in Abbildung 5.3 aufgetragen.

Im Folgenden werden Zustände, die aus $\psi_1 = \psi_2$ hervorgehen als einfache Zustände bezeichnet, während Zustände mit $\psi_1 \neq \psi_2$ kombinierte Zustände heißen sollen. In dieser Terminologie sind die neu hinzukommenden Lösungen der analytischen Erweiterung einfache Zustände mit komplexen Eigenwerten, sowie kombinierte Zustände mit reellen Eigenwerten. Die neuen einfachen Zustände treten hinter dem zweiten positiven kritischen Punkt $\gamma_2^+(g)$ und vor dem entsprechenden negativen kritischen Punkt $\gamma_2^-(g)$ auf.

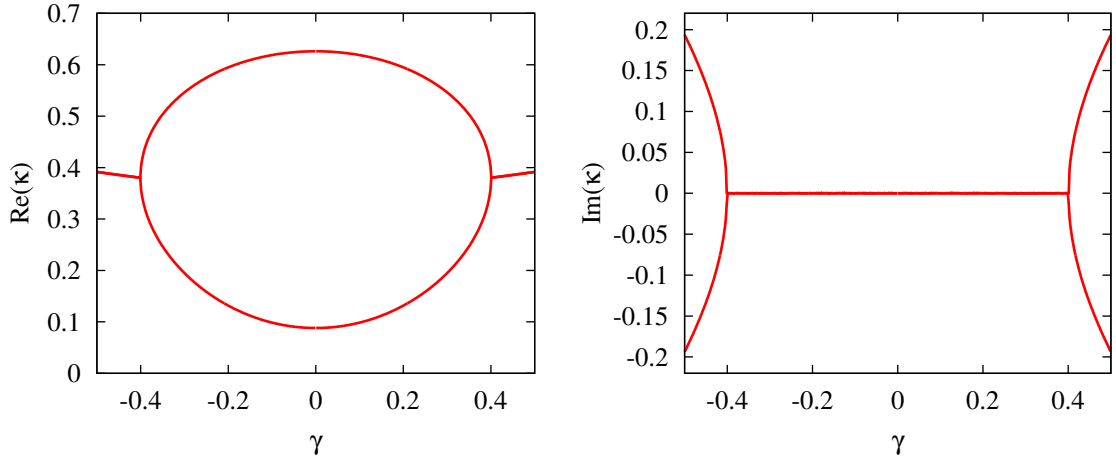


Abbildung 5.2.: Spektrum der linearen \mathcal{PT} -symmetrischen GPE. Die erhaltenen Lösungen dienen zur Berechnung des Spektrums der nichtlinearen GPE. Die Daten für dieses Bild wurden von [7] bereitgestellt.

Die neuen kombinierten Zustände existieren zwischen den beiden Zuständen $\gamma_1^\pm(g)$. Für die sichere Berechnung der kombinierten Zustände mit rein reellen Eigenwerten zu einem bestimmten g sollte der Startwert im linearen Fall von einer Nichthermitizität erfolgen, die im Intervall $[\gamma_1^-(g), \gamma_1^+(g)]$ liegt. In [8] wurde bereits angedeutet, dass die kombinierten Zustände für $\gamma \neq 0$ stetig aus dem linearen Fall hervorgehen. Durch das hier vorgestellte Lösungsverfahren kann diese Eigenschaft für einzelne Werte von γ bestätigt werden. Das in [8] berechnete Spektrum der GPE für $g = 1.0$ wurde zum Vergleich mit den in dieser Arbeit erhaltenen Ergebnissen bereitgestellt. Das Spektrum aus [8] wurde mit den gleichen Parametern $b = 1.1$ und $d = 12.0$ mithilfe der bikomplexen GPE (5.11) gelöst. Die Ergebnisse dieser Arbeit werden in Abbildung 5.4 mit denen aus [8] überlagert dargestellt. Es zeigt sich kein Unterschied zwischen den beiden Spektren, wodurch eine Äquivalenz der beiden Ansätze bestätigt werden kann.

5.2.3. Wellenfunktionen

Die ursprünglichen \mathcal{PT} -gebrochenen Lösungen werden auch mit der hier behandelten Erweiterung (5.17) gefunden. Diese Lösungen sind in Abbildung 5.5 dargestellt. Bei Vergleich mit früheren Arbeiten wie [19], kann bestätigt werden, dass die hier gefundenen Lösungen auch tatsächlich den Lösungen der ursprünglichen GPE entsprechen. Die analytisch erweiterten Zustände treten erst mit der Zulassung einer komplexen Norm durch die analytische Ersetzung (5.17) auf. Die Wellenfunktionen der analytischen Zustände und die aus ihnen resultierenden analytischen Ersetzungen $\psi_1(x)\psi_2(-x)$ sind in Abbildung 5.6 zu sehen.

Bei Berechnung des Spektrums mit der hier vorgestellten Methode fällt auf, dass die

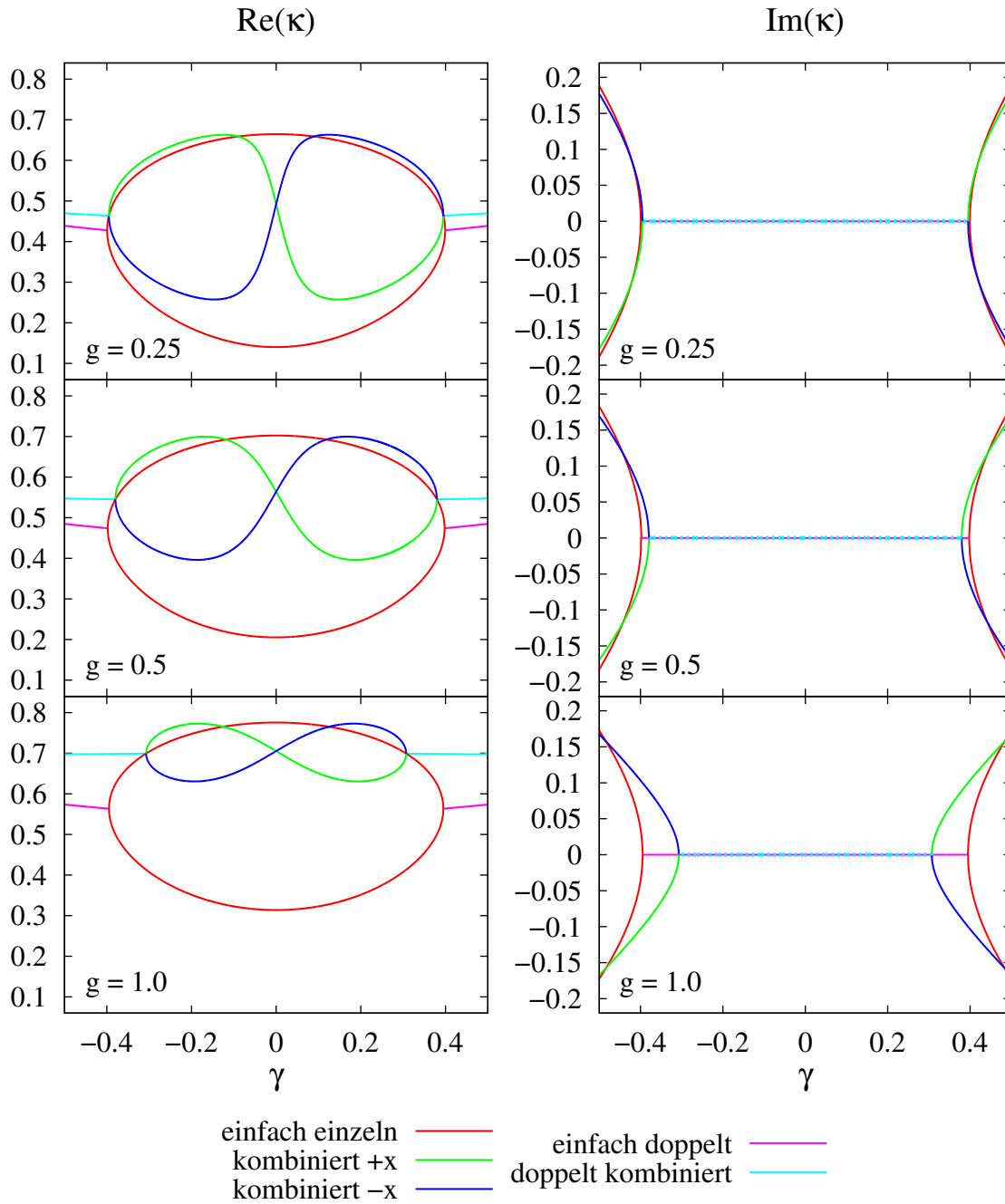


Abbildung 5.3.: Spektrum der GPE bei verschiedenen Werten des Nichtlinearitätsparameters g wenn die Norm N_d aus (5.45) fixiert wird. Man sieht deutlich, dass der Wert $|\gamma_1^\pm(g)|$ für den ersten kritischen Punkt bei größerer Nichtlinearität kleiner wird. Auch $|\gamma_2^\pm(g)|$ verringert sich, was auf dieser Skala allerdings schwer zu sehen ist. Die kombinierten Zustände hängen gemäß der farblichen Kennzeichnung (grün, blau) innerhalb des Real- und Imaginärteils zusammen.

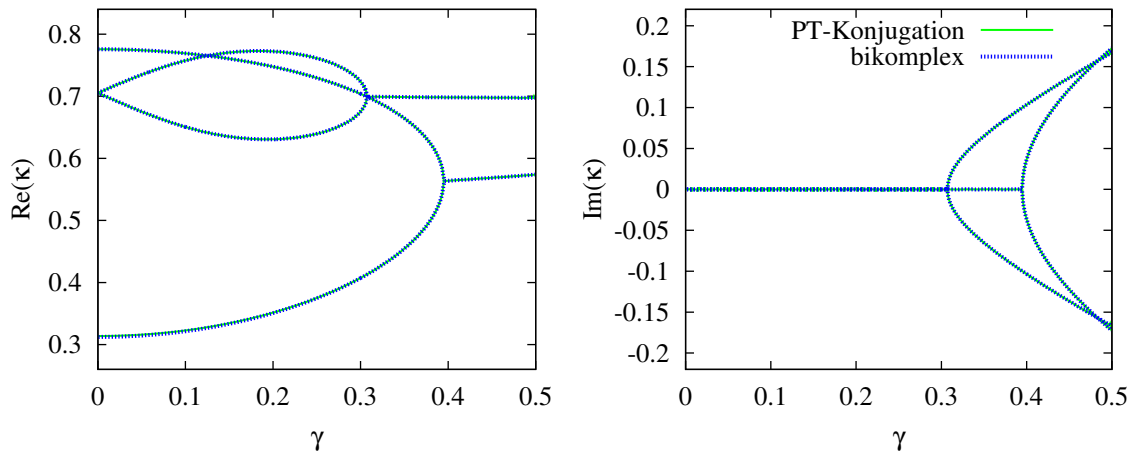


Abbildung 5.4.: Das durch \mathcal{PT} -Konjugation erhaltene Spektrum wird hier mit dem Spektrum einer allgemeinen bikomplexen Erweiterung aus [8] für $g = 1.0$ überlagert dargestellt. Die beiden Spektren stimmen offenbar überein, wodurch die Gültigkeit des Ansatzes mit \mathcal{PT} -Konjugation bestätigt werden kann.

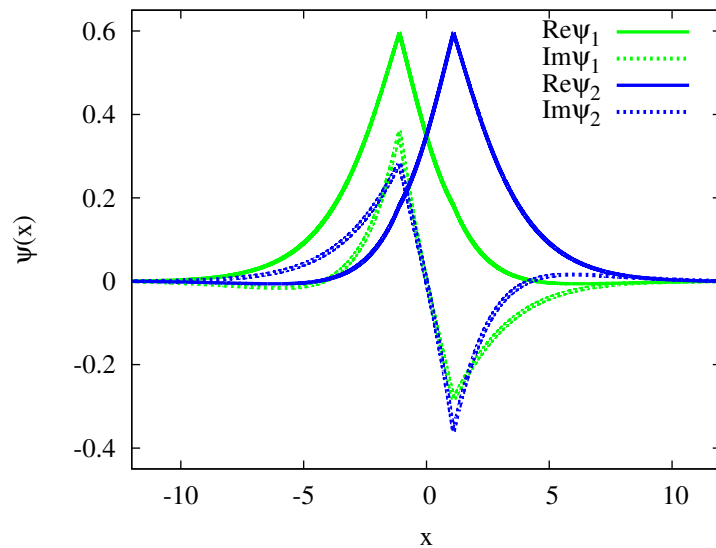


Abbildung 5.5.: Die Wellenfunktionen des \mathcal{PT} -gebrochenen bzw. kombinierten Zustandes bei $g = 0.5$ und $\gamma = 0.5$. Bei Ortsspiegelung einer der Funktionen ist eine Wellenfunktion komplex konjugiert zur anderen.

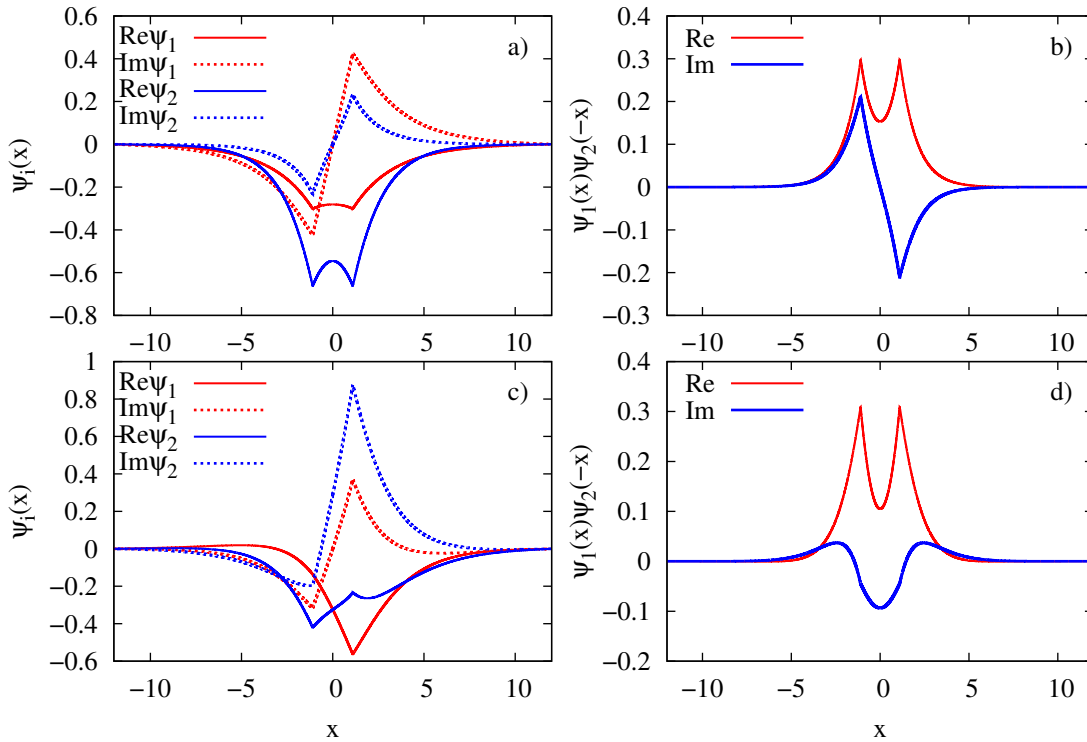


Abbildung 5.6.: Wellenfunktionen a),c) und analytische Ersetzungen $\psi_1(x)\psi_2(-x)$ b),d) der durch die analytische Erweiterung hinzukommenden Zustände. Die Wellenfunktionen in a),b) gehören zu kombinierten Zuständen bei $g = 0.5$, $\gamma = 0.3$ und die Wellenfunktion in c),d) sind einzelne Zustände bei $g = 0.5$, $\gamma = 0.5$. In c) erkennt man, dass der Imaginärteil der zweiten Wellenfunktion im Ursprung nicht mehr verschwindet. Das heißt, diese beiden Wellenfunktionen sind zueinander phasenverschoben.

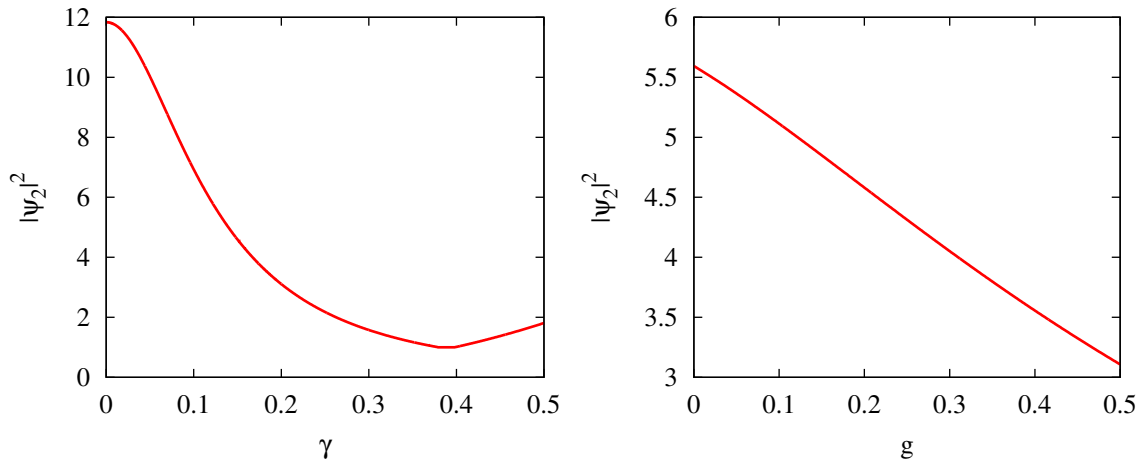


Abbildung 5.7.: Norm der zweiten Wellenfunktion bei den analytisch erweiterten Zuständen. Die Abhängigkeit von dem Parameter g wurde für einen Wert $\gamma = 0.2$ gezeigt, während die Abhängigkeit von γ bei einem konstanten Wert $g = 0.5$ zu sehen ist. Die Funktion ist symmetrisch bezüglich $\gamma = 0$, weshalb hier nur positive Nichthermitizitäten gezeigt werden.

Norm der nicht fixierten Wellenfunktion ψ_2 in den analytisch erweiterten Zustände von der Norm der ersten Wellenfunktion abweicht. Die Norm verändert sich sowohl bei Variation des Nichtlinearitätsparameters als auch bei Variation der Nichthermitizität. Für eine Variation von g bei festem $\gamma = 0.2$ und für eine Variation von γ bei festem $g = 0.5$ wird die Veränderung der Norm in Abbildung 5.7 gezeigt. Die Veränderung ist symmetrisch bezüglich des Ursprungs der Nichthermitizität γ , weshalb in der Abbildung nur positive Werte von γ gezeigt werden. Die Norm nimmt im Ursprung der Nichthermitizität bei kombinierten Zuständen ihr Maximum an. In diesem Punkt ist die Kopplung der beiden Wellenfunktionen also am schwächsten, da die Norm der zweiten Wellenfunktion stark anwachsen muss, damit das Produkt $\psi_1(x)\psi_2(-x)$ konstant bleibt. Durch Verringerung des Parameters g wächst die Norm bei den analytisch erweiterten Lösungen, bei Erhöhung des Parameters wird die Norm dementsprechend kleiner. Die veränderte Norm der analytisch erweiterten Zustände hinter dem zweiten kritischen Punkt ist ein neues Ergebnis dieser analytischen Ersetzung und steht im Zusammenhang zur erzwungenen Norm von ψ_1 aus Gleichung (5.45). Diese Zustände mit verschiedenen Normen werden sogar öfter gefunden als Zustände, bei denen beide Wellenfunktionen gleich sind. Da eine der Wellenfunktionen zu diesen Zuständen in Abbildung 5.6 keinen Imaginärteil hat der im Ursprung verschwindet, lässt dies darauf schließen, dass die Wellenfunktionen zusätzlich zu der unterschiedlichen Norm eine Phasenverschiebung untereinander aufweisen.

5.2.4. Besonderheiten der kombinierten Zustände

Die grünen und blauen Zweige der kombinierten Zustände in Abbildung 5.3 besitzen Eigenschaften, die aus der bikomplexen GPE hervorgehen. Die Zustände auf einem einzelnen Zweig hängen durch die Art der Berechnung mit zwei verschiedenen Wellenfunktionen zusammen. Ein entscheidendes Merkmal ist die Entartung beider Zweige im hermiteschen Fall. Weil die Wellenfunktionen bei der Berechnung verschieden normiert sind, vertauschen die Zugehörigkeiten der beiden Zustände bezüglich des einfachen Grund- und angeregten Zustandes wenn der Wert $\gamma = 0$ bei Variation der Nichthermitizität überschritten wird. Das heißt, wenn ψ_i ohne Beschränkung der Allgemeinheit im linearen Fall der Grundzustand war und nach Erhöhung der Nichtlinearität der Fall $\gamma = 0$ überschritten wurde, eine Zurückführung des Zustandes in den linearen Fall dazu führt, dass nun der angeregte Zustand mit dieser Wellenfunktion angenommen wird. Der Zusammenhang mit den bikomplexen Zahlen besteht in Bezug auf die i - und j -Darstellung. Wird Gleichung (5.29) in i -Darstellung gelöst, sind die Potentiale in beiden Gleichungen zueinander komplex konjugiert. Dadurch werden nur Lösungen auf einem der beiden Zweige der kombinierten Zustände mit reellen Eigenwerten gefunden und es ist unmöglich die Lösungen des anderen Zweiges zu finden, ohne wieder in den linearen Fall überzugehen oder die Lösungen in den kritischen Punkten per Zufall vertauschen zu lassen. Wird hingegen die j -Darstellung gewählt, erfolgt die gleichzeitige Berechnung beider Zweige. Die Zustände der blauen Zweige können in die Zustände der grünen Zweige überführt werden, wenn die gesamte Gleichung komplex konjugiert wird. Das ist genau der Zusammenhang zwischen (5.29) und (5.30), das heißt die ψ_+ Komponente wird in die ψ_- Komponente überführt und umgekehrt. Anhand des Spektrums in 5.3 würde das der Spiegelung der Eigenwerte an einer Geraden die senkrecht zur γ -Achse durch den Ursprung verläuft entsprechen. Anhand der berechneten Wellenfunktionen ist das jedoch nur zu sehen, wenn die Norm beider Wellenfunktionen angepasst wird. Dies wird in Abbildung 5.8 gezeigt. Die gleichfarbigen Zweige in 5.3 vor $\gamma_1^-(g)$ und hinter $\gamma_1^+(g)$ hängen ebenfalls zusammen. In diesem Fall folgt das allerdings allein schon dadurch, dass die Eigenwerte bei komplexer Konjugation der Gleichung selbst komplex konjugiert werden.

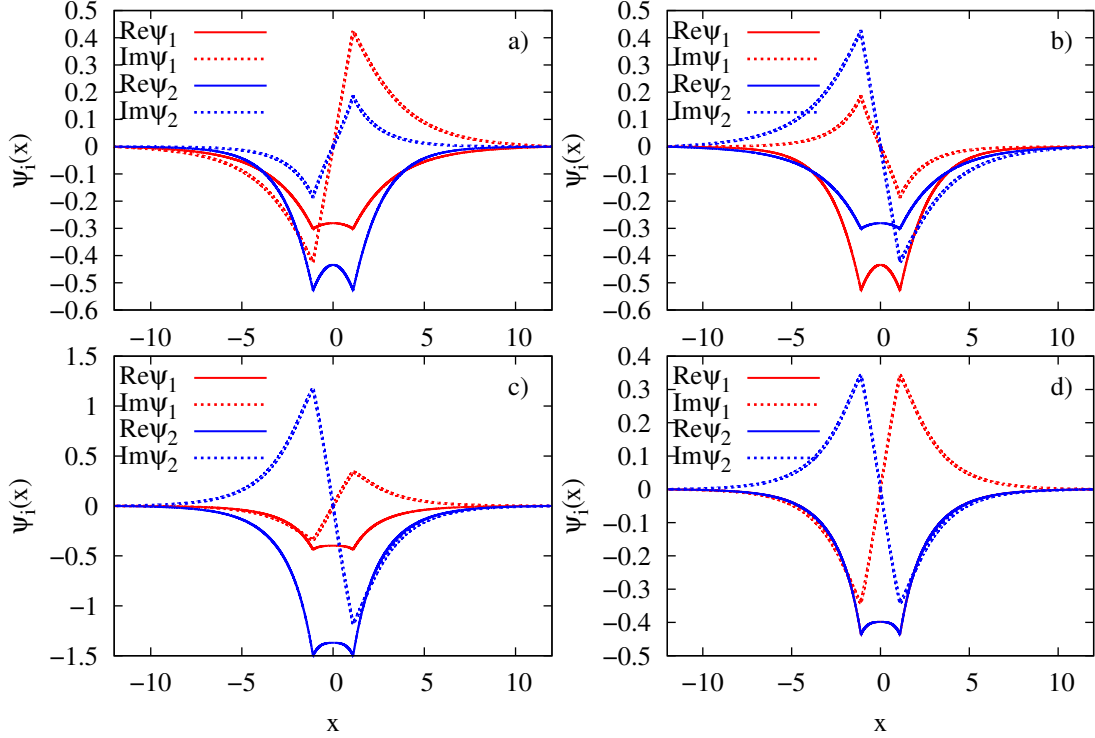


Abbildung 5.8.: Alle abgebildeten Wellenfunktionen sind kombinierte Zustände bei einem Wert der Nichtlinearität von $g = 0.5$. Die Norm der Wellenfunktionen ψ_2 in a), b) und d) werden anhand der Werte in Abbildung 5.7 der Norm der Wellenfunktion ψ_1 angepasst. Die Wellenfunktion in a) treten bei einem Wert $\gamma = 0.3$ und diejenigen in b) bei einem Wert $\gamma = -0.3$ auf. Negative Werte von γ entsprechen einer komplexen Konjugation des Potentials V in Gleichung (5.18). Dennoch werden die Wellenfunktionen dieser Zustände bei der Konjugation des Potentials nicht gemäß $\psi \mapsto \psi^*$ verändert. Es gilt in diesem Fall stattdessen $\psi_1 \mapsto \psi_2^*$. Dieses Vertauschungsverhalten führt im hermiteschen Fall $\gamma = 0$ zwangweise dazu, dass die Eigenwerte der kombinierten Zustände entartet sind. Die Zustände für diesen Fall sind in c) und d) gezeigt. In c) sind die Wellenfunktionen so abgebildet, wie sie sich bei der Berechnung der Lösungen ergeben. In d) wird die Norm der zweiten Wellenfunktion angepasst, so dass die beiden Wellenfunktionen verglichen werden können. In diesem Fall zeigt sich, dass $\psi_1 = \psi_2^*$ gilt.

6. Zusammenfassung und Ausblick

In dieser Arbeit wurde die Möglichkeit untersucht, die Gross-Pitaevskii-Gleichung (GPE) mit schwacher Wechselwirkung und einem \mathcal{PT} -symmetrischen Fallenpotential durch die Ersetzung $|\psi|^2 \rightarrow \psi_1(x)\psi_2(-x)$ analytisch zu erweitern. Die GPE ist eine nichtlineare Differentialgleichung und dient der Beschreibung eines Bose-Einstein-Kondensats durch eine einzige Wellenfunktion ψ . Sie wird aus der Vielteilchen-Schrödinger-Gleichung durch Variation der Mean-Field-Energie hergeleitet. Der allgemeine N -Teilchen Zustand der Schrödinger-Gleichung wird bei der Variation durch eine Produktwellenfunktion angenähert, in der alle Ein-Teilchen-Zustände als gleich vorausgesetzt werden. Diese Näherung führt auf einen nichtanalytischen Term $g|\psi|^2$ in der GPE.

Das \mathcal{PT} -symmetrische Potential modelliert die kohärente Ein- und Auskopplung von Teilchen in das System durch einen nichthermiteschen, imaginären Beitrag im Potential. Die Stärke der Nichthermitizität wird durch einen Parameter γ beschrieben.

Die bisherigen Untersuchungen eines Bose-Einstein-Kondensats mit einem \mathcal{PT} -symmetrischen Doppelmulden- [4, 5] und Doppel- δ -Potential [6–8, 19] führten auf die Existenz von zwei kritischen Punkten im Spektrum bei den Werten γ_1 und γ_2 der Nichthermitizität. Im linearen Fall mit $g = 0$ fallen diese beiden Punkte zusammen. Erhöht man den Nichtlinearitätsparameter g , so verkleinern sich die Werte γ_1 und γ_2 , wobei der Wert γ_1 viel schneller abfällt, was zu $\gamma_1 < \gamma_2$ führt. Zwischen diesen beiden kritischen Punkten existieren zwei Lösungen mehr als im restlichen Bereich des Parameters. Anhand der bisherigen Ergebnisse konnte festgestellt werden, dass die nichtkonstante Zahl der Lösungen eine Folge des nichtanalytischen Betragsquadrats $|\psi|^2$ der GPE ist. Durch eine analytische Erweiterung dieses Terms konnte bewirkt werden, dass die Zahl der Lösungen für jede Wahl der Parameter γ und g erhalten bleibt. Dies konnte bisher nur im Rahmen einer allgemeinen Erweiterung mithilfe von bikomplexen Zahlen vollständig erfolgen [4–6, 8]. Ein Teil der Lösungen konnte auch mit einer Ersetzung $|\psi|^2 \rightarrow \psi(x)\psi(-x)$ [4, 5] innerhalb der komplexen Zahlen erhalten werden. Diese Ersetzung geht auf die Anwendung des \mathcal{PT} -Operators mit $\mathcal{PT}\psi(x) = \psi^*(-x)$ zurück.

Ein Teil der dabei nicht vorkommenden Lösungen der ursprünglichen GPE erfüllt die Gleichung $\mathcal{PT}\psi_1(x) = \psi_2(-x)$, wobei die beiden Wellenfunktionen ψ_1 und ψ_2 zu verschiedenen Zuständen bei gleicher Wahl der Parameter γ und g gehören. Anhand dieser Eigenschaft wurde in dieser Arbeit eine GPE mit der Ersetzung $|\psi|^2 \rightarrow \psi_1(x)\psi_2(-x)$ hergeleitet, um alle Zustände der bikomplexen Erweiterung zu erhalten. Durch eine numerische Lösung der auf diese Weise erweiterten GPE konnten in dieser Arbeit auch tatsächlich alle Zustände der bikomplexen GPE gefunden werden. Ferner wurde diese Ersetzung auch auf die bikomplexe Gleichung angewendet. Es stellt sich heraus, dass jég-

liche solche Ersetzung der Zustände in der bikomplexen GPE auf ein Gleichungssystem führt, das die gleiche Form annimmt, wie das Gleichungssystem durch die rein komplexe Erweiterung.

Wenn die Normierung der ersten Wellenfunktion ψ_1 bei der Berechnung fixiert wird, verändert sich die Norm der Wellenfunktion ψ_2 bei den neuen Zuständen der analytischen Erweiterung sofern der Ausdruck

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_1(x)\psi_2(-x)dx \quad (6.1)$$

konstant gehalten wird. Das ist auch bei den Zuständen der Fall, die mit der einfacheren Ersetzung $|\psi|^2 \rightarrow \psi(x)\psi(-x)$ berechnet wurden, was ebenfalls ein neues Ergebnis dieser Arbeit darstellt. Durch den Unterschied in der Norm der beiden Wellenfunktionen konnten schließlich bestimmte Symmetrieeigenschaften nachgewiesen werden, die aus den Überlegungen zur bikomplexen GPE hervorgehen.

A. Beweise zu bikomplexen und hyperkomplexen Zahlen

Hier wird die in Kapitel 5 behauptete Eigenschaft bewiesen, dass für die bikomplexen Zahlen alle Eigenschaften eines Körpers bis auf die Existenz einer Inversen für jedes Element bezüglich der Multiplikation gelten. Am einfachsten kann dies eingesehen werden, wenn die Vektorraumdarstellung der komplexen Zahlen betrachtet wird. Die komplexen Zahlen können unabhängig von einer imaginären Einheit als Zahlenmenge im \mathbb{R}^2 durch Zahlentupel $z = (x, y)$ eingeführt werden, wobei x der Realteil und y der Imaginärteil der komplexen Zahl sein soll. Mit der reellen Addition und mit der Verknüpfung

$$\mathcal{M} : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad \{z_1, z_2\} \mapsto (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1) \quad (\text{A.1})$$

als komplexer Multiplikation folgen die Körpereigenschaften der komplexen Zahlen, wie es auch in Lehrbüchern über Analysis gezeigt wird. Die Addition lässt sich problemlos in einen reellen, zweidimensionalen Vektorraum übertragen. Die Multiplikation wird auf eindeutige Weise durch eine Matrix

$$\mathcal{M}(z_1, z_2) = \begin{pmatrix} x_1 & -y_1 \\ y_1 & x_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & -y_1 \\ y_1 & x_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 & -y_2 \\ y_2 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1x_2 - y_1y_2 \\ x_1y_2 + x_2y_1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.2})$$

beschrieben. Jedes Element des Vektorraums kann durch eine bijektive Abbildung

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} \quad (\text{A.3})$$

demnach eindeutig in eine Matrix dieser Art überführt werden. Die Gruppe der komplexen Multiplikation kann also mit einer Gruppe von Matrizen der Form

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad (a = b) \Rightarrow (a \neq 0 \wedge b \neq 0) \quad (\text{A.4})$$

und der gewöhnlichen Matrixmultiplikation als Gruppenverknüpfung identifiziert werden. Diese Gruppe enthält offensichtlich die Einheitsmatrix und damit das neutrale Element der Multiplikation. Man kann auch leicht nachprüfen, dass das Produkt zweier solcher Matrizen wieder ein Element der Gruppe ergibt und kommutativ ist. Die Determinante der Matrix (A.4) ergibt sich zu

$$\det \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = a^2 + b^2 \quad (\text{A.5})$$

und ist in den reellen Zahlen offensichtlich von Null verschieden sofern $a, b \neq 0$ gilt. Das heißt jedes Element dieser Gruppe hat eine Inverse. Insgesamt handelt es sich also tatsächlich um eine abelsche Gruppe, die das neutrale Element der Addition nicht enthält. Die Definition $i^2 = -1$ einer imaginären Einheit i wird durch die Multiplikation einer Matrix mit $a = 0$ und $b = 1$ mit sich selbst eingesehen:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.6})$$

Die komplexe Konjugation wird daher mit der Transposition der Matrix (A.4) identifiziert.

Die Konstruktion der bikomplexen Zahlen mit einer neuen imaginären Einheit j kann in dieser Darstellung auf verschiedene Weisen geschehen. Die erste Möglichkeit besteht darin, den Körper des Vektorraums direkt in die komplexen Zahlen zu erweitern. Dies wird hier als komplexe Darstellung der bikomplexen Zahlen bezeichnet. In der Vektorraumdarstellung bleiben bei dem Übergang $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ auf jeden Fall die Eigenschaften der Additionsgruppe, sowie die Distributivgesetze erhalten. Auch an der Kommutativität der Multiplikation und der Existenz des neutralen Elements der Multiplikation ändert sich nichts. Nur die Existenz einer Inversen wird durch die Eigenschaften der komplexen Zahlen nicht mehr garantiert. Wird nämlich die Determinante (A.5) als Polynom in der Variablen a angesehen, so hat es gemäß dem Fundamentalsatz der Algebra in den komplexen Zahlen immer mindestens eine Nullstelle auch wenn $b \neq 0$ gilt. Das Gleiche gilt, wenn die Determinante als ein Polynom in b betrachtet wird. Die imaginären Einheiten i, j und k werden in dieser Darstellung:

$$i = (i, 0), \quad j = (0, 1), \quad k = (0, i). \quad (\text{A.7})$$

Insbesondere gilt für k :

$$k^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -i^2 & 0 \\ 0 & -i^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.8})$$

Die idempotenten Elemente e_{\pm} werden in der komplexen Darstellung durch die Matrizen und Vektoren

$$e_{\pm} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \mp i \\ \pm i & 1 \end{pmatrix}, \quad e_{\pm} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ \pm i \end{pmatrix} \quad (\text{A.9})$$

beschrieben. Die Matrizen haben die Eigenwerte 1 und 0 mit den Eigenvektoren e_{\pm} respektive e_{\mp} . Die aus

$$(e_+, e_-) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix} \quad (\text{A.10})$$

bestehende Matrix ist invertierbar und kann dadurch als Basis verwendet werden. Demnach ist die Darstellung mit den idempotenten Elementen wirklich eindeutig.

Die andere Möglichkeit, die bikomplexen Zahlen einzuführen besteht in einer Erweiterung der Dimensionen des reellen Vektorraums $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$. Die Einträge a und b der Matrix (A.4) können selbst als Blockmatrizen angesehen werden. Die Einführung der neuen imaginären Einheit j wird erreicht, indem die Blockmatrizen selbst die Gestalt in (A.4) haben:

$$a = \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} e & -f \\ f & e \end{pmatrix}. \quad (\text{A.11})$$

Interessanterweise werden hermitesche Matrizen zu reellen, symmetrischen Matrizen in einem Vektorraum mit doppelter Dimension wenn die Ersetzung der Einträge durch diese Blockmatrizen erfolgt. Eine zweidimensionale hermitesche Matrix mit $a \in \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{C}$ sieht dann folgendermaßen aus:

$$\begin{pmatrix} a & b^* \\ b & a \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} c & 0 & e & f \\ 0 & c & -f & e \\ e & -f & c & 0 \\ f & e & 0 & c \end{pmatrix}. \quad (\text{A.12})$$

Dadurch lässt sich die Diagonalisierbarkeit der hermiteschen Matrix mit reellen Eigenwerten und einer orthogonalen Basis aus Eigenvektoren auch auf die Hauptachsentransformation reeller, symmetrischer Matrizen zurückführen. Mit den Blockmatrizen wird die Multiplikationsmatrix der bikomplexen Zahlen in reeller Darstellung zu

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} c & -d & -e & f \\ d & c & -f & -e \\ e & -f & c & -d \\ f & e & d & c \end{pmatrix}. \quad (\text{A.13})$$

Der Vektor, der auf diese Matrix führt ist $(c, d, e, f)^T$. Die imaginären Einheiten entsprechen dann

$$i = (0, 1, 0, 0), \quad j = (0, 0, 1, 0), \quad k = (0, 0, 0, 1), \quad (\text{A.14})$$

wie durch Nachrechnen mit der Multiplikationsmatrix überprüft werden kann. Die Determinante der Multiplikationsmatrix ergibt genau das Produkt $zz^*\overline{z}z^*$ (5.5) einer bikomplexen Zahl mit allen, zu ihr konjugierten Zahlen. Dadurch haben genau solche Zahlen kein inverses Element, für die dieses Produkt verschwindet.

Die Konstruktion der bikomplexen Zahlen durch Ersetzung der Einträge in der Multiplikationsmatrix der komplexen Zahlen mit Blockmatrizen kann auch auf die Multiplikationsmatrix der bikomplexen Zahlen angewendet werden. Dadurch ergibt sich eine Algebra in den hyperkomplexen Zahlen mit 7 imaginären Einheiten, auf die sich die Eigenschaften der bikomplexen Zahlen übertragen. Es handelt sich also wieder um eine Algebra, die alle Körpereigenschaften bis auf die Existenz der Inversen der Multiplikation erfüllt. Die Kommutativität der Multiplikation folgt aus der Kommutativität der Blockmatrizen selbst. Das neutrale Element der Multiplikation bleibt natürlich weiterhin

A. Beweise zu bikomplexen und hyperkomplexen Zahlen

die Einheitsmatrix. Die Eigenschaften der Additionsgruppe und die Distributivgesetze sind in jedem Vektorraum enthalten. Per Induktion folgt also, dass sukzessive Ersetzung der Elemente einer solchen Multiplikationsmatrix eine weitere Struktur in den hyperkomplexen Zahlen mit diesen Eigenschaften aufdecken.

Literaturverzeichnis

- [1] C. M. Bender und S. Boettcher. Real spectra in non-Hermitian Hamiltonians having \mathcal{PT} symmetry. *Phys. Rev. Lett.* 80, 5243–5246 (1998).
- [2] A. Guo, G.J. Salamo, D. Duchesne, R. Morandotti, M. Volatier-Ravat, V. Aimez, G.A. Siviloglou und D. N. Christodoulides. Observation of \mathcal{PT} -symmetry breaking in complex optical potentials. *Phys. Rev. Lett.* 103, 093902 (2009).
- [3] Shachar Klaiman, Uwe Günther und Nimrod Moiseyev. Visualization of Branch Points in \mathcal{PT} -Symmetric Waveguides. *Phys. Rev. Lett.* 101, 080402 (2008).
- [4] D. Haag. *Numerische Behandlung von Bose-Einstein-Kondensaten im \mathcal{PT} -symmetrischen Doppelmuldenpotential*. Masterarbeit, Universität Stuttgart (2012).
- [5] D. Dast. *Variationsrechnungen zu Bose-Einstein-Kondensaten in \mathcal{PT} -symmetrischen Doppelmuldenpotentialen*. Masterarbeit, Universität Stuttgart (2012).
- [6] F. Single. *Modelle für \mathcal{PT} -symmetrische Bose-Einstein-Kondensate*. Masterarbeit, Universität Stuttgart (2013).
- [7] Holger Cartarius und Günter Wunner. Model of a \mathcal{PT} -symmetric Bose-Einstein condensate in a δ -function double-well potential. *Physical Review A* 86, 013612 (2012).
- [8] W. D. Heiss, H. Cartarius, G. Wunner und J. Main. Spectral singularities in \mathcal{PT} -symmetric Bose-Einstein condensates. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* 46, 275307 (2013).
- [9] Leslie E. Ballentine. *Quantum Mechanics*. World Scientific (1998).
- [10] Ali Mostafazadeh. Krein-space formulation of \mathcal{PT} -symmetry, CPT-inner products, and pseudo-Hermiticity. *Czechoslovak Journal of Physics* 56, 919–933 (2006).
- [11] Ali Mostafazadeh. \mathcal{PT} -symmetric Quantum Mechanics: A Precise and Consistent Formulation. *Czechoslovak Journal of Physics* 54, 1125–1132 (2004).
- [12] S. Bose. Plancks Gesetz und Lichtquantenhypothese. *Zeitschrift für Physik* 26, 178–181 (1924).

- [13] A. Einstein. Quantentheorie des einatomigen idealen Gases. *Sitzungsberichte der Preußischen Akademie der Wissenschaften, phys.-math. Kl.* Jahrgang 1924, 261–267 (1924).
- [14] A. Einstein. Quantentheorie des einatomigen idealen Gases II. *Sitzungsberichte der preußischen Akademie der Wissenschaften, phys.-math. Kl.* Jahrgang 1925, 3–14 (1925).
- [15] L. P. Pitaevskii und S. Stringari. *Bose-Einstein Condensation*. Oxford University Press (2003).
- [16] K. B. Davis, M. O. Mewes, M. R. Andrews, N. J. van Druten, D. S. Durfee, D. M. Kurn und W. Ketterle. Bose-Einstein Condensation in a Gas of Sodium Atoms. *Phys. Rev. Lett.* 75, 3969–3973 (1995).
- [17] M. H. Anderson, J. R. Ensher, M. R. Matthews, C. E. Wieman und E. A. Cornell. Observation of Bose-Einstein Condensation in a Dilute Atomic Vapor. *Science* 269, 198–201 (1995).
- [18] Manuel Kreibich, Jörg Main, Holger Cartarius und Günter Wunner. Hermitian four-well potential as a realization of a \mathcal{PT} -symmetric system. *Physical Review A* 87, 051601(R) (2013).
- [19] Andreas Löhle. *Stabilitätslücke bei \mathcal{PT} -symmetrischen Bose-Einstein-Kondensaten*. Bachelorarbeit, Universität Stuttgart (2013).

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich bei allen bedanken, die mich bei der Zusammenstellung dieser Bachelorarbeit unterstützt haben.

Mein Dank geht vor allem an Dr. Holger Cartarius und Prof. Dr. Jörg Main für die ausgesprochen gute Betreuung. Ich konnte mich bei jeglichen Fragen zur Bearbeitung und zum Thema mit freundlicher Unterstützung an sie wenden. Eigene Ideen für die Erweiterung der Fragestellung wurden ausgiebig diskutiert und meine Ansätze wurden durch konstruktive Kritik ergänzt. Außerdem wurden die Daten aus [7, 8] zum Vergleich mit den Ergebnissen dieser Arbeit mit freundlicher Genehmigung bereitgestellt. Bedanken möchte ich mich auch bei Fabian Single, der mir ebenfalls bei jeglichen Fragen zum Thema und bezüglich der Probleme, die beim Programmieren vorkommen können, helfen konnte.

Zuletzt möchte ich mich auch bei meiner Freundin Nathalie und meiner Familie für die gute Unterstützung während des Studiums bedanken.

Ehrenwörtliche Erklärung

Ich erkläre,

- dass ich diese Bachelorarbeit selbständig verfasst habe,
- dass ich keine anderen als die angegebenen Quellen benutzt und alle wörtlich oder sinngemäß aus anderen Werken übernommenen Aussagen als solche gekennzeichnet habe,
- dass die eingereichte Arbeit weder vollständig noch in wesentlichen Teilen Gegenstand eines anderen Prüfungsverfahrens gewesen ist,
- dass ich die Arbeit weder vollständig noch in Teilen bereits veröffentlicht habe, es sei denn, der Prüfungsausschuss hat die Veröffentlichung vorher genehmigt
- und dass der Inhalt des elektronischen Exemplars mit dem des Druckexemplars übereinstimmt.

Stuttgart, den 24. Februar 2014

Helmut Frasch