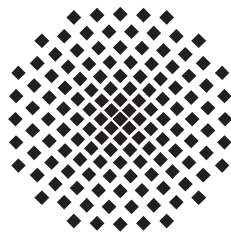


# $\mathcal{PT}$ -symmetrische nichtlineare Metamaterialien

Bachelorarbeit von  
**Sascha Böhrkircher**

21. August 2015

Prüfer: Prof. Dr. Günter Wunner



1. Institut für Theoretische Physik  
Universität Stuttgart  
Pfaffenwaldring 57, 70550 Stuttgart



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1	Motivation und Einführung in das Thema . . . . .	1
1.2	Aufbau der Arbeit . . . . .	2
<b>2</b>	<b>Metamaterialien</b>	<b>5</b>
2.1	Split-Ring-Resonator . . . . .	5
2.2	Dimer . . . . .	6
2.3	Nichtlinearität . . . . .	7
2.3.1	Kerr-Effekt . . . . .	8
<b>3</b>	<b>Jones-Formalismus</b>	<b>9</b>
3.1	Polarisation . . . . .	9
3.2	Jones-Matrizen . . . . .	10
3.3	Transmittierte E-Felder . . . . .	11
<b>4</b>	<b><math>\mathcal{PT}</math>-Symmetrie</b>	<b>13</b>
4.1	$\mathcal{PT}$ -Operator . . . . .	13
4.2	$\mathcal{PT}$ -symmetrische Systeme . . . . .	14
4.2.1	Lineare Systeme . . . . .	15
4.2.2	Nichtlineare Systeme . . . . .	16
4.2.3	Optische Systeme . . . . .	18
<b>5</b>	<b>Gross-Pitaevskii Gleichung (GPE)</b>	<b>21</b>
5.1	Herleitung . . . . .	21
5.2	Die Gross-Pitaevskii-Gleichung in dimensionslosen Größen . . . . .	24
5.3	Lösung der Gross-Pitaevskii-Gleichung in einem Zwei-Moden-System . . . . .	25
<b>6</b>	<b>Frequenzbestimmung eines <math>\mathcal{PT}</math>-symmetrischen nichtlinearen Metamaterials</b>	<b>29</b>
6.1	Analytische Lösung für einen Spezialfall . . . . .	30
6.2	Numerische Lösung im allgemeinen Fall . . . . .	31
<b>7</b>	<b>Polarisationseigenzustände eines linearen <math>\mathcal{PT}</math>-symmetrischen Metamaterials</b>	<b>35</b>
<b>8</b>	<b>Polarisationseigenzustände eines nichtlinearen <math>\mathcal{PT}</math>-symmetrischen Metamaterials</b>	<b>43</b>

<b>9 Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>51</b>
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>53</b>
<b>Danksagung</b>	<b>55</b>

# 1 Einleitung

## 1.1 Motivation und Einführung in das Thema

In der Quantenmechanik ist die Verallgemeinerung von hermiteschen Systemen zu  $\mathcal{PT}$ -symmetrischen Systemen, welche statt rein reeller auch komplexe Potentiale zulassen, schon länger bekannt. Diese  $\mathcal{PT}$ -Symmetrie wurde von Bender und Boettcher 1998 in der Quantenmechanik eingeführt durch die Ersetzung der mathematischen Forderung nach Hermitizität durch die physikalischere Forderung nach Spiegelung- (Parität) und Zeitumkehrinvarianz [1]. Dabei bildet  $\mathcal{P}$  den Paritätsoperator der das quantenmechanische System spiegelt und  $\mathcal{T}$  den Zeitumkehroperator der den zeitlichen Verlauf der quantenmechanischen Prozesse umkehrt. Damit ein System die  $\mathcal{PT}$ -Symmetrie erfüllt muss der jeweilige Hamiltonoperator des Systems mit dem aus Paritätsoperator und Zeitumkehroperator verknüpften  $\mathcal{PT}$ -Operator kommutieren. Es soll also gelten  $[\mathcal{PT}, H] = 0$ . Bei dem Übergang von hermiteschen zu  $\mathcal{PT}$ -symmetrischen Systemen geht allerdings die quantenmechanische Forderung nach rein reellen Eigenwerten verloren, wodurch es Bereiche in den  $\mathcal{PT}$ -symmetrischen Systemen geben kann, welche komplexe Eigenwerte besitzen. Der Übergang in einen solchen Bereich wird als  $\mathcal{PT}$ -Symmetrie-Brechung bezeichnet. Der Grund dahinter ist, dass in  $\mathcal{PT}$ -symmetrischen Quantensystemen reelle Eigenwerte immer zu Wellenfunktionen gehören, welche selbst  $\mathcal{PT}$ -symmetrisch sind, während komplexe Eigenwerte sich für Wellenfunktionen ergeben, die im Gegensatz zum Hamiltonoperator nicht  $\mathcal{PT}$ -symmetrisch sind. Die  $\mathcal{PT}$ -Symmetrie des Systems ist dort also spontan gebrochen. Allerdings konnte diese Brechung in quantenmechanischen Systemen bis jetzt noch nicht nachgewiesen werden. Dagegen wurden in  $\mathcal{PT}$ -symmetrischen optischen Systemen, die eine formale Äquivalenz zur Quantenmechanik besitzen, diese Symmetrie-Brechung bereits experimentell nachgewiesen [2]. Eine aktuelle Möglichkeit bietet der Bereich der Metamaterialien, der es erlaubt, optische Eigenschaften künstlich herzustellen, die in der Natur so in Festkörpern nicht auftreten, wie z.B. ein negativer Brechungsindex. Dies geschieht über Subwellenlängenstrukturen, in der Form von elektrischen Schwingkreisen, welche eine Art Elementarzellen des Metamaterial-Festkörpers bilden.

Die Interaktion dieser Subwellenlängenstrukturen mit elektromagnetischen Wellen lässt sich analog zur Interaktion von Atomen mit elektromagnetischen Wellen durch einen Lorentz-Dipol beschreiben. Die Lorentz-Dipole der Subwellenlängenstruktur können nun allerdings durch Veränderung der elektrischen Schwingkreise völlig neue, in Atomen nicht existente Eigenschaften aufzuweisen. Z.B. kann durch eine Tunnelodiode erreicht werden,

dass der Schwingkreis einen negativen Widerstand besitzt. Werden nun zwei Schwingkreise, einer mit einem negativen und einer mit einem positiven Widerstand, zusammengesetzt, lässt sich daraus ein  $\mathcal{PT}$ -symmetrisches optisches System konstruieren, wodurch Metamaterialien hervorragend geeignet sind, um die Eigenschaften  $\mathcal{PT}$ -symmetrischer quantenmechanischer Systeme abzubilden [2].

Diese enge Verbundenheit der Quantenmechanik mit der Optik wurde zum Anlass genommen, dass sich auch optische Systeme mit bereits bekannten quantenmechanischen Lösungsverfahren bearbeiten lassen [3]. Auf diese Weise lassen sich optische Systeme mit  $\mathcal{PT}$ -symmetrischen Metamaterialien genauso lösen wie quantenmechanische  $\mathcal{PT}$ -symmetrische Systeme mit einem komplexen Potential. Im Bereich der Eigenpolarisation von  $\mathcal{PT}$ -symmetrischen Metamaterialien wurde bereits das lineare optische System mittels des quantenmechanischen Lösungsverfahrens der Schrödingergleichung untersucht [2].

Da viele optische Materialien eine elektrooptische Nichtlinearität, speziell meistens eine Kerr-Nichtlinearität, aufweisen, wirft dies nun die Frage auf, wie sich die Eigenpolarisation eines  $\mathcal{PT}$ -symmetrischen nichtlinearen Metamaterials im Gegensatz zum linearen Fall verändert. Dazu wird eine Kerr-Nichtlinearität  $g|E|^2$  in die Gleichung des Metamaterials eingebaut. Dies ergibt sich in der Praxis durch geeignete Wahl der elektrischen Schwingkreisanteile. Durch die Erweiterung des Systems um die Kerr-Nichtlinearität  $g|E|^2$  besitzt das optische Polarisationsystem nun eine formale Äquivalenz zu einer Zwei-Moden-Näherung des Bose-Einstein Kondensats, wodurch sich das  $\mathcal{PT}$ -symmetrische optische nichtlineare System über das quantenmechanische Lösungsverfahren für Bose-Einstein Kondensate, der erweiterten Schrödingergleichung oder Gross-Pitaevskii-Gleichung, lösen lässt. Das Ziel dieser Bachelorarbeit ist das Bestimmen der Eigenpolarisationen eines  $\mathcal{PT}$ -symmetrischen nichtlinearen Metamaterials, mit einer Kerr-Nichtlinearität  $g|E|^2$ , über das Lösen der Gross-Pitaevskii-Gleichung für ein Zwei-Moden Bose-Einstein Kondensat, welches bereits in [4] gelöst wurde, und das Vergleichen der erhaltenen nichtlinearen Eigenpolarisationen mit denen aus dem linearen Fall.

## 1.2 Aufbau der Arbeit

- Kapitel 2 behandelt die grundlegenden Eigenschaften und den Aufbau von Metamaterialien sowie die Aufstellung der mathematischen Modelle des Metamaterials darüber hinaus wird auf die Einführung einer Nichtlinearität in Metamaterialien und deren Ursprung eingegangen.
- Kapitel 3 beschreibt den Jones-Formalismus, welcher zur Bestimmung des Polarisationsverhaltens von optischen Objekten verwendet wird.
- Kapitel 4 befasst sich mit den Eigenschaften von  $\mathcal{PT}$ -symmetrischen Operatoren

und den daraus resultierenden Eigenschaften für lineare, nichtlineare Quantensysteme und im Speziellen für optische Systeme.

- In Kapitel 5 wird die Gross-Pitaevskii-Gleichung anhand des mathematischen Modells eines Bose-Einstein-Kondensates hergeleitet und für ein Zwei-Moden Bose-Einstein-Kondensat gelöst.
- Kapitel 6 bestimmt die Frequenz eines nichtlinearen  $\mathcal{PT}$ -symmetrischen Metamaterials, in Form einer Dimerkette, über eine numerische mehrdimensionale Nullstellensuche und in einem Spezialfall über eine analytische Rechnung.
- Kapitel 7 beschäftigt sich mit der Bestimmung der Eigenpolarisationen eines linearen  $\mathcal{PT}$ -symmetrischen Metamaterials über eine formäquivalente quantenmechanische Rechnung.
- Kapitel 8 beinhaltet die Erweiterung des mathematischen Modells des linearen  $\mathcal{PT}$ -symmetrischen Metamaterials zu einem nichtlinearen  $\mathcal{PT}$ -symmetrischen Metamaterial mit Kerr-Nichtlinearität  $g|E|^2$  sowie die Bestimmung der Eigenpolarisationen dieses nichtlinearen Systems im Vergleich zum linearen System.





## 2 Metamaterialien

Metamaterialien sind künstlich geschaffene periodische Subwellenlängenstrukturen [2], welche bezüglich der Eigenschaft der E- und B-Feld-Ausbreitung in diesem Material die Aufgabe der Atome in normalen Festkörper übernehmen. Mittels dieser künstlichen Subwellenlängenstruktur lassen sich Eigenschaften kreieren, die in normalen Festkörpern nicht auftreten können, z.B. einen negativen Brechungsindex oder große Chiralität [2].

### 2.1 Split-Ring-Resonator

Diese Subwellenlängenstrukturen sind in der Form von SRR (Split Ring Resonators) aufgebaut. SRR sind ringförmige leitende Strukturen mit einem Spalt, sodass dieser Spalt als Kondensator und der Rest als Spule aufgefasst werden kann. Die SRR lassen sich auf zwei unterschiedliche Arten beschreiben. Einmal über das Modell eines elektrischen Schwingkreises [5],

$$L\ddot{Q} + R\dot{Q} + \frac{Q}{C} = U_0 e^{i\omega t}, \quad (2.1)$$

oder über das Modell eines Lorentz-Oszillators, welches normalerweise zur Beschreibung der Interaktion von Atomen mit E-Feldern benutzt wird [5],

$$m(\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x) = qE e^{i\omega t}. \quad (2.2)$$

Da die SRRs wie elektrische Schwingkreise aufgebaut sind, ist es leicht einzusehen, dass Gleichung (2.1) zur Beschreibung gewählt werden kann. Um zu sehen, dass ebenfalls Gleichung (2.2) als Modell verwendet werden kann, wird Gleichung (2.1) etwas umgeformt,

$$\ddot{Q}x + \frac{R}{L}\dot{Q}x + \frac{Q}{L \cdot C}x = \frac{d \cdot E}{L}x e^{i\omega t}, \quad (2.3)$$

ebenso wie Gleichung (2.2),

$$Q\ddot{x} + Q\gamma\dot{x} + Q\omega_0^2 x = \frac{Q^2}{m}E e^{i\omega t}. \quad (2.4)$$

Durch Gleichung (2.3) und (2.4) ist zu erkennen dass der Unterschied zwischen dem elektrischen Schwingkreis (2.1) und dem Lorentz-Oszillator (2.2) lediglich darin besteht dass sich beim elektrischen Schwingkreis die Ladung an einem bestimmten Ort verändert, sobald ein oszillierendes E-Feld angelegt wird, und sich beim Lorentz-Oszillator der Ort

einer bestimmten Ladung in einem oszillierenden E-Feld verändert. Effektiv beschreiben beide Prozesse einen schwingenden Dipol. Aus dieser Erkenntnis lässt sich verifizieren das der Lorentz-Oszillator als geeignetes Modell der SRR dienen kann.

## 2.2 Dimer

Metamaterialien entstehen erst durch die Anordnung vieler Split-Ring-Resonatoren zu einem gemeinsamen Festkörper. Jeweils zwei SRR können zusammen einen Dimer bilden, wobei diese Dimere die Elementarzellen des Metamaterial bilden, das Analogon der Einheitszelle im Festkörper. Wir möchten uns hier mit einer speziellen Struktur beschäftigen, die in [2] vorgeschlagen wurde die auf ein  $\mathcal{PT}$ -symmetrisches System führt. Dadurch unterscheiden sich die beiden Dimer SRR darin das der eine einen gewissen Verlust hat während der andere einen entgegen gesetzt hohen Zugewinn hat,  $\gamma_1 = \gamma_2$ .

$$\begin{aligned}\ddot{x}_1 - \gamma_1 \dot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 &= \frac{q}{m} E e^{i\omega t} \\ \ddot{x}_2 + \gamma_2 \dot{x}_2 + \omega_0^2 x_2 &= \frac{q}{m} E e^{i\omega t}\end{aligned}\tag{2.5}$$

Dieser Zugewinn kann auf zwei Weisen erreicht werden. Eine Möglichkeit besteht darin, von einem rein verlustbehafteten System auszugehen und die beiden Verlustwerte so zu wählen, dass sie unterschiedlich stark sind, z.B.  $\gamma_2 > \gamma_1$ . Dadurch lässt sich das Modell so zerlegen, dass es wie ein System mit Zuwachs und Verlust behandelt werden kann, das eingebettet in einem verlustbehafteten Hintergrund ist.

$$\begin{aligned}\ddot{x}_1 + \gamma_1 \dot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 &= \frac{q}{m} E e^{i\omega t} \\ \ddot{x}_2 + \gamma_2 \dot{x}_2 + \omega_0^2 x_2 &= \frac{q}{m} E e^{i\omega t} \\ \ddot{x}_1 + \left[ \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2} - \frac{\gamma_2 - \gamma_1}{2} \right] \dot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 &= \frac{q}{m} E e^{i\omega t} \\ \ddot{x}_2 + \left[ \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2} + \frac{\gamma_2 - \gamma_1}{2} \right] \dot{x}_2 + \omega_0^2 x_2 &= \frac{q}{m} E e^{i\omega t}\end{aligned}\tag{2.6}$$

Dabei bilde  $\Gamma = (\gamma_2 - \gamma_1)/2$  den Verlust- und Zuwachsterm des neuen Systems und  $(\gamma_1 + \gamma_2)/2$  den Verlust des Hintergrunds, in den das System eingebettet ist [2].

Die andere Variante ist der explizite Zugewinn durch externe Energiezufuhr. Dies wird durch das Verwenden einer Tunnelodiode (Esaki-Diode), welche einen negativen Widerstand  $R$  liefert, erreicht. Durch den negativen Widerstand  $R$  wird, verglichen mit den Gleichungen (2.2)-(2.4), der eigentliche Verlust des Lorentz-Oszillators zu einem

Zuwachs [6, 7] .

$$\begin{aligned}\ddot{Q}x - \frac{R}{L}\dot{Q}x + \frac{Q}{L \cdot C}x &= \frac{d \cdot E}{L}x e^{i\omega t} \\ Q\ddot{x} - Q\gamma\dot{x} + Q\omega_0^2x &= \frac{Q^2}{m}E e^{i\omega t} \\ \ddot{x} - \gamma\dot{x} + \omega_0^2x &= \frac{q}{m}E e^{i\omega t}\end{aligned}$$

Somit lässt sich ein Dimer über ein gekoppeltes Differentialgleichungssystem zweier Lorentz-Oszillatoren beschreiben. Die beiden SRRs sind elektrisch und magnetisch über Dipol-Dipol-Kräfte gekoppelt. In folgender Gleichung werden sie durch  $M_{12}$ ,  $E_{12}$ ,  $M_{21}$ ,  $E_{21}$  dargestellt. Dazu kommt noch eine Fernkopplung von den weiter entfernten SSRs, die je nach Modell explizit betrachtet werden oder zu einer Fernkraft  $M_F, E_F$  zusammen gefasst werden [2, 6].

$$\begin{aligned}\ddot{x}_1 + M_{12}\ddot{x}_2 + M_{F1}(\ddot{x}_1, \ddot{x}_2) - \gamma_1\dot{x}_1 + \omega_0^2x_1 + E_{12}x_2 + E_{F1}(x_1, x_2) &= \frac{q}{m}E e^{i\omega t} \\ \ddot{x}_2 + M_{21}\ddot{x}_1 + M_{F2}(\ddot{x}_1, \ddot{x}_2) + \gamma_2\dot{x}_2 + \omega_0^2x_2 + E_{21}x_1 + E_{F2}(x_1, x_2) &= \frac{q}{m}E e^{i\omega t}\end{aligned}\quad (2.7)$$

Aufgrund der Periodizität des Metamaterials genügt es oft, das Verhalten eines einzigen Dimers zu betrachten um Rückschlüsse auf das ganze Material zu erhalten.

## 2.3 Nichtlinearität

Die allgemeine Nichtlinearität bei Metamaterialien kommt von der Nichtlinearität der verwendeten Kondensatoren oder dem verwendeten Varaktor einer Kapazitätsdiode in den SRRs. Diese Nichtlinearität bei Plattenkondensatoren  $C(U) = \varepsilon_o\varepsilon_r(U)\frac{A}{d} = \varepsilon_r(U)C_0$  entsteht durch das Einsetzen eines Dielektrikums welches einen nichtlinearen Wert  $\varepsilon_r(U)$  besitzt [8]. Somit lässt sich die Ladung  $Q$  des Kondensators schreiben als

$$Q(U_D) = \int_{U_P}^{U_D} C_0\varepsilon_r(U) dU, \quad (2.8)$$

wobei  $U_P$  das intrinsische Potential beschreibt. Mit  $E_r$  als Stammfunktion von  $\varepsilon_r$  und

$$Q(U_D) = C_0[E_r(U_D) - E_r(U_P)]$$

durch  $q = \frac{Q(U_D)}{U_P C_0}$  und  $u = \frac{U_D}{U_P}$  wird das ganze auf eine einheitenlos Form gebracht.

$$\begin{aligned}q &= \frac{1}{U_P}[E_r(u) - E_r(U_P)] \\ u &= E_r^{-1}\left(q + \frac{E_r(U_P)}{U_P}\right) \approx \sum_{n=0}^{\infty} \frac{E_r^{-1(n)}\left(\frac{E_r(U_P)}{U_P}\right)}{n!} q^n\end{aligned}$$

Dazu muss  $\varepsilon_r$  ein Diffeomorphismus sein.

Dadurch erweitert sich die bekannte Bewegungsgleichung um nichtlineare Terme [9].

$$L\ddot{Q} + R\dot{Q} + U_P \sum_{n=0}^{\infty} \frac{E_r^{-1(n)} \left( \frac{E_r(U_P)}{U_P} \right)}{n!} \left( \frac{Q}{C_0 U_P} \right)^n = U_0 e^{i\omega t} \quad (2.9)$$

### 2.3.1 Kerr-Effekt

Der elektrooptische Kerr-Effekt ist eine spezielle Form der Nichtlinearität in der Optik. Dieser Effekt beschreibt eine Nichtlinearität in der Polarisierung  $\vec{P}$ , die proportional zu  $|\vec{E}|^2$ , dem angelegten E-Feld ist [10].

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \chi^{(1)} \vec{E} + \varepsilon_0 \chi^{(3)} |\vec{E}|^2 \vec{E} \quad (2.10)$$

Durch Umformen von Gleichung (2.10) und Identifikation mit Gleichung (2.9) lässt sich die Differentialgleichung des Lorentz-Oszillators mit dem nichtlinearen Term des Kerr-Effektes aufstellen [11]. Als Ansatz verwendet man in einer Näherung  $x = x_L + x_{NL}$ , wobei  $x_L$  die lineare Lösung bildet und  $x_{NL}$  der nichtlineare Zusatz ist. Die Differentialgleichung lautet

$$m(\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x + |x|^2 x) = qE e^{i\omega t} .$$

Durch lösen des linearen Teils,

$$x_L = \frac{q}{m((\omega_0^2 - \omega^2) + i\omega\gamma)} E e^{i\omega t} ,$$

folgt für den nichtlinearen

$$\ddot{x}_{NL} + \gamma\dot{x}_{NL} + \omega_0^2 x_{NL} = -\alpha |x|^2 x$$

dies ist näherungsweise

$$\ddot{x}_{NL} + \gamma\dot{x}_{NL} + \omega_0^2 x_{NL} \approx -\alpha |x_L|^2 x_L .$$

Daraus ergibt sich

$$x_{NL} = \frac{|x_L|^2 x_L}{(\omega_0^2 - \omega^2) + i\omega\gamma} = \frac{\left| \frac{q}{m((\omega_0^2 - \omega^2) + i\omega\gamma)} \right|^2 |E|^2 \frac{q}{m((\omega_0^2 - \omega^2) + i\omega\gamma)} E e^{i\omega t}}{(\omega_0^2 - \omega^2) + i\omega\gamma}$$

$$P = \frac{q^2 n_e}{m((\omega_0^2 - \omega^2) + i\omega\gamma)} E e^{i\omega t} + \frac{\left| \frac{q}{m((\omega_0^2 - \omega^2) + i\omega\gamma)} \right|^2 |E|^2 \frac{q^2 n_e}{m((\omega_0^2 - \omega^2) + i\omega\gamma)} E e^{i\omega t}}{(\omega_0^2 - \omega^2) + i\omega\gamma}$$

oder in vektorieller Darstellung

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \chi^{(1)} \vec{E} + \varepsilon_0 \chi^{(3)} |\vec{E}|^2 \vec{E} .$$

Durch geeignete Wahl der Kondensatoren der SRRs müsste sich eine Kerr-Nichtlinearität auch bei Metamaterialien finden lassen.

# 3 Jones-Formalismus

Der Jones-Formalismus wird dazu benutzt die Polarisationsänderung von elektromagnetischen Wellen zu beschreiben, nachdem diese ein Medium passiert haben. In diesem konkreten Fall interessieren wir uns für die Eigenpolarisationen von Metamaterialien.

## 3.1 Polarisation

Die Polarisation von elektromagnetischen Wellen wird durch die Orientierung des E-Feldes in der Polarisationssebene, die Senkrecht zur der Ausbreitungsrichtung steht, beschrieben.

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} E_x e^{i\varphi_x} \\ E_y e^{i\varphi_y} \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

Die expliziten Winkel  $\varphi_x, \varphi_y$  sind nicht relevant, lediglich die Differenz der beiden, da sich  $\varphi_x$  als globale Phase herausziehen lässt, sodass

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y e^{i(\varphi_y - \varphi_x)} \end{pmatrix}. \quad (3.2)$$

Um das E-Feld nun in der Polarisationssebene zu beschreiben, wird dem schwingenden elektrischen Feld ein normierter Vektor aus dem  $\mathbb{R}^2$  zugeordnet, ein sogenannter Jones-Vektor.

$$J = \begin{pmatrix} J_x \\ J_y \end{pmatrix} = \frac{1}{|E|} \begin{pmatrix} E_x e^{i\varphi_x} \\ E_y e^{i\varphi_y} \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

Sind sowohl  $E_x$  als auch  $E_y$  reell oder imaginär, so ist die elektromagnetische Welle linear polarisiert. Ist nur eine der beiden Komponenten imaginär so ist die Welle elliptisch oder zirkular polarisiert. Eine zirkulare Polarisation liegt vor wenn  $|J_x| = |J_y|$  ist. Bei der Einführung des Jones-Formalismus für ein System wird in diesem eine X- und eine Y-Achse definiert, bezüglich welcher operiert wird. Somit entstehen folgende Formen für die einzelnen Polarisationsmöglichkeiten.

$$\begin{aligned} \text{Lineare Polarisation} \quad J &= \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix}, \\ \text{zirkulare Polarisation} \quad J &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \pm i \end{pmatrix}, \\ \text{elliptische Polarisation} \quad J &= \frac{1}{|E_0|} \begin{pmatrix} E_{x,0} \\ \pm i E_{y,0} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (3.4)$$

wobei das Plus bei der elliptischen und zirkular polarisierten Welle für rechtszirkular bzw -elliptisch steht und das Minus für linkszirkular bzw -elliptisch. Der Winkel  $\varphi$  der linear polarisierten Welle gibt an, um wie viele Grad diese gegenüber der x-Achse verdreht ist [8, 10].

## 3.2 Jones-Matrizen

Wenn die elektromagnetische Welle auf ein optisches Element wie einen Polarisator, eine Linse oder einen Festkörper trifft, kann sich die Polarisation der elektromagnetischen Welle ändern. Dabei wird die Schwingungsrichtung des E-Feldes geändert. Diese Änderung der Schwingungsrichtung des E-Feldes kann für jedes optische Element über eine zweidimensionale Matrix ausgedrückt werden, eine sogenannte Jones-Matrix. Dabei gibt es unterschiedliche Arten von Matrizen in diesem Formalismus:

- Polarisationsmatrizen sind von der Form

$$\begin{pmatrix} \cos^2(\varphi) & \cos(\varphi)\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi)\sin(\varphi) & \sin^2(\varphi) \end{pmatrix}. \quad (3.5)$$

Dabei beschreibt der Winkel  $\varphi$ , wie stark der Polarisationswinkel gegenüber der  $x$ -Achse verdreht wird. Bei Polarisierungen kann ein Teil der Intensität verloren gehen. Dies zeigt sich in diesem Formalismus daran, dass die resultierenden Jones-Vektoren nicht mehr normiert sind, sondern  $|J| < 1$  gilt.

- Drehmatrizen sind von der Form

$$\begin{pmatrix} \cos(\beta) & \sin(\beta) \\ -\sin(\beta) & \cos(\beta) \end{pmatrix}, \quad (3.6)$$

wobei  $\beta$  den Winkel beschreibt um den die Polarisation gedreht wird. Bei Drehmatrizen bleibt die Normierung des Jones-Vektors durch die Transformation erhalten.

- Verzögerungsmatrizen sind von der Form

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\vartheta} \end{pmatrix}. \quad (3.7)$$

Die Variable  $\vartheta$  beschreibt diesmal eine zeitliche Verschiebung zwischen  $J_x$  und  $J_y$ . Die Normierung des Jones-Vektors bleibt den Verzögerungsmatrizen erhalten.

Zu beachten ist dabei, dass in Festkörpern oder künstlich erstellten Strukturen wie Metamaterialien keine klare Trennung mehr zwischen Drehmatrizen und Verzögerungsmatrizen existieren, da diese Materialien beide Eigenschaften aufweisen können. Die Eigenvektoren der Jones-Matrizen geben die elektromagnetischen Wellen an, die sich ohne Änderung durch die Struktur ausbreiten.

### 3.3 Transmittierte E-Felder

Für komplexere Materialien mit der Dicke nur einer Schicht lassen sich die transmittierten elektrischen Felder über die Dipolantworten der Strukturelemente bestimmen [2, 12], denn in diesem Fall lässt sich das durch das Material transmittierte E-Feld mit  $\vec{E}_t$  durch das Dipolfeld eines einzelnen dieser Strukturelemente beschreiben. Diese Betrachtung ist möglich aufgrund der Periodizität des Festkörpers, wodurch auf alle Strukturelemente näherungsweise die selben externen Einflüsse wirken. Somit liegen lokal über den gesamten Festkörper verteilt die selben E-Felder vor. Allgemein gilt für eine Platte zwischen zwei Plattenkondensatoren in Lorentz-Näherung das [13]

$$\vec{E}_{\text{loc}} = \vec{E}_{\text{ext}} + \frac{\vec{P}}{3\varepsilon_0}. \quad (3.8)$$

Daran ist zu erkennen, dass das lokale E-Feld  $\vec{E}_{\text{loc}}$  sich als Superposition des angelegten E-Feldes  $\vec{E}_{\text{ext}}$  und des durch die Dipole gestreuten  $\vec{P}/(3\varepsilon_0)$  beschreiben lässt.

Auf ähnliche Weise wurde diese Relation für ebene Dipolarrays [2, 12] gezeigt, wobei dies lediglich für einen linearen Polarisierbarkeitsfaktor  $\alpha$  gilt. Mit der Jones-Matrix  $\overleftrightarrow{M}$  lautet die zugehörige Gleichung

$$\begin{pmatrix} \tilde{E}_{tx} \\ \tilde{E}_{ty} \end{pmatrix} = \overleftrightarrow{M} \begin{pmatrix} \tilde{E}_x \\ \tilde{E}_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{E}_x \\ \tilde{E}_y \end{pmatrix} + \frac{i\omega\eta_0}{2a^2} \begin{pmatrix} \tilde{p}_x \\ \tilde{p}_y \end{pmatrix}, \quad (3.9)$$

wobei  $a$  der Gitterabstand ist und  $\eta_0 = \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}$ . Da die Anwendung der Jones-Matrix eines optischen Elementes auf eine eintreffende Polarisation, die transmittierte Polarisation des optischen Elementes liefert und für einen Festkörper die transmittierte Polarisation durch die lokalen Dipolfelder der einzelnen Strukturelemente gegeben ist, lässt sich wie in Gleichung (3.9) beschreiben, der Jones-Formalismus mit Gleichung (3.8) gleich setzen. Dadurch lassen sich für dünne Festkörper die Jones-Matrizen über die gekoppelten Differentialgleichungen der Strukturelemente beschreiben. Dabei sollte beachtet werden, dass die E-Felder normiert sein müssen, damit sie dem Jones-Formalismus genügen.





# 4 $\mathcal{PT}$ -Symmetrie

## 4.1 $\mathcal{PT}$ -Operator

Der  $\mathcal{PT}$ -Operator besteht eigentlich aus zwei Operatoren, dem Paritätsoperator  $\mathcal{P}$  und dem Zeitumkehroperator  $\mathcal{T}$ . Die Operatoren transformieren wie folgt.

$$\begin{aligned} \mathcal{P} & \quad \hat{x} \rightarrow -\hat{x}, & \hat{p} & \rightarrow -\hat{p} \\ \mathcal{T} & \quad \hat{x} \rightarrow \hat{x}, & \hat{p} & \rightarrow -\hat{p}, & i & \rightarrow -i \end{aligned} \quad (4.1)$$

Dabei ist zu beachten, dass der Paritätsoperator linear ist und der Zeitumkehroperator antilinear. Für den antilinearen Zeitumkehroperator gilt:

$$\begin{aligned} T(f + g) &= T(f) + T(g) \\ T(\lambda f) &= \bar{\lambda}T(f) \end{aligned}$$

Somit ist die Additivität genauso wie beim linearen Operator erfüllt, wohingegen die Homogenität im Gegensatz zum linearen Operator verletzt ist.

Der  $\mathcal{PT}$ -Operator ist eine nacheinander Ausführung des  $\mathcal{P}$  und  $\mathcal{T}$ -Operators und transformiert somit wie folgt.

$$\mathcal{PT} \quad \hat{x} \rightarrow -\hat{x}, \quad \hat{p} \rightarrow \hat{p}, \quad i \rightarrow -i \quad (4.2)$$

Zur Berechnung der Eigenwerte des  $\mathcal{PT}$ -Operators wird dieser zweimal auf einen Eigenzustand  $|\Psi\rangle$  angewandt.

$$(\mathcal{PT})(\mathcal{PT})|\Psi\rangle = (\mathcal{PT})\lambda|\Psi\rangle = \lambda^*(\mathcal{PT})|\Psi\rangle = \lambda^*\lambda|\Psi\rangle = |\lambda|^2|\Psi\rangle$$

Durch die Konstruktion des  $\mathcal{PT}$ -Operators ist zu erkennen, dass bei zweifacher Ausführung der Zustand in sich selbst überführt wird. Dadurch folgt

$$|\lambda|^2 = 1 \Rightarrow \lambda = e^{i\varphi} . \quad (4.3)$$

Durch die doppelte Anwendung des  $\mathcal{PT}$ -Operators auf seinen Eigenzustand wird klar, dass die Eigenwerte  $\lambda$  komplex sind und den Betrag  $|\lambda| = 1$  haben. Diese komplexen Eigenwerte  $\lambda$  lassen sich nun durch das Einfügen einer Phasenverschiebung  $e^{-i\gamma}$  nach

belieben Umformen.

$$\begin{aligned}
 \mathcal{PT}|\Psi\rangle &= e^{i\varphi}|\Psi\rangle \\
 e^{-i\gamma}\mathcal{PT}|\Psi\rangle &= e^{-i\gamma}e^{i\varphi}|\Psi\rangle \\
 \mathcal{PT}e^{i\gamma}|\Psi\rangle &= e^{-i2\gamma}e^{i\varphi}e^{i\gamma}|\Psi\rangle \\
 \mathcal{PT}|\tilde{\Psi}\rangle &= e^{-i2\gamma}e^{i\varphi}|\tilde{\Psi}\rangle \\
 \mathcal{PT}|\tilde{\Psi}\rangle &= e^{i\varphi'}|\tilde{\Psi}\rangle
 \end{aligned}$$

Daraus lässt sich Schlussfolgern, dass für eine geschickte Wahl der Phasenverschiebung  $\gamma$  gilt, dass  $\varphi' = \varphi - 2\gamma = 0$ , wodurch sich die vorherige Gleichung wie folgt umformt.

$$\begin{aligned}
 \mathcal{PT}|\tilde{\Psi}\rangle &= |\tilde{\Psi}\rangle \\
 \Psi(\vec{r}) &= \Psi^*(-\vec{r})
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

Somit folgt aus den Gleichungen (4.3)-(4.4), dass alle Eigenzustände des  $\mathcal{PT}$ -Operators durch die Phasenwahl von  $\gamma$  ebenfalls  $\mathcal{PT}$ -symmetrisch sind [14].

## 4.2 $\mathcal{PT}$ -symmetrische Systeme

In der Quantenmechanik erfüllt ein System die Bedingung der  $\mathcal{PT}$ -Symmetrie wenn der entsprechende Hamilton-Operator  $\hat{H} = \hat{p}^2/(2m) + V(\vec{r})$  des Systems mit dem  $\mathcal{PT}$ -Operator kommutiert.

$$\begin{aligned}
 [\hat{H}, \mathcal{PT}] &= 0 \\
 \hat{H}\mathcal{PT} - \mathcal{PT}\hat{H} &= 0 \\
 \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\vec{r}) - \frac{\hat{p}^2}{2m} - V^*(-\vec{r}) &= 0 \\
 V(\vec{r}) &= V^*(-\vec{r})
 \end{aligned}$$

Daran ist sofort zu erkennen, dass die kinetische Energie die  $\mathcal{PT}$ -Symmetrie immer erfüllt, wohingegen sie lediglich für Potentiale  $V(\vec{r})$  erfüllt ist, bei welchen der Realteil eine gerade Funktion und im Imaginärteil eine ungerade Funktion des Orts  $\vec{r}$  ist. Dies ist eine Erweiterung der ursprünglichen Quantenmechanik, in welcher die Hermitizität des Hamilton-Operators gefordert wurde, damit die Eigenwerte des Hamilton-Operators stets reell sind. Nun können allerdings auch komplexe Eigenwerte zu den Eigenfunktionen des Hamilton-Operators auftreten. Deshalb sollte untersucht werden, ob der  $\mathcal{PT}$ -symmetrische-Operator wie der hermitsche eine Orthogonalbasis aus Eigenzuständen besitzt und ob er die Norm unter Zeitentwicklung erhält [14].

Orthogonalität: Für zwei Eigenzustände  $|\Psi_1\rangle, |\Psi_2\rangle$  mit Eigenwerten  $\lambda_1, \lambda_2$  gilt im hermiteschen System  $\langle\Psi_1|\Psi_2\rangle = 0$

$$\begin{aligned}\langle\Psi_1|\Psi_2\rangle &= \frac{1}{\lambda_2}\langle\Psi_1|\hat{H}\Psi_2\rangle \\ &= \frac{1}{\lambda_2}\langle\Psi_1|(\hat{H}^\dagger + 2i\text{Im}(V(\vec{r})))|\Psi_2\rangle \\ &= \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\langle\Psi_1|\Psi_2\rangle + \frac{2i}{\lambda_2}\langle\text{Im}(V(\vec{r}))|\Psi_2\rangle \\ \Rightarrow (\lambda_2 - \lambda_1)\langle\Psi_1|\Psi_2\rangle &= 2i\langle\Psi_1|\text{Im}(V(\vec{r}))|\Psi_2\rangle\end{aligned}$$

Somit ist die Orthogonalität in nichthermiteschen Systemen im Allgemeinen nicht erfüllt.

Normerhaltung: Für zwei Eigenzustände  $|\Psi_1\rangle, |\Psi_2\rangle$  gilt im hermiteschen System  $\frac{d}{dt}\langle\Psi_1|\Psi_2\rangle = 0$ .

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\langle\Psi_1|\Psi_2\rangle &= \langle\dot{\Psi}_1|\Psi_2\rangle + \langle\Psi_1|\dot{\Psi}_2\rangle \\ &= \langle\frac{\hat{H}}{i\hbar}\Psi_1|\Psi_2\rangle + \langle\Psi_1|\frac{\hat{H}}{i\hbar}\Psi_2\rangle \\ &= \langle\Psi_1|\frac{\hat{H}^\dagger}{(-i)\hbar}\Psi_2\rangle + \langle\Psi_1|\frac{\hat{H}}{i\hbar}\Psi_2\rangle \\ &= \frac{1}{i\hbar}\langle\Psi_1|(\hat{H} - \hat{H}^\dagger)\Psi_2\rangle \\ &= \frac{2}{\hbar}\langle\Psi_1|\text{Im}(V(\vec{r}))\Psi_2\rangle\end{aligned}$$

Daran ist zu erkennen, dass die Norm unter Zeitentwicklung in nichthermiteschen Systemen im Allgemeinen nicht erhalten ist [15].

### 4.2.1 Lineare Systeme

In diesem Fall wird ein linearer Hamilton-Operator  $\hat{H}$  mit einer Eigenfunktion  $\Psi$  und einem Eigenwert  $\mu$  betrachtet, wobei die Eigenwerte des Operators nicht entartet sind.

$$\hat{H}\Psi = \mu\Psi \tag{4.5}$$

Daraus ergibt sich unter Anwendung des  $\mathcal{PT}$ -Operators

$$\begin{aligned}\mathcal{PT}(\hat{H}\Psi) &= \mathcal{PT}(\mu\Psi) , \\ \hat{H}(\mathcal{PT}\Psi) &= \mu^*(\mathcal{PT}\Psi) .\end{aligned}$$

Daraus lässt sich schlussfolgern, dass wenn  $\Psi$  Eigenfunktion zum Eigenwert  $\mu$  ist, dass  $\mathcal{PT}\Psi$  Eigenfunktion zum Eigenwert  $\mu^*$  ist. Für  $\mathcal{PT}$ -symmetrische Eigenzustände  $\Psi$  mit Eigenwert des  $\mathcal{PT}$ -Operators  $\lambda$  folgt weiter,

$$\begin{aligned}\hat{H}(\mathcal{PT}\Psi) &= \mu^*(\mathcal{PT}\Psi) , \\ \hat{H}(\lambda\Psi) &= \mu^*(\lambda\Psi) , \\ \lambda(\hat{H}\Psi) &= \lambda\mu^*\Psi , \\ \mu\Psi &= \mu^*\Psi , \\ \mu &= \mu^* .\end{aligned}$$

Somit folgt daraus, dass für  $\mathcal{PT}$ -symmetrische Eigenzustände  $\Psi$  die Eigenwerte  $\mu$  immer reell sind. Die Umkehrung gilt ebenfalls, wie mit einer ähnlichen Rechnung gezeigt werden kann.

## 4.2.2 Nichtlineare Systeme

Im nichtlinearen Fall wird der Hamilton-Operator um einen nichtlinearen Term erweitert, zum Beispiel in der Gross-Pitaevskii Gleichung um  $g|\Psi|^2$ . Somit lässt er sich aufteilen in,

$$\hat{H} = \hat{H}_{\text{lin}} + \hat{H}_{\text{nonlin}} . \quad (4.6)$$

Für den nichtlinearen Anteil des Hamilton-Operators soll folgende Relation erfüllt sein,

$$\hat{H}_{\text{nonlin}} = f(\Psi) . \quad (4.7)$$

Ob der nichtlineare Hamilton-Operator nun  $\mathcal{PT}$ -symmetrisch ist, wird mittels des Kommutators überprüft.

$$\begin{aligned}[\hat{H}, \mathcal{PT}]\Psi &= [\hat{H}_{\text{lin}} + \hat{H}_{\text{nonlin}}, \mathcal{PT}]\Psi \\ &= [\hat{H}_{\text{lin}}, \mathcal{PT}] + [\hat{H}_{\text{nonlin}}, \mathcal{PT}] \\ &\stackrel{1}{=} [\hat{H}_{\text{nonlin}}, \mathcal{PT}]\Psi \\ &= \hat{H}_{\text{nonlin}}\mathcal{PT}\Psi - \mathcal{PT}\hat{H}_{\text{nonlin}}\Psi \\ &= f(\Psi)\mathcal{PT}\Psi - \mathcal{PT}f(\Psi)\Psi\end{aligned}$$

Die Gleichheit in der obigen Umformung die mit 1. markiert ist, ist erfüllt sobald das Potential des linearen Hamilton-Operator mit dem  $\mathcal{PT}$ -Operator kommutiert. Der nichtlineare Anteil wird nur Null wenn für die Funktion

$$\mathcal{PT}f(\Psi) = f(\mathcal{PT}\Psi) \quad (4.8)$$

erfüllt und die Eigenfunktion  $\Psi$  ebenfalls  $\mathcal{PT}$ -symmetrisch ist. Durch die  $\mathcal{PT}$ -Symmetrie der Eigenfunktion  $\Psi$  und der daraus folgenden Invarianz unter hinzufügen einer globalen Phase muss der nichtlineare Hamilton-Operator noch folgende Relation erfüllen.

$$f(\Psi) = f(e^{i\varphi}\Psi) \quad \varphi \in \mathbb{R} \quad (4.9)$$

Nun wird analog zum linearen Hamilton-Operator das Anwenden des  $\mathcal{PT}$ -Operators auf die Eigenwertgleichung  $\hat{H}\Psi = \mu\Psi$  untersucht. Dabei ist  $\Psi$  Eigenfunktion zum Eigenwert  $\mu$ .

$$\begin{aligned} [\hat{H}_{\text{lin}} + \hat{H}_{\text{nonlin}}]\Psi &= \mu\Psi \\ \mathcal{PT}[\hat{H}_{\text{lin}} + \hat{H}_{\text{nonlin}}]\Psi &= \mathcal{PT}\mu\Psi \\ \hat{H}_{\text{lin}}\mathcal{PT}\Psi + f(\mathcal{PT}\Psi)\mathcal{PT}\Psi &= \mu^*\mathcal{PT}\Psi \end{aligned} \quad (4.10)$$

Daraus folgt, für reelle  $\mu$  sind sowohl  $\Psi$  als auch  $\mathcal{PT}\Psi$  Eigenfunktionen zum Eigenwert  $\mu$ . Wenn  $\mu$  nicht-entartet ist, muss für  $\Psi$  gelten

$$\mathcal{PT}\Psi = e^{i\varphi}\Psi .$$

Wird diese Relation in Gleichung (4.10) eingesetzt, folgt daraus

$$\begin{aligned} \hat{H}_{\text{lin}}e^{i\varphi}\Psi + f(e^{i\varphi}\Psi)e^{i\varphi}\Psi &= \mu^*e^{i\varphi}\Psi \\ [\hat{H}_{\text{lin}} + f(e^{i\varphi}\Psi)]e^{i\varphi}\Psi &= \mu^*e^{i\varphi}\Psi \end{aligned}$$

Somit gilt für den nichtlinearen Hamilton-Operator, dass  $\mathcal{PT}\Psi$  die Eigenfunktion zum Eigenwert  $\mu^*$  ist, analog zum linearen Fall, wenn folgenden Bedingungen erfüllt sind.

**1.** Die Funktion  $f(\Psi)$  erfüllt die Homogenitätsbedingung

$$\mathcal{PT}f(\Psi) = f(\mathcal{PT}\Psi) .$$

**2.** Die Funktion  $f(\Psi)$  muss unabhängig von der Phase der Wellenfunktion  $\Psi$  sein,

$$f(\Psi) = f(e^{i\varphi}\Psi) \quad \varphi \in \mathbb{R} .$$

Sind allerdings die Eigenschaft (4.8)-(4.9) erfüllt und die Eigenfunktionen  $\mathcal{PT}$ -symmetrisch folgt damit für das System

$$\begin{aligned} \mu^*\mathcal{PT}\Psi &= [\hat{H}_{\text{lin}} + f(\mathcal{PT}\Psi)]\mathcal{PT}\Psi \\ &= [\hat{H}_{\text{lin}} + f(e^{i\varphi}\Psi)]e^{i\varphi}\Psi \\ &= e^{i\varphi}[\hat{H}_{\text{lin}} + f(\Psi)]\Psi \\ &= e^{i\varphi}\mu\Psi \\ &= \mu\mathcal{PT}\Psi , \end{aligned}$$

also dass die Eigenwerte  $\mu$  immer reell sind. Damit lässt sich zusammenfassend sagen [15, 16]:

- 1.** Ist  $\Psi$  ein Eigenzustand zum Eigenwert  $\mu$  des nichtlinearen Hamilton-Operators  $\hat{H}$  so ist  $\mathcal{PT}\Psi$  ein Eigenzustand zum Eigenwert  $\mu^*$ .
- 2.** Ist  $\Psi$  eine  $\mathcal{PT}$ -symmetrische Eigenfunktion des nichtlinearen Hamilton-Operators, so ist der Eigenwert  $\mu$  reell.

### 4.2.3 Optische Systeme

In der Optik gibt es viele Analogien zur Quantenmechanik und im speziellen zur Schrödinger-Gleichung. Dadurch existieren auch  $\mathcal{PT}$ -symmetrische optische Systeme, die sich mittels der quantenmechanischen Herangehensweise bearbeiten lassen. Im speziellen gehören dazu die räumliche Beugung und die zeitliche Dispersion. Die Beugungssysteme werden durch einen Brechungsindex der Form  $n(x) = n_R(x) + in_I(x)$ , welcher als "optisches Potential" fungiert realisiert. Dabei beschreibt der Imaginärteil den Zuwachs bzw. Verlust des optischen Materials. Hier gelten für den Brechungsindex  $n(x)$  dieselben Anforderungen wie für das quantenmechanische Potential  $V(\vec{r})$  und zwar, dass der Realteil eine gerade Funktion und der Imaginärteil eine ungerade Funktion der Ortsvariablen  $x$  bilden.

$$n(x) = n^*(-x) \quad (4.11)$$

Unter diesen Bedingungen lässt sich die paraxiale Beugungsgleichung wie folgt aufstellen.

$$i \frac{\partial E}{\partial z} + \frac{1}{2k} \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + k_0 [n_R(x) + in_I(x)] E = 0, \quad (4.12)$$

wobei  $k_0 = 2\pi/\lambda$ ,  $k = k_0 n_0$ ,  $\lambda$  die Wellenlänge der elektromagnetischen Welle im Vakuum,  $n_0$  Brechungsindex des Materials ist. Dabei hat der Imaginärteil des Brechungsindex die Funktion der Verstärkung (Zuwachs) oder der Verminderung (Verlust) der Amplitude der elektromagnetischen Schwingung wenn sie durch das Material transmittiert. Dies lässt sich an der Wellenfunktion für eine elektromagnetische Welle nach dem Durchdringen eines Mediums sehen.

$$E(z) = E_0 e^{i\omega(t - \frac{z}{c})} \cdot e^{-i\omega(n-1)\frac{\Delta z}{c}}$$

$$E(z) = E_0 e^{i\omega(t - \frac{z}{c})} \cdot e^{\omega n_I \frac{\Delta z}{c}} \cdot e^{i\omega \frac{\Delta z}{c}}$$

Dabei ist  $\Delta z$  die Länge des Medium und  $n$  sein komplexer Brechungsindex [8]

In der Quantenmechanik ergibt sich eine ähnliche Zeitentwicklung der Zustände die als Schlussfolgerung zulassen, dass der Imaginärteil des Potentials einer Zunahme bzw. Abnahme der Eigenwellenfunktion entspricht. Dies ist als Quelle bzw. als Senke von Teilchen im quantenmechanischen System zu verstehen.

Um das optische Verhalten der Beugungssysteme besser verstehen zu können, wird das System im nächsten Schritt auf ein Elementarelement reduziert. So ein  $\mathcal{PT}$ -symmetrisches Elementarelement lässt sich mittels eines gekoppelten Systems realisieren, wobei einer der Kanäle optisch gepumpt wird, um einen Zuwachs  $\gamma_G$  zu erhalten, während der andere einen Verlust  $\gamma_L$  besitzt. Mit dieser Herangehensweise lässt sich für die gekoppelten

Wellenleiter eine gekoppelte Differentialgleichung aufstellen,

$$i\frac{dE_1}{dz} - i\gamma_{\text{Geff}}E_1 + \kappa E_2 = 0, \quad (4.13)$$

$$i\frac{dE_2}{dz} + i\gamma_{\text{Geff}}E_2 + \kappa E_1 = 0, \quad (4.14)$$

wobei  $E_{1,2}$  die jeweilige Amplitude in dem jeweiligen Kanal angibt,  $\kappa = \pi/(2L_c)$  ist die Kopplungskonstante mit der Kopplungslänge  $L_c$ ,  $\gamma_{\text{Geff}} = (\gamma_G - \gamma_L)/2 = \gamma$  der effektive Zuwachs ist, welcher aus  $\mathcal{PT}$ -symmetrischen Gründen vom Betrag gleich groß sein muss wie der effektive Verlust.

Da Metamaterialien ebenfalls aus gekoppelten Systemen mit Zuwachs und Verlust bestehen lässt sich diese gekoppelte Differentialgleichung hervorragend auf diese Anwenden, wodurch sich eine quantenmechanische Behandlung des System anbietet [3].





# 5 Gross-Pitaevskii Gleichung (GPE)

Die Gross-Pitaevskii Gleichung ist eine nichtlineare Verallgemeinerung der Schrödinger-Gleichung,

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi = \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V(\vec{r}, t) + g|\Psi|^2 \right] \Psi . \quad (5.1)$$

Dabei tritt der nichtlineare Term  $g|\Psi|^2$  in einer Mean-Field-Näherung der Vielteilchen-Schrödinger-Gleichung auf und resultiert aus der Wechselwirkung zwischen den Teilchen. Die GPE wird hauptsächlich zur Berechnung von Bose-Einstein-Kondensaten benutzt. In diesem Fall wollen wir allerdings die Analogie der Quantenmechanik zu Optik ausnutzen und mit dieser Gleichung ein optisches Problem lösen. Dies ist möglich da die optische Kerr-Nichtlinearität ebenfalls proportional ist zum Betragsquadrat der Wellenfunktion. Wodurch sich in einem optischen System eine äquivalente Gleichung aufstellen lässt.

## 5.1 Herleitung

Zur Herleitung der GPE wird ein Bose-Einstein-Kondensat betrachtet, welches aus Bosonen im Grundzustand besteht. Dafür lässt sich der allgemeine Hamilton-Operator für wechselwirkende Systeme aufstellen,

$$\hat{H} = \sum_{i=1}^N \left( \frac{\vec{p}_i^2}{2m} + V_{\text{ext}}(\vec{r}_i) \right) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i}^N V(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|) , \quad (5.2)$$

wobei der erste Term die kinetische Energie des  $i$ -ten Teilchens angibt und der darauf folgende die Wirkung des externen Potentials auf das  $i$ -te Teilchen. Der letzte Term gibt die Wechselwirkung der unterschiedlichen Teilchen untereinander an.

Da wir uns in diesem Fall für den Grundzustand des Systems interessieren und uns in einem Vielteilchensystem befinden, liegt es nahe, sich der Theorie der thermodynamischen Potentiale zu bedienen, um den Gleichgewichtszustand zu ermitteln. Dazu muss die Freie Energie des Systems  $F = E - \mu N$  minimiert werden, wobei  $E$  die Gesamtenergie der Teilchen ist,  $\mu$  das chemische Potential und  $N$  die Anzahl der Teilchen. Mit einem gegebenen Hamilton-Operator und einer gegebenen Wellenfunktion  $\Psi$  des Systems lässt sich die Energie  $E$  wie folgt bestimmen.

$$E(\Psi) = \frac{\langle \Psi | \hat{H} | \Psi \rangle}{\langle \Psi | \Psi \rangle} \quad (5.3)$$

Zu jedem der  $N$ -Teilchen gehört eine Wellenfunktion  $\Psi_j$ . In der Mean-Field Näherung nimmt man für den Grundzustand des bosonischen Systems an, dass sich alle Teilchen im selben Zustand  $|\Psi\rangle$  befinden und dieser als Produktwellenfunktion geschrieben werden kann,

$$|\Phi\rangle = |\Psi(\vec{r}_1)\rangle \otimes |\Psi(\vec{r}_2)\rangle \dots \otimes |\Psi(\vec{r}_N)\rangle, \quad (5.4)$$

wobei  $\otimes$  das Tensorprodukt darstellt. Somit ist  $|\Phi\rangle$  das  $N$ -fache Tensorprodukt der Einteilchen Wellenfunktion  $|\Psi\rangle$ . Dabei soll gelten dass

$$\langle\Phi|\Phi\rangle = 1. \quad (5.5)$$

Diese Mean-Field Näherung ist möglich, wenn das Kondensat eine geringe Dichte besitzt, denn ansonsten wäre der Einfluss der Wechselwirkung der Teilchen zu stark.

Nun soll folgender Ausdruck minimiert werden.

$$F = \langle\Phi|\hat{H}|\Phi\rangle - \mu\langle\Phi|\Phi\rangle \quad (5.6)$$

Dafür wird jeder einzelne Ausdruck aus Gleichung (5.6) getrennt betrachtet. Zuerst folgt der Term für die kinetische Energie des Systems,

$$\begin{aligned} \langle\Phi|\sum_{i=1}^N \frac{\vec{p}^2}{2m}|\Phi\rangle &= \sum_{i=1}^N \frac{\hbar^2}{2m} \int \nabla\Psi^*(\vec{r}_i) \nabla\Psi(\vec{r}_i) d\vec{r}_i \\ &= N \frac{\hbar^2}{2m} \int |\nabla\Psi(\vec{r})|^2 d\vec{r} \\ &= -N \frac{\hbar^2}{2m} \int \Psi^*(\vec{r}) \nabla^2\Psi(\vec{r}) d\vec{r}. \quad (\text{Satz von Green}) \end{aligned} \quad (5.7)$$

Als nächstes der Term für das externe Potential  $V_{\text{ext}}(\vec{r}_i)$ :

$$\langle\Phi|\sum_{i=1}^N V_{\text{ext}}(\vec{r}_i)|\Phi\rangle = N \int \Psi^*(\vec{r}) V_{\text{ext}}\Psi(\vec{r}) d\vec{r} \quad (5.8)$$

Der Term der Wechselwirkung zwischen den Teilchen lässt sich schreiben als

$$\begin{aligned} \langle\Phi|\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i}^N V(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|)|\Phi\rangle \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i}^N \int d\vec{r}_i \int d\vec{r}_j \Psi^*(\vec{r}_i) \Psi^*(\vec{r}_j) V(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|) \Psi(\vec{r}_i) \Psi(\vec{r}_j) \\ &= \frac{N(N-1)}{2} \int d\vec{r} \int d\vec{r}' \Psi^*(\vec{r}) \Psi^*(\vec{r}') V(|\vec{r} - \vec{r}'|) \Psi(\vec{r}) \Psi(\vec{r}') \end{aligned} \quad (5.9)$$

Zuletzt noch der Term mit dem chemischen Potential  $\mu$ :

$$\mu \langle \Phi | \Phi \rangle = \mu \left( \int \Psi^*(\vec{r}) \Psi(\vec{r}) d\vec{r} \right)^N = \mu \quad (5.10)$$

Um die Freie Energie nun zu minimieren müssen die vorherigen Ausdrücke von Gleichung (5.7)-(5.10) minimiert werden. Dies geschieht über die Variation der Freien Energie, dafür wird die Wellenfunktion  $\Psi(\vec{r})$  leicht variiert, wobei die Funktionen  $\Psi^*(\vec{r})$  und  $\Psi(\vec{r})$  als unabhängig betrachtet werden. In diesem Fall können wir die Funktionalableitung  $\frac{\delta}{\delta\Psi^*}$  für die Terme aus Gleichungen (5.7)-(5.10) vornehmen.

Es folgt für die kinetische Energie

$$\frac{\delta}{\delta\Psi^*} \left[ -N \frac{\hbar^2}{2m} \int \Psi^*(\vec{r}) \nabla^2 \Psi(\vec{r}) d\vec{r} \right] = -N \frac{\hbar^2}{2m} \int \delta\Psi^*(\vec{r}) \nabla^2 \Psi(\vec{r}) d\vec{r}, \quad (5.11)$$

analog für das externe Potential,

$$\frac{\delta}{\delta\Psi^*} \left[ N \int \Psi^*(\vec{r}) V_{\text{ext}} \Psi(\vec{r}) d\vec{r} \right] = N \int \delta\Psi^*(\vec{r}) V_{\text{ext}} \Psi(\vec{r}) d\vec{r} \quad (5.12)$$

Im Falle des Wechselwirkungsterms existieren allerdings zwei Funktionen  $\Psi^*(\vec{r})$ ,  $\Psi^*(\vec{r}')$ . Dabei wird ausgenutzt, dass  $\vec{r}$  und  $\vec{r}'$  sich vertauschen lassen. Somit folgt für das Wechselwirkungspotential

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta\Psi^*} \langle \Phi | \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i}^N V(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|) | \Phi \rangle \\ = N(N-1) \int \delta\Psi^*(\vec{r}) \left( \int |\Psi(\vec{r}')|^2 V(|\vec{r} - \vec{r}'|) d\vec{r}' \right) \Psi(\vec{r}) d\vec{r}. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Analog folgt für den Term mit dem chemischen Potential

$$\frac{\delta \langle \Phi | \Phi \rangle}{\delta\Psi^*} = N \left( \int \Psi^*(\vec{r}) \Psi(\vec{r}) d\vec{r} \right)^{N-1} \int \delta\Psi^*(\vec{r}) \Psi(\vec{r}) d\vec{r} = N \int \delta\Psi^*(\vec{r}) \Psi(\vec{r}) d\vec{r} \quad (5.14)$$

Nun werden alle Terme für die Variation der Freien Energie  $F$  wieder zusammengesetzt, wodurch sich ergibt:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\delta F}{\delta\Psi^*} \\ &= N \int \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi(\vec{r}) + V_{\text{ext}}(\vec{r}) \Psi(\vec{r}) \right. \\ &\quad \left. + (N-1) \left( \int |\Psi(\vec{r}')|^2 V(|\vec{r} - \vec{r}'|) d\vec{r}' \right) \Psi(\vec{r}) - \mu \Psi(\vec{r}) \right] \delta\Psi^* d\vec{r} \end{aligned} \quad (5.15)$$

Damit Gleichung (5.15) für beliebige  $\delta\Psi^*$  gilt, muss der Inhalt der eckigen Klammer gleich Null sein. Des weiteren gilt für große Werte von  $N$  dass  $(N - 1) \approx N$  ist. Somit folgt die zeitunabhängige Gross-Pitaevskii Gleichung

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi(\vec{r}) + V_{\text{ext}}(\vec{r})\Psi(\vec{r}) + N \left( \int |\Psi(\vec{r}')|^2 V(|\vec{r} - \vec{r}'|) d\vec{r}' \right) \Psi(\vec{r}) = \mu\Psi(\vec{r}) \quad (5.16)$$

Mit der Wahl des Wechselwirkungspotentials  $V(|\vec{r} - \vec{r}'|)$  für ein System mit geringer Dichte, niedriger Temperatur und mit lediglich Van-der-Waals Wechselwirkung,

$$V(|\vec{r} - \vec{r}'|) = 4\pi\hbar^2 \frac{b}{m} N \delta(\vec{r} - \vec{r}') , \quad (5.17)$$

wobei  $b$  die Stärke der Wechselwirkung beschreibt, gilt für die GPE [17]

$$\left( -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V_{\text{ext}}(\vec{r}) + 4\pi\hbar^2 \frac{b}{m} N |\Psi(\vec{r})|^2 \right) \Psi(\vec{r}) = \mu\Psi(\vec{r}) \quad (5.18)$$

## 5.2 Die Gross-Pitaevskii-Gleichung in dimensionslosen Größen

Um die Gross-Pitaevskii-Gleichung auf andere System anwenden zu können, wird diese auf eine einheitenlose Form gebracht. Dazu wird die einheitenlose Länge  $\tilde{r} = r/a_0$  eingeführt. Damit folgt dann für die GPE

$$\left( -\frac{\hbar^2}{2ma_0^2} \tilde{\nabla}^2 + V_{\text{ext}}(\tilde{r}a_0) + 4\pi\hbar^2 \frac{b}{m} N |\Psi(\tilde{r}a_0)|^2 \right) \Psi(\tilde{r}a_0) = \mu\Psi(\tilde{r}a_0) \quad (5.19)$$

Dabei muss gelten

$$|\Psi(\tilde{r}a_0)|^2 = |\tilde{\Psi}(\tilde{r})|^2 . \quad (5.20)$$

Für die Wellenfunktion folgt

$$\tilde{\Psi}(\tilde{r}) = \Psi(\tilde{r}a_0) a_0^{\frac{3}{2}} . \quad (5.21)$$

Die Einheiten von  $\hbar^2/(2ma_0^2) = E_0$  werden zur Einheit  $E_0$  zusammen gefasst,

$$\left( -E_0 \tilde{\nabla}^2 + V_{\text{ext}}(\tilde{r}a_0) + 4\pi\hbar^2 \frac{b}{a_0^3 m} N |\tilde{\Psi}(\tilde{r})|^2 \right) \tilde{\Psi}(\tilde{r}) = \mu\tilde{\Psi}(\tilde{r}) . \quad (5.22)$$

Als nächstes wird alles durch  $E_0$  geteilt dabei werden das chemische Potential und das externe Potential wie folgt zu dimensionslosen Größen zusammen gefasst,

$$\begin{aligned} \tilde{\mu} &= \frac{\mu}{E_0} , \\ \tilde{V}_{\text{ext}} &= \frac{V_{\text{ext}}}{E_0} . \end{aligned} \quad (5.23)$$

Somit lautet die Gross-Pitaevskii-Gleichung in dimensionslosen Größen

$$\left(-\tilde{\nabla}^2 + \tilde{V}_{\text{ext}}(\tilde{r}a_0) + 8\pi\frac{b}{a_0}N|\tilde{\Psi}(\tilde{r})|^2\right)\tilde{\Psi}(\tilde{r}) = \mu\tilde{\Psi}(\tilde{r}). \quad (5.24)$$

Zu guter letzt wird noch der Faktor  $g$  eingeführt, um die Vorfaktoren zum Wechselwirkungsterm zusammenzufassen,

$$8\pi\frac{b}{a_0}N = g. \quad (5.25)$$

Daraus ergibt sich die vereinfachte, zeitunabhängige Gross-Pitaevskii-Gleichung in dimensionslosen Größen,

$$\left(-\tilde{\nabla}^2 + \tilde{V}_{\text{ext}}(\tilde{r}a_0) + g|\tilde{\Psi}(\tilde{r})|^2\right)\tilde{\Psi}(\tilde{r}) = \mu\tilde{\Psi}(\tilde{r}) \quad (5.26)$$

Um die zeitabhängige GPE daraus zu erhalten muss lediglich das System zeitentwickelt werden, wodurch folgt

$$\left(-\tilde{\nabla}^2 + \tilde{V}_{\text{ext}}(\tilde{r}a_0) + g|\tilde{\Psi}(\tilde{r}, t)|^2\right)\tilde{\Psi}(\tilde{r}, t) = i\frac{\partial\tilde{\Psi}(\tilde{r}, t)}{\partial t} \quad (5.27)$$

Dabei ist die Zeiteinheit  $t_0 = \frac{\hbar^2}{E_0}$ .

### 5.3 Lösung der Gross-Pitaevskii-Gleichung in einem Zwei-Moden-System

In diesem System wird ein Bose-Einstein-Kondensat betrachtet, das sich in einem komplexen  $\mathcal{PT}$ -symmetrischen Doppelmuldenpotential befindet. Für dieses System kann bei niedrigen Energien und stark in den Mulden lokalisierten Wellenfunktionen die Gross-Pitaevskii-Gleichung angewendet werden und die Wellenfunktion lässt sich durch folgenden Ausdruck nähern

$$\Psi(x, t) = \psi_1(t)\xi_1(x) + \psi_2(t)\xi_2(x) \quad (5.28)$$

Wobei  $\xi_{1,2}$  jeweils in einer Mulde lokalisiert ist. Dabei kann die zeitabhängige Wellenfunktion ( $\vec{\psi}$ ) wie folgt als Vektor geschrieben werden.

$$\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = e^{i\mu t} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} \quad (5.29)$$

Daraus lässt sich die Stationäre GPE wie folgt aufstellen.

$$\begin{pmatrix} g|\phi_1|^2 - i\gamma & v \\ v & g|\phi_2|^2 + i\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} \quad (5.30)$$

Hierbei ist zu beachten, dass  $i\gamma$  den komplexen Anteil des Potentials bildet und  $v$  die Höhe der Barriere zwischen den beiden Potentials angibt.

Dabei ist zu beachten, dass die Wellenfunktion  $\vec{\phi}$  normiert ist. Mit einer konstanten Energieverschiebung von  $\frac{g}{2}(|\phi_1|^2 + |\phi_2|^2)$  lässt sich die Gleichung umschreiben zu

$$\begin{pmatrix} c(|\phi_1|^2 - |\phi_2|^2) - i\gamma & v \\ v & -c(|\phi_1|^2 - |\phi_2|^2) + i\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} \quad (5.31)$$

mit  $c = \frac{g}{2}$  und  $\kappa = |\phi_1|^2 - |\phi_2|^2$ . Die so entstandene Gleichung (5.31) lässt sich nun wie folgt analytisch lösen.

$$\begin{pmatrix} c\kappa - i\gamma & v \\ v & -c\kappa + i\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} \quad (5.32)$$

Die Matrixdarstellung aus Gleichung (5.32) lässt sich in ein Gleichungssystem umformen.

$$(c\kappa - i\gamma)\phi_1 + G_{xy}\phi_2 = \mu\phi_1 \quad (5.33)$$

$$G_{xy}\phi_1 + (-c\kappa + i\gamma)\phi_2 = \mu\phi_2 \quad (5.34)$$

Nun werden diese Gleichungen (5.33) und (5.34) mit dem komplex konjugierten Anteil der Wellenfunktion der linken Seite multipliziert.

$$(c\kappa - i\gamma)|\phi_1|^2 + G_{xy}\phi_2\phi_1^* = \mu|\phi_1|^2 \quad (5.35)$$

$$G_{xy}\phi_1\phi_2^* + (-c\kappa + i\gamma)|\phi_2|^2 = \mu|\phi_2|^2 \quad (5.36)$$

Darauf hin werden die Gleichungen (8.8) und (8.9) mit einander addiert.

$$(-i\gamma + c\kappa)(|\phi_1|^2 - |\phi_2|^2) + G_{xy}(\phi_2\phi_1^* + \phi_1\phi_2^*) = \mu(|\phi_1|^2 + |\phi_2|^2) \quad (5.37)$$

Zuletzt folgt mit den Vereinfachungen  $|\phi_1|^2 - |\phi_2|^2 = \kappa$ ,  $|\phi_1|^2 + |\phi_2|^2 = 1$

$$(-i\gamma + c\kappa)\kappa + G_{xy}(\phi_2\phi_1^* + \phi_1\phi_2^*) = \mu. \quad (5.38)$$

Somit lässt sich für eine gegebene Eigenfunktion  $\vec{\phi}$  der Eigenwert  $\mu$  finden,

$$\mu = -i\gamma\kappa + v(\phi_2\phi_1^* + \phi_1\phi_2^*) + c\kappa^2. \quad (5.39)$$

Mittels der gestellten Bedingungen an die Wellenfunktion  $\vec{\phi}$  wie Normiertheit und  $\kappa = |\phi_1|^2 - |\phi_2|^2$  folgt für die Wellenfunktion

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \sqrt{\frac{1+\kappa}{2}} e^{-iq}, \\ \phi_2 &= \sqrt{\frac{1-\kappa}{2}} e^{iq}. \end{aligned} \quad (5.40)$$

Für das Besetzungsungleichgewicht  $\kappa$  der Eigenzustände gilt das Polynom 4. Stufe

$$(c^2 + \gamma^2)\kappa^4 + (v^2 - c^2 - \gamma^2)\kappa^2 = 0. \quad (5.41)$$

Daraus folgt, dass  $\kappa = 0, 0, \pm\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2 + \gamma^2}}$ . Mit Einsetzen der Werte für  $\kappa$  und des Ansatzes aus Gleichung (5.41) in Gleichung (8.12) ergeben sich für die Werte  $q$  der Eigenfunktionen

$$\begin{aligned} \kappa = 0, \quad q &= \frac{1}{2} \arcsin\left(\frac{\gamma}{v}\right), \\ \kappa = \pm\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2 + \gamma^2}}, \quad q &= \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{\gamma}{c}\right). \end{aligned} \quad (5.42)$$

Allerdings sind nur reelle Werte für  $\kappa, q$  echte Lösungen der GPE. Somit haben wir für  $|\gamma| > |v|$  und  $\gamma^2 < v^2 - c^2$  jeweils zwei Eigenzustände und für den restlichen Bereich immer vier Eigenzustände [4]. Daraus ergeben sich die Eigenwerte

$$\mu_{\pm} = \pm\sqrt{v^2 - \gamma^2} \quad (5.43)$$





# 6 Frequenzbestimmung eines $\mathcal{PT}$ -symmetrischen nichtlinearen Metamaterials

Das Metamaterial wird in diesem Fall durch eine Kette aus Dimern beschrieben [6]. Die Dimerkette ist aus zwei, bis auf den Verlustterm (ein SRR mit Verlust und einer mit Zuwachs) identischen SRRs aufgebaut. Der Abstand der einzelnen SRRs innerhalb der Kette bildet ein Binärmuster, sodass es zu einem SRR immer einen nahen und einen fernen Nachbarn gibt. Mit dem nahen Nachbarn bildet der SRR zusammen einen Dimer. Zwischen den einzelnen SRRs wirken elektrische und magnetische Dipol-Kräfte, welche mit  $\lambda_E$  und  $\lambda_M$  bezeichnet werden. Dieses Modell wurde bereits von N. Lazarides und G. P. Tsironis in [6] bearbeitet. Die wesentlichen Schritte zum Lösen des Systems sollen in diesem Kapitel wiedergegeben werden. Zur Veranschaulichung ist die Dimerkette in Abbildung 6.1 grafisch dargestellt. Unter der Annahme der Nichtlinearität der einzelnen Dimere lässt sich mit Kapitel 2.3 und Gleichung (2.7) das gekoppelte Differentialgleichungssystem der Lorentz-Dipole eines Dimers an der  $n$ -ten Stelle aus der Kette aufstellen.

$$\lambda'_M \ddot{q}_{2n} + \ddot{q}_{2n+1} + \lambda_M \ddot{q}_{2n+2} + \lambda'_E q_{2n} + q_{2n+1} + \lambda_E q_{2n+2} = \varepsilon_0 \sin(\Omega\tau) - \alpha q_{2n+1}^2 - \beta q_{2n+1}^3 - \gamma \dot{q}_{2n+1} \tag{6.1}$$

$$\lambda_M \ddot{q}_{2n-1} + \ddot{q}_{2n} + \lambda'_M \ddot{q}_{2n+1} + \lambda_E q_{2n-1} + q_{2n} + \lambda'_E q_{2n+1} = \varepsilon_0 \sin(\Omega\tau) - \alpha q_{2n}^2 - \beta q_{2n}^3 + \gamma \dot{q}_{2n} \tag{6.2}$$

Um dieses zu lösen, werden folgende Näherungen angenommen:

- Der Treibende Term verschwindet

$$\varepsilon_0 \sin(\Omega\tau) = 0 . \tag{6.3}$$

Dies kann für kleine externe Anregungen angenommen werden.

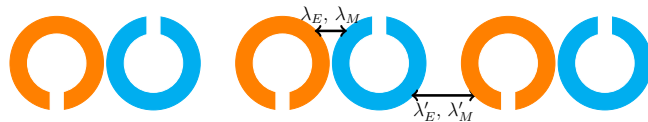


Abbildung 6.1: eindimensionale Dimerkette

- Die Nichtlinearitätsfaktoren  $\alpha$  und  $\beta$  werden sehr klein gewählt und können dadurch in der Rechnung vernachlässigt werden.

Damit lassen sich nun die beiden gekoppelten linearen Differentialgleichungen (6.1) und (6.2) wie folgt umformen.

$$\lambda'_M \ddot{q}_{2n} + \ddot{q}_{2n+1} + \lambda_M \ddot{q}_{2n+2} + \lambda'_E q_{2n} + q_{2n+1} + \lambda_E q_{2n+2} + \gamma \dot{q}_{2n+1} = 0 \quad (6.4)$$

$$\lambda_M \ddot{q}_{2n-1} + \ddot{q}_{2n} + \lambda'_M \ddot{q}_{2n+1} + \lambda_E q_{2n-1} + q_{2n} + \lambda'_E q_{2n+1} - \gamma \dot{q}_{2n} = 0 \quad (6.5)$$

Zur Lösung des gekoppelten linearen Differentialgleichungssystems in den Gleichungen (6.4) und (6.5) wird als Ansatz

$$q_{2n} = A \cdot e^{i(2n\kappa - \Omega\tau)} \quad (6.6)$$

$$q_{2n+1} = B \cdot e^{i(2(n+1)\kappa - \Omega\tau)} \quad (6.7)$$

verwendet.

## 6.1 Analytische Lösung für einen Spezialfall

Das gekoppelte lineare Differentialgleichungssystem konnte in einem Spezialfall analytisch gelöst werden. Für die analytische Lösung des gekoppelten linearen Differentialgleichungssystems in den Gleichungen (6.4) und (6.5) wurde eine weitere Vereinfachung getroffen, sodass gilt:

$$\lambda_M = \lambda'_M \quad \lambda_E = \lambda'_E \quad (6.8)$$

Dies hat im Modell zur Folge, dass alle SRR nun äquidistant von einander entfernt sind und kein Binärmuster mehr bilden. Somit ergibt sich

$$\lambda_M \ddot{q}_{2n} + \ddot{q}_{2n+1} + \lambda_M \ddot{q}_{2n+2} + \lambda_E q_{2n} + q_{2n+1} + \lambda_E q_{2n+2} + \gamma \dot{q}_{2n+1} = 0, \quad (6.9)$$

$$\lambda_M \ddot{q}_{2n-1} + \ddot{q}_{2n} + \lambda_M \ddot{q}_{2n+1} + \lambda_E q_{2n-1} + q_{2n} + \lambda_E q_{2n+1} - \gamma \dot{q}_{2n} = 0. \quad (6.10)$$

In diese beiden Gleichungen (6.9) und (6.10) werden nun die Ansätze aus den Gleichungen (6.6) und (6.7) eingesetzt.

$$\begin{aligned} & -\Omega^2 (\lambda_M A \cdot e^{i(2n\kappa - \Omega\tau)} + B \cdot e^{i(2(n+1)\kappa - \Omega\tau)} + \lambda_M A \cdot e^{i(2(n+2)\kappa - \Omega\tau)}) \\ & + \lambda_E A \cdot e^{i(2n\kappa - \Omega\tau)} + B \cdot e^{i(2(n+1)\kappa - \Omega\tau)} + \lambda_E A \cdot e^{i(2(n+2)\kappa - \Omega\tau)} - i\gamma \Omega B \cdot e^{i(2(n+1)\kappa - \Omega\tau)} = 0 \end{aligned} \quad (6.11)$$

$$\begin{aligned} & -\Omega^2 (\lambda_M B \cdot e^{i(2(n-1)\kappa - \Omega\tau)} + A \cdot e^{i(2n\kappa - \Omega\tau)} + \lambda_M B \cdot e^{i(2(n+1)\kappa - \Omega\tau)}) \\ & + \lambda_E B \cdot e^{i(2(n-1)\kappa - \Omega\tau)} + A \cdot e^{i(2n\kappa - \Omega\tau)} + \lambda_E B \cdot e^{i(2(n+1)\kappa - \Omega\tau)} + i\gamma \Omega A \cdot e^{i(2n\kappa - \Omega\tau)} = 0 \end{aligned} \quad (6.12)$$

Nun werden aus den Gleichungen (6.11) und (6.12) die periodischen Terme geschickt herausgeteilt, sodass

$$-\Omega^2 \left( \lambda_M e^{-i\kappa} + \frac{B}{A} + \lambda_M \cdot e^{i\kappa} \right) + \lambda_E e^{-i\kappa} + \frac{B}{A} + \lambda_E e^{i\kappa} - i\gamma\Omega \frac{B}{A} = 0 \quad (6.13)$$

$$-\Omega^2 \left( \lambda_M e^{-i\kappa} + \frac{A}{B} + \lambda_M \cdot e^{i\kappa} \right) + \lambda_E e^{-i\kappa} + \frac{A}{B} + \lambda_E e^{i\kappa} + i\gamma\Omega \frac{A}{B} = 0 \quad (6.14)$$

entsteht. Hier lässt sich erkennen, dass die verbleibenden Exponential-Funktionen zu Cosinus-Funktionen zusammengefasst werden können.

$$-\Omega^2 \left( 2\lambda_M \cos(\kappa) + \frac{B}{A} \right) + 2\lambda_E \cos(\kappa) + \frac{B}{A} = i\gamma\Omega \frac{B}{A} \quad (6.15)$$

$$-\Omega^2 \left( 2\lambda_M \cos(\kappa) + \frac{A}{B} \right) + 2\lambda_E \cos(\kappa) + \frac{A}{B} = -i\gamma\Omega \frac{A}{B} \quad (6.16)$$

Durch Quadrieren der Gleichungen (6.15) und (6.16) und setzen von  $B = iA$  erhält man

$$\Omega^4 (2\lambda_M \cos(\kappa) + i)^2 - 2(2\lambda_M \cos(\kappa) + i)(2\lambda_E \cos(\kappa) + i) + (2\lambda_E \cos(\kappa) + i)^2 = -\gamma^2 \Omega^2, \quad (6.17)$$

$$\Omega^4 (2\lambda_M \cos(\kappa) - i)^2 - 2(2\lambda_M \cos(\kappa) - i)(2\lambda_E \cos(\kappa) - i) + (2\lambda_E \cos(\kappa) - i)^2 = -\gamma^2 \Omega^2. \quad (6.18)$$

Zuletzt werden nun noch die beiden Gleichungen (6.17) und (6.18) zusammenaddiert, wodurch folgt

$$\Omega^4 (1 - 4\lambda_M^2 \cos(\kappa)^2) + \Omega^2 (\gamma^2 - 2 + 8\lambda_M \lambda_E \cos(\kappa)^2) + 1 - 4\lambda_M^2 \cos(\kappa)^2 = 0. \quad (6.19)$$

Die so bestimmten Werte von  $\Omega$  in Abhängigkeit von  $\kappa$  werden in der Abbildung 6.2 aufgetragen.

## 6.2 Numerische Lösung im allgemeinen Fall

Das gekoppelte Differentialgleichungssystem der Gleichungen (6.4) und (6.5), wurde für

$$\lambda_M \neq \lambda'_M \quad \lambda_E \neq \lambda'_E \quad (6.20)$$

mittels einer mehrdimensionalen Nullstellensuche numerisch gelöst. Daraus ergeben sich die in Abbildung 6.3 aufgetragen Werte für  $\Omega$  in Abhängigkeit von  $\kappa$ . Damit konnten die von N. Lazarides und G. P. Tsironis in [6] bestimmten Werte bestätigt werden. Um noch einen Vergleich des numerischen Ergebnisses mit dem analytischen zu erhalten, werden die Parameter für die Numerik so gewählt das sie mit den analytischen Übereinstimmen. Das Ergebnis ist in Abbildung 6.4 aufgetragen worden. Wie an Abbildung 6.4 zuerkennen ist stimmt die Numerik mit der analytischen Lösung für  $\lambda_M = \lambda'_M$  und  $\lambda_E = \lambda'_E$  überein.

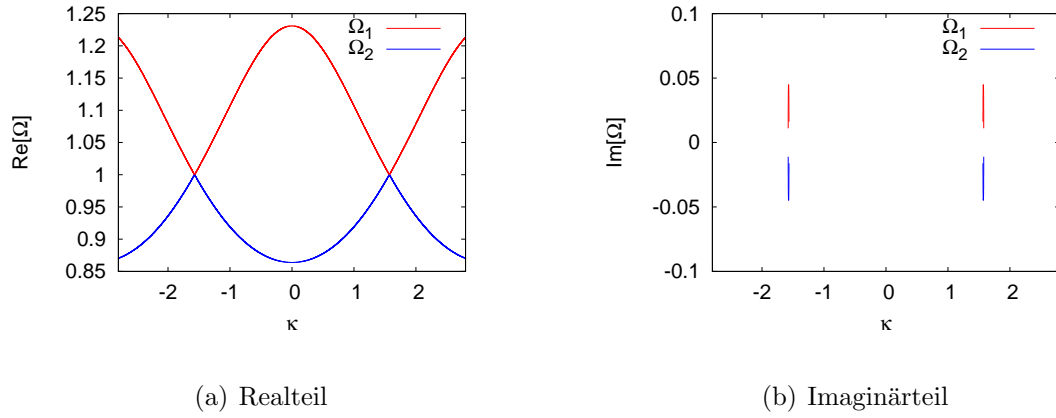


Abbildung 6.2: Frequenz  $\Omega$  in Abhängigkeit von  $\kappa$  für  $\gamma = 0.002$ ,  $\lambda_M = -0.17$  und  $\lambda_E = 0$ .

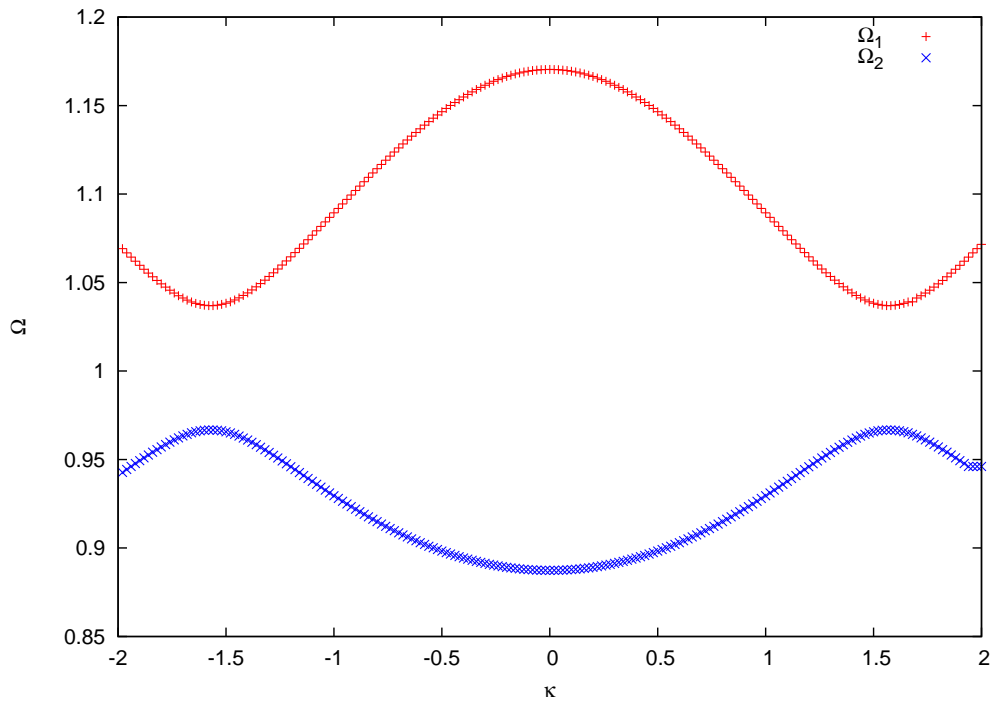


Abbildung 6.3: Frequenz  $\Omega$  in Abhängigkeit von  $\kappa$  für  $\gamma = 0.002$ ,  $\lambda_M = -0.17$ ,  $\lambda'_M = -0.1$  und  $\lambda_E = 0$ .

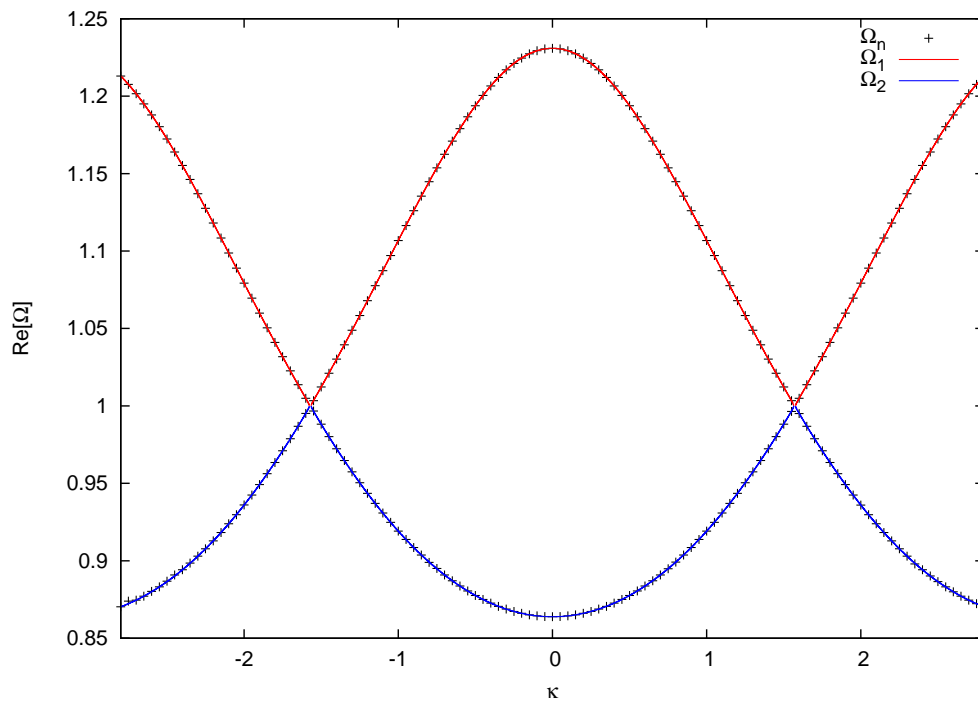


Abbildung 6.4: Frequenz  $\Omega$  in Abhängigkeit von  $\kappa$  für  $\gamma = 0.002$ ,  $\lambda_M = \lambda'_M = -0.17$  und  $\lambda_E = \lambda'_E = 0$ , Vergleich der numerischen Lösung  $\Omega_n$  mit den analytischen  $\Omega_1$  und  $\Omega_2$ .



# 7 Polarisationszustände eines linearen $\mathcal{PT}$ -symmetrischen Metamaterials

Das Metamaterial wird in diesem Fall auf der untersten Strukturebene durch zwei senkrecht zu einander stehenden SRRs beschrieben, einer in  $x$ -Richtung ausgerichtet der andere in  $y$ -Richtung. Dies wird so gewählt, damit sich aus den beiden Dipolschwingung leicht eine Basis für das  $E$ -Feld bilden lässt. Die beiden SRRs werden in ihren Eigenschaften bis auf einen unterschiedlich starken Verlust identisch gewählt. Diese beiden SRRs bilden zusammen den Dimer des Systems. Aus diesem Dimer wird nun ein zweidimensionales  $x$ - $y$ -Gitter aufgebaut, wodurch sich das Metamaterial als dünne, eine Schicht dicke Struktur zusammensetzt. Die elektromagnetische Welle durchdringt das Metamaterial in  $z$ -Richtung. Somit lässt sich das System mittels der zwei Differentialgleichungen (2.7) beschreiben. Dabei beschreiben die Wechselwirkungsterme mit  $G_{xx}, G_{yy}$  die elektrische Fernkraft  $E_F$  der restlichen gleich ausgerichteten Dipole und  $G_{xy}$  die elektrische Dipol-Dipol-Kräfte  $E_{12}, E_{21}$  des gekoppelten SRRs mit der elektrischen Fernkraft der jeweils senkrecht ausgerichteten Dipole. Die magnetische Dipol-Dipol-Kopplung, also die Terme  $M_{12}, M_{21}, M_F$  wird in diesem Modell vernachlässigt [2]. Zur Veranschaulichung wurde ein kleiner Ausschnitt aus dem eben beschriebenen Metamaterial in Abbildung 7.1 grafisch dargestellt. In Abbildung 7.1 stehen jeweils der orange und die hellgrauen SRR für die eine Verluststärke, der cyan und die dunkelgrauen für die andere Verluststärke. Jeweils der orange, hellgraue, SRR und der cyan, dunkelgraue, SRR bilden zusammen einen Dimer. Die in grau gehaltenen Dimer stehen für den nächsten Dimer in der Struktur und repräsentativ für die periodische Wiederholung der Struktur in die jeweilige Richtung.

Daraus ergeben sich nun folgende Gleichungen für das System.

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \gamma_x \dot{x} + \omega_0^2 x &= \frac{q}{m} E_x e^{i\omega t} - G_{xx} x - G_{xy} y \\ \ddot{y} + \gamma_y \dot{y} + \omega_0^2 y &= \frac{q}{m} E_y e^{i\omega t} - G_{yy} y - G_{xy} x \end{aligned} \quad (7.1)$$

Diese Gleichungen lassen sich mittels der folgenden Ansätze vereinfachen. Es wird angenommen, dass der  $x$ -SRR und der  $y$ -SRR synchron nahe ihrer gemeinsamen Resonanzfrequenz,  $\omega_0$  schwingen, also

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 e^{i\omega t}, & y(t) &= y_0 e^{i\omega t}, \\ & & \delta &= \omega - \omega_0. \end{aligned}$$

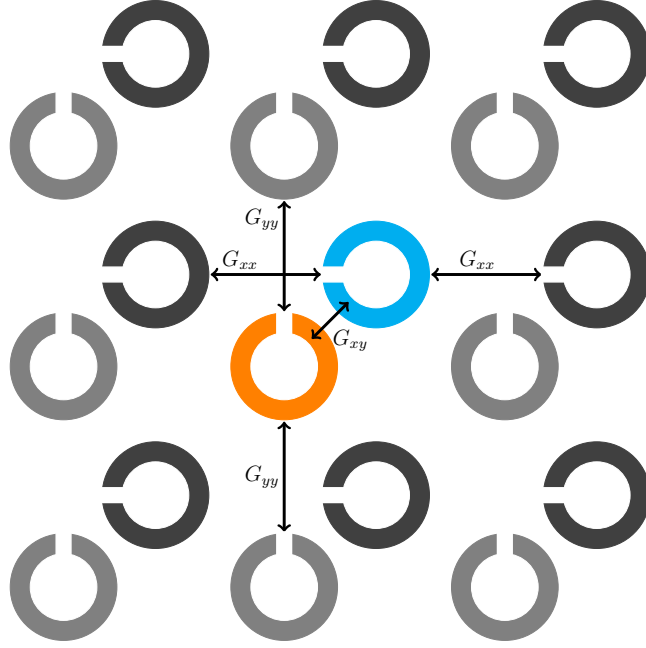


Abbildung 7.1: zweidimensionales Modell eines  $\mathcal{PT}$ -symmetrischen Metamaterials zur Untersuchung der Eigenpolarisationen

Des Weiteren werden die beiden Kopplungsterme  $G_{xx}, G_{yy}$  als identisch angenommen, wodurch gilt.

$$G_{xx} = G_{yy}$$

Somit folgt für die gekoppelte Differentialgleichungen (7.1)

$$\begin{aligned} (-\omega^2 + i\omega\gamma_x + \omega_0^2)x_0(\omega) &= \frac{q}{m}E_x - G_{xx}x_0(\omega) - G_{xy}y_0(\omega), \\ (-\omega^2 + i\omega\gamma_y + \omega_0^2)y_0(\omega) &= \frac{q}{m}E_y - G_{xx}y_0(\omega) - G_{xy}x_0(\omega) \end{aligned} \quad (7.2)$$

mit den beiden Näherungen

$$\begin{aligned} (\omega_0^2 - \omega^2) &\approx -2\omega_0(\omega_0 - \omega) \\ \omega\gamma &= \omega_0\gamma + \delta\gamma \approx \omega_0\gamma, \end{aligned}$$

welche für Schwingungen nahe der Resonanzfrequenz gelten, folgt für die gekoppelte



Differentialgleichung (7.2),

$$\begin{aligned}
(2\omega_0\delta + i\omega_0\gamma_x + G_{xx})x_0(\omega) + G_{xy}y_0(\omega) &= \frac{q}{m}E_x, \\
(2\omega_0\delta + i\omega_0\gamma_x + G_{xx})y_0(\omega) + G_{xy}x_0(\omega) &= \frac{q}{m}E_y, \\
(\delta + i\frac{\gamma_x}{2} + \frac{G_{xx}}{2\omega_0})x_0(\omega) + \frac{G_{xy}}{2\omega_0}y_0(\omega) &= \frac{q}{2m\omega_0}E_x, \\
(\delta + i\frac{\gamma_y}{2} + \frac{G_{xx}}{2\omega_0})y_0(\omega) + \frac{G_{xy}}{2\omega_0}x_0(\omega) &= \frac{q}{2m\omega_0}E_y.
\end{aligned} \tag{7.3}$$

Mittels Multiplikation der beiden Gleichungen des Differentialgleichungssystems mit einer Ladung  $q$  wird daraus eine gekoppelte Dipolschwingung mit  $p_x = q \cdot x_0(\omega)$ ,  $p_y = q \cdot y_0(\omega)$ . Ebenfalls werden die Konstanten der Wechselwirkungsterme und der Gewinn- und Verlustbeiträge neu definiert, so dass sich die Gleichung wie folgt vereinfacht.

$$\begin{aligned}
(\delta + \gamma_x + G_{xx})p_x + G_{xy}p_y &= gE_x, \\
(\delta + \gamma_y + G_{xx})p_y + G_{xy}p_x &= gE_y.
\end{aligned} \tag{7.4}$$

Dieses Differentialgleichungssystem lässt sich auch als Matrix schreiben,

$$\begin{pmatrix} \delta + i\gamma_x + G_{xx} & G_{xy} \\ G_{xy} & \delta + i\gamma_y + G_{xx} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \end{pmatrix} = g \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix}. \tag{7.5}$$

Dadurch, dass das betrachtete System nur eine Lage aus Dimeren dick ist, lässt sich durch Vergleich mit Gleichung (3.9) feststellen, dass die Jones-Matrix des Systems und die in Gleichung (7.5) bestimmte Matrix dieselben Eigenwerte besitzen [2], wodurch sich die Eigenpolarisationszustände des Systems durch einfaches lösen des Eigenwertproblems aus Gleichung (7.5) ergeben.

Dazu wird zuerst die Matrix aus Gleichung (7.5) in eine Einheitsmatrix mit Konstante und eine relevante Matrix für das Eigenwertproblem aufgeteilt. Ebenfalls wird der Verlust der beiden Dipole mittels der in Gleichung (2.6) beschriebenen Methode in einen antisymmetrischen Verlust- und Gewinnanteil sowie in einen verlustbehafteten Hintergrund umgewandelt.

$$(\delta + i(\gamma_y + \gamma_x)) + G_{xx} \overleftrightarrow{E} \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -i\Gamma & G_{xy} \\ G_{xy} & i\Gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \end{pmatrix} = g \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} \tag{7.6}$$

Wie an dieser Gleichung zu erkennen ist, reicht es vollkommen aus, sich die zweite Matrix für die Eigenpolarisationen anzusehen, da die Einheitsmatrix  $\overleftrightarrow{E}$  dazu keinen Beitrag liefert. Somit werden lediglich die Eigenwerte der zweiten Matrix bestimmt.

$$\begin{aligned}
\det \begin{pmatrix} -i\Gamma - \lambda & G_{xy} \\ G_{xy} & i\Gamma - \lambda \end{pmatrix} &= -(i\Gamma + \lambda)(i\Gamma - \lambda) - G_{xy}^2 = \lambda^2 + \Gamma^2 - G_{xy}^2 \\
\lambda_{\pm} &= \pm \sqrt{G_{xy}^2 - \Gamma^2} = \pm G_{xy} \sqrt{1 - \left(\frac{\Gamma}{G_{xy}}\right)^2}
\end{aligned} \tag{7.7}$$

Daraus folgt das für reelle Eigenwerte  $(G_{xy})^2 > (\Gamma)^2$  gelten muss. Für  $(G_{xy})^2 = (\Gamma)^2$  existiert nur ein Eigenwert und für  $(G_{xy})^2 < (\Gamma)^2$  sind die Eigenwerte komplex.

Zuerst werden die Eigenzustände (Eigenpolarisationen) für die reellen Eigenwerte bestimmt. Dazu wird

$$\sin(\theta) = \frac{\Gamma}{G_{xy}} \quad (7.8)$$

eingeführt und daraus folgt für die Eigenwerte,

$$\lambda_{\pm} = \pm G_{xy} \cos(\theta) . \quad (7.9)$$

Somit lassen sich folgende Eigenpolarisationen,  $v_{\pm} = \begin{pmatrix} a & b_{\pm} \end{pmatrix}$  bestimmen, die sich aus der Bestimmungsgleichung

$$[-i\Gamma \mp G_{xy} \cos(\theta)]a + G_{xy}b_{\pm} = 0 \quad (7.10)$$

ergeben. Mit  $a = 1$

$$b_{\pm} = i \frac{\Gamma}{G_{xy}} \pm \cos(\theta) = i \sin(\theta) \pm \cos(\theta) = \pm e^{\pm i\theta} \quad (7.11)$$

lassen sich schließlich folgende Eigenpolarisationen für reelle Eigenwerte finden.

$$v_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ e^{i\theta} \end{pmatrix} , \quad v_- = \begin{pmatrix} 1 \\ -e^{-i\theta} \end{pmatrix} , \quad (7.12)$$

wobei  $\theta = \arcsin(\Gamma/G_{xy})$  ist. Ebenfalls zu beachten ist, dass die Eigenzustände aufgrund des Jones-Formalismus normiert sein sollten, weshalb noch ein Normierungsfaktor von  $1/\sqrt{2}$  ergänzt wird,

$$v_+ = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ e^{i\theta} \end{pmatrix} , \quad v_- = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -e^{-i\theta} \end{pmatrix} . \quad (7.13)$$

Die beiden gefundenen Eigenpolarisationszustände beschreiben elliptisch polarisiertes Licht mit ihren Hauptachsen entlang der Diagonalen des Koordinatensystems, wobei die beiden Eigenzustände für große  $G_{xy}$  in ihre Hauptachsen übergehen und somit zwei linear polarisierte Eigenzustände bilden. Die Basis aus Eigenpolarisationszuständen ist wie in einem  $\mathcal{PT}$ -symmetrischen System zu erwarten nicht orthogonal

$$\langle v_+ | v_- \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & e^{-i\theta} \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -e^{-i\theta} \end{pmatrix} = \frac{1 - e^{-2i\theta}}{2} ,$$

sie würde entweder für  $\Gamma = 0$  orthogonal werden, dies entspricht allerdings dem hermiteschen Grenzfall oder aber für  $(G_{xy})^2 \gg (\Gamma)^2$  welches für den Fall steht das beide Eigenpolarisationen linear entlang der Koordinatendiagonale polarisiert sind. Die so

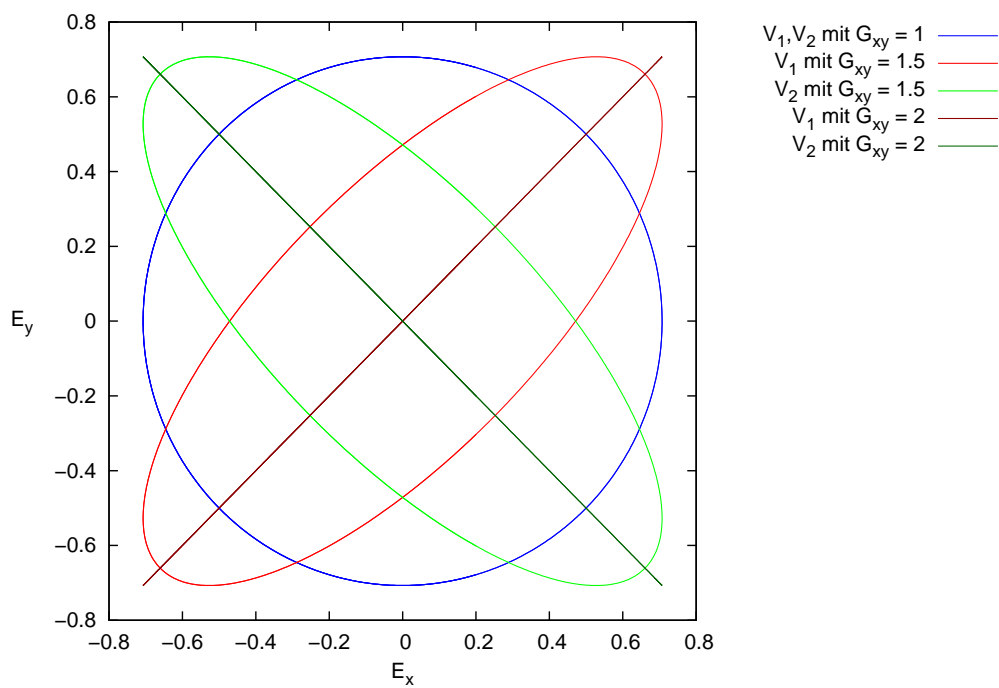


Abbildung 7.2: Eigenpolarisationszustände eines linearen Metamaterials für  $(G_{xy})^2 > (\Gamma)^2$  mit  $\Gamma = 1$ .

aufgezeigten Eigenzustände sind für unterschiedliche Stärken von  $G_{xy}$  in Abbildung 7.2 dargestellt. Nun werden noch die komplexen Eigenwerte für  $(G_{xy})^2 < (\Gamma)^2$  betrachtet. Dazu wird eingeführt.

$$\cosh(\theta) = \frac{\Gamma}{G_{xy}} \quad (7.14)$$

Dadurch folgt für die Eigenwerte.

$$\lambda_{\pm} = \pm i G_{xy} \sinh(\theta) \quad (7.15)$$

Daraus lässt sich analog wie bei den Eigenpolarisationen zu den reellen Eigenwerten der Eigenvektor  $v_{\pm} = (a \quad b_{\pm})$  der Wert  $b_{\pm}$  bestimmen, wenn wieder  $a = 1$  gesetzt wird. Das Ergebnis ist

$$b_{\pm} = i \frac{\Gamma}{G_{xy}} \pm i \sinh(\theta) = i \cosh(\theta) \pm i \sinh(\theta) = i e^{\pm\theta} . \quad (7.16)$$

Wodurch sich für die komplexen Eigenwerte folgende Eigenpolarisationen ergeben:

$$v_{+} = \begin{pmatrix} 1 \\ i e^{\theta} \end{pmatrix} , \quad v_{-} = \begin{pmatrix} 1 \\ i e^{-\theta} \end{pmatrix} , \quad (7.17)$$

wobei  $\theta = \operatorname{arccosh}(\Gamma/G_{xy})$  ist. Nach der Normierung für den Jones-Formalismus ergeben sich,

$$v_{+} = \frac{1}{\sqrt{1 + e^{2\theta}}} \begin{pmatrix} 1 \\ i e^{\theta} \end{pmatrix} , \quad v_{-} = \frac{1}{\sqrt{1 + e^{-2\theta}}} \begin{pmatrix} 1 \\ i e^{-\theta} \end{pmatrix} . \quad (7.18)$$

Die beiden Eigenzustände zu den komplexen Eigenwerten stellen ebenfalls elliptisch polarisiertes Licht dar. Dieses mal allerdings bilden die  $x$ - und die  $y$ -Achse die Hauptachsen der elliptischen Polarisation. Für kleine Werte von  $G_{xy}$  konvergieren die elliptischen Polarisationen wieder gegen ihre Hauptachsen und somit gegen einen linear polarisierten Grenzeigenzustand. Dabei ist wieder zu beobachten das die Eigenzustände keine Orthogonale Basis des Eigenraums bilden.

$$\langle v_{+} | v_{-} \rangle = \frac{1}{\sqrt{1 + e^{2\theta}}} (1 \quad -i e^{\theta}) \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + e^{-2\theta}}} \begin{pmatrix} 1 \\ i e^{-\theta} \end{pmatrix} = \frac{2}{\sqrt{(1 + e^{2\theta}) \cdot (1 + e^{-2\theta})}}$$

Dabei ist diesmal zu erkennen das die Eigenpolarisationen im Grenzfall  $\Gamma \rightarrow \infty$  ebenfalls wieder orthogonal werden. Die so aufgezeigten Eigenzustände sind in Abbildung 7.3 dargestellt.

Für  $(G_{xy})^2 = (\Gamma)^2$  erkennt man, dass es nur einen Eigenwert mit  $\lambda = 0$  gibt, zu dem nur eine Eigenpolarisation existiert.

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} . \quad (7.19)$$

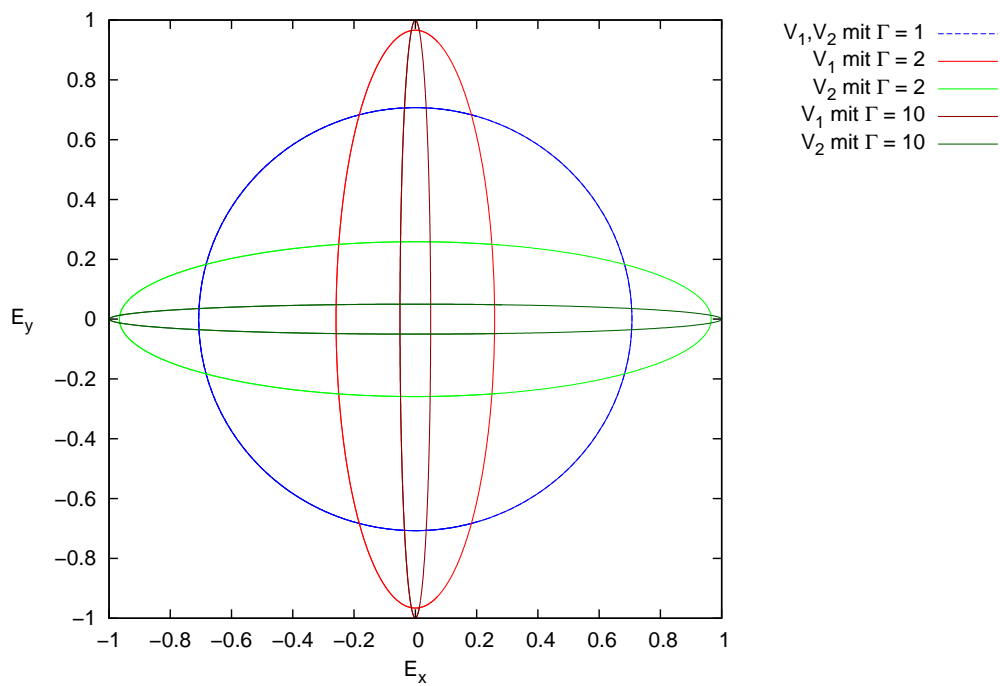


Abbildung 7.3: Eigenpolarisationszustände eines linearen Metamaterials für  $(G_{xy})^2 < (\Gamma)^2$  mit  $G_{xy} = 1$ .

Dies ist die typische Eigenschaft eines 'exceptional points' (EP) und man erhält das Verhalten jeweils aus den Gleichungen für die reellen Eigenpolarisationen, und den komplexen Eigenpolarisationen wenn man den Grenzwert  $(G_{xy})^2 = (\Gamma)^2$  bildet. Dieser Polarisationszustand ist bereits in Abbildung 7.2 und Abbildung 7.3 zu erkennen.

Daran ist zu erkennen, dass es für unterschiedliche Kopplungsstärken  $G_{xy}$  zum Bruch der  $\mathcal{PT}$ -Symmetrie im  $\mathcal{PT}$ -symmetrisch aufgebauten Metamaterial kommen kann. Dieser Bruch ist eben an jenem Punkt, an welchem nur eine Eigenpolarisation existiert, dem 'exceptional point' (EP). Danach geht das System in eine  $\mathcal{PT}$ -gebrochene Phase über, in welcher nur komplexe Eigenwerte, existieren. Am EP lässt das Metamaterial lediglich linkspolarisierte elektromagnetische Wellen unverändert transmittieren. Die Veränderung der Kopplungsstärke  $G_{xy}$  kann durch Annähern oder Entfernen der beiden SRRs beeinflusst werden. Somit kann durch das Dehnen oder Stauchen des Materials seine Eigenpolarisationen verändert werden [2].

## 8 Polarisationszustände eines nichtlinearen $\mathcal{PT}$ -symmetrischen Metamaterials

Das Modell aus Kapitel 7 wird nun um eine Kerr-Nichtlinearität erweitert. Dies ist beispielsweise durch die Änderung des Kondensators in den SRRs aus Kapitel 2.3 möglich. Daraus ergibt sich folgendes Modell für das neue nichtlineare System.

$$\begin{aligned}\ddot{x} + \gamma_x \dot{x} + \omega_0^2 x &= \frac{q}{m} E_x e^{i\omega t} - G_{xx} x - G_{xy} y - \alpha |x|^2 x \\ \ddot{y} + \gamma_y \dot{y} + \omega_0^2 y &= \frac{q}{m} E_y e^{i\omega t} - G_{yy} y - G_{xy} x - \alpha |y|^2 y\end{aligned}\quad (8.1)$$

Diese Form lässt sich nun analog zu den Gleichungen (7.1)-(7.5) aus Kapitel 7 umformen.

$$\begin{pmatrix} \delta + i\gamma_x + G_{xx} + \alpha |p_x|^2 & G_{xy} \\ G_{xy} & \delta + i\gamma_y + G_{yy} + \alpha |p_y|^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \end{pmatrix} = g \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix}\quad (8.2)$$

Dabei wird die Ladung, die für  $|p_{x,y}|^2$  benötigt wird, aus der Konstanten  $\alpha$  entnommen. Diese Matrix lässt sich nun wieder in eine Einheitsmatrix  $\overleftrightarrow{E}$  mit Konstante und einer für die Polarisationszustände relevante Matrix zerlegen.

$$\begin{aligned}& \left[ (\delta + i(\gamma_y + \gamma_x)) + G_{xx} + \frac{\alpha}{2} (|p_x|^2 + |p_y|^2) \right] \overleftrightarrow{E} \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \end{pmatrix} \\ & + \begin{pmatrix} -i\Gamma + c(|p_x|^2 - |p_y|^2) & G_{xy} \\ G_{xy} & i\Gamma - c(|p_x|^2 - |p_y|^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \end{pmatrix} = g \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix}\end{aligned}\quad (8.3)$$

Diese Zerlegung ist möglich, da wir später das System im Jones-Formalismus betrachten und somit gelten muss,

$$|p_x|^2 + |p_y|^2 = 1. \quad (8.4)$$

Für Gleichung (8.3) soll gelten, dass  $c = \alpha/2$  ist, des weiteren wird für die zukünftigen Terme  $(|p_x|^2 - |p_y|^2) = \kappa$  gesetzt. Somit bleibt für die Eigenpolarisationszustände das Eigenwertproblem folgender Gleichung zu lösen.

$$\begin{pmatrix} -i\Gamma + c\kappa & G_{xy} \\ G_{xy} & i\Gamma - c\kappa \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \end{pmatrix} = g \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix}\quad (8.5)$$

Dieses System besitzt starke Analogien zur Zwei-Moden-Näherung eines Bose-Einstein Kondensats in einer Doppelmulde von Graefe und Mitarbeitern [4]. Somit wird das hier für ein nichtlineares Metamaterial aufgestellte System mittels der in Kapitel 5.2 vorgestellten Lösungsmethode für die Gross-Pitaevskii-Gleichung in Zwei-Moden-Näherung mit normierten Wellenfunktionen gelöst. Dazu wird zuerst aus Gleichung (8.5) ein nichtlineares Gleichungssystem gemacht.

$$(c\kappa - i\Gamma)p_x + G_{xy}p_y = gp_x \quad (8.6)$$

$$G_{xy}p_x + (-c\kappa + i\Gamma)p_y = gp_y \quad (8.7)$$

Nun werden diese Gleichungen (8.6) und (8.7) mit dem komplex konjugierten Anteil der Wellenfunktion der linken Seite multipliziert.

$$(c\kappa - i\Gamma)|p_x|^2 + G_{xy}p_y p_x^* = g|p_x|^2 \quad (8.8)$$

$$G_{xy}p_x p_y^* + (-c\kappa + i\Gamma)|p_y|^2 = g|p_y|^2 \quad (8.9)$$

Darauf hin werden die Gleichungen (8.8) und (8.9) mit einander addiert.

$$(-i\Gamma + c\kappa)(|p_x|^2 - |p_y|^2) + G_{xy}(p_y p_x^* + p_x p_y^*) = g|p_x|^2 + |p_y|^2 \quad (8.10)$$

Zuletzt folgt mit den Vereinfachungen  $|p_x|^2 - |p_y|^2 = \kappa$ ,  $|p_x|^2 + |p_y|^2 = 1$

$$(-i\Gamma + c\kappa)\kappa + G_{xy}(p_y p_x^* + p_x p_y^*) = g. \quad (8.11)$$

Somit lässt sich für eine gegebene Eigenfunktion  $\vec{p} = (p_x \ p_y)$  der Eigenwert  $g$  finden.

$$g = -i\Gamma\kappa + G_{xy}(p_y p_x^* + p_x p_y^*) + c\kappa^2 \quad (8.12)$$

Mittels der gestellten Bedingungen an die Eigenzustände des Systems folgt,

$$\begin{aligned} p_x &= \sqrt{\frac{1+\kappa}{2}} e^{-iq}, \\ p_y &= \sqrt{\frac{1-\kappa}{2}} e^{iq}. \end{aligned} \quad (8.13)$$

Analog zu den Gleichungen (5.41) und (5.42) existieren folgende Wertpaare für  $\kappa$  und  $q$ .

$$\begin{aligned} \kappa = 0, \quad q &= \frac{1}{2} \arcsin\left(\frac{\Gamma}{G_{xy}}\right) \\ \kappa = \pm \sqrt{1 - \frac{G_{xy}^2}{c^2 + \Gamma^2}}, \quad q &= \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{\Gamma}{c}\right) \end{aligned} \quad (8.14)$$

An Gleichung (8.14) ist zu erkennen, dass für  $\kappa = 0$  die Nichtlinearität bedeutungslos wird. Somit sind die daraus entstehenden Eigenpolarisationen  $v_1, v_2$  wieder die selben, die



in Abbildung 7.2 dargestellt sind. Daraus folgt, dass die Lösung des  $\mathcal{PT}$ -symmetrischen linearen Systems ebenfalls eine Lösung des nichtlinearen Problems ist.

Allerdings tauchen im nichtlinearen Fall noch zwei weitere Lösungen des Problems mit  $\kappa \neq 0$  auf. Diese Eigenpolarisationen sind in der folgenden Gleichung dargestellt.

$$v_3 = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{1 + \sqrt{1 - \frac{G_{xy}^2}{c^2 + \Gamma^2}}}{2}} e^{-i \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{\Gamma}{c}\right)} \\ \sqrt{\frac{1 - \sqrt{1 - \frac{G_{xy}^2}{c^2 + \Gamma^2}}}{2}} e^{i \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{\Gamma}{c}\right)} \end{pmatrix}, \quad (8.15)$$

$$v_4 = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{1 - \sqrt{1 - \frac{G_{xy}^2}{c^2 + \Gamma^2}}}{2}} e^{-i \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{\Gamma}{c}\right)} \\ \sqrt{\frac{1 + \sqrt{1 - \frac{G_{xy}^2}{c^2 + \Gamma^2}}}{2}} e^{i \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{\Gamma}{c}\right)} \end{pmatrix}. \quad (8.16)$$

Dabei fällt auf, dass die beiden Lösungen  $v_3, v_4$  äquivalent zu den Lösungen  $v_1, v_2$  in zwei verschiedenen Bereichen  $G_{xy}^2 > \Gamma^2 + c^2$  und  $G_{xy}^2 < \Gamma^2 + c^2$  existieren somit am Punkt  $G_{xy}^2 = \Gamma^2 + c^2$  zu einem Eigenpolarisationszustand verschmelzen. Es ist zu beachten dass die beiden Lösungen  $v_3, v_4$  für  $G_{xy}^2 \neq \Gamma^2 + c^2$  komplexe Eigenwerte besitzen, wie in Gleichung (8.12) zu erkennen ist, da  $\kappa \neq 0$  ist und somit einen imaginären Beitrag zu den Eigenwerten liefert. Diese beiden Bereiche und die damit verbundenen Eigenpolarisationen sind in den Abbildungen 8.1 und 8.2 dargestellt.

Zu Abbildung 8.1 und den Lösungen der Eigenzustände im Bereich  $G_{xy}^2 > \Gamma^2 + c^2$  ist zu sagen, dass es sich hier um einen besonderen Fall handelt. Diese Lösungen existieren nur in einer analytischen Erweiterung und ist somit nicht physikalisch. Berücksichtigt man dies, existieren also nur im Bereich  $\Gamma^2 < G_{xy}^2 - c^2$  Lösungen mit komplexen Eigenwerten. Dies ist also der  $\mathcal{PT}$ -gebrochene Bereich.

In Abbildung 8.2 ist zu erkennen, dass sich die Eigenpolarisationen  $v_3, v_4$  für große Werte von  $\Gamma$  an die Eigenpolarisationen  $v_1$  und  $v_2$  annähern. Nachdem die beiden Eigenpolarisationen  $v_1, v_2$  keine Orthogonalbasis, bilden stellt sich nun noch die Frage ob dasselbe auch für die beiden nur im nichtlinearen auftretenden Eigenpolarisationen  $v_3$

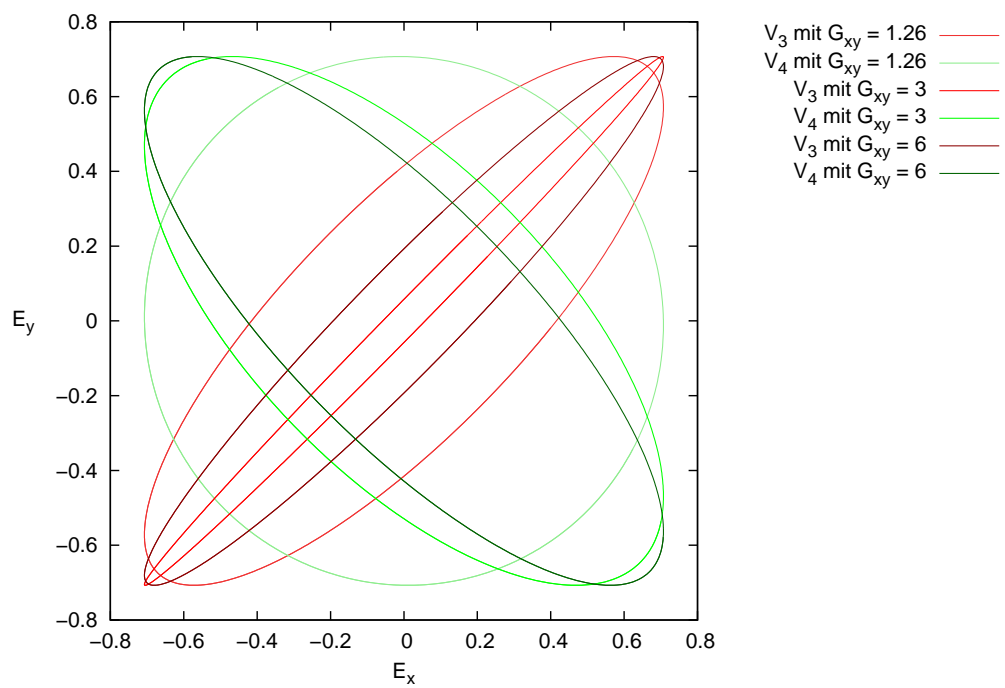


Abbildung 8.1: Eigenpolarisationszustände eines nichtlinearen Metamaterials für  $\Gamma^2 < G_{xy}^2 - c^2$  und  $\kappa \neq 0$  mit  $\Gamma = 1$  und  $c = 0.5$ .

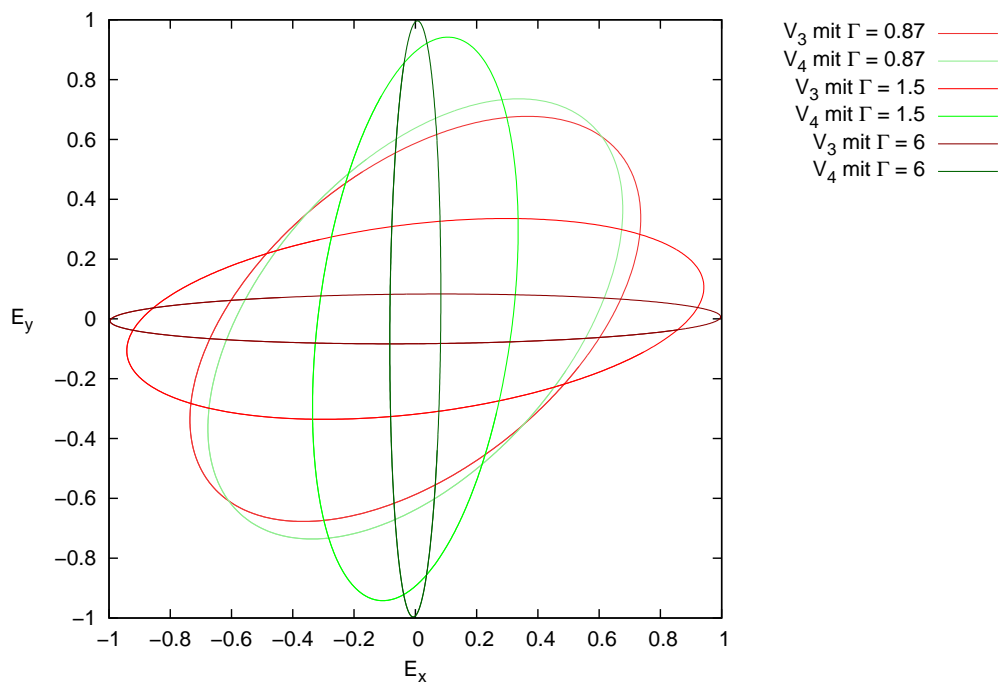


Abbildung 8.2: Eigenpolarisationszustände eines nichtlinearen Metamaterials für  $\Gamma^2 > G_{xy}^2 - c^2$  und  $\kappa \neq 0$  mit  $G_{xy} = 1$  und  $c = 0.5$ .

und  $v_4$  gilt.

$$\begin{aligned} \langle v_3 | v_4 \rangle &= \left( \sqrt{\frac{1+\kappa}{2}} e^{iq} \quad \sqrt{\frac{1-\kappa}{2}} e^{-iq} \right) \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{1-\kappa}{2}} e^{-iq} \\ \sqrt{\frac{1+\kappa}{2}} e^{iq} \end{pmatrix} \\ &= \sqrt{(1-\kappa^2)} = \frac{G_{xy}^2}{c^2 + \Gamma^2} \end{aligned} \quad (8.17)$$

Daran ist zu erkennen, dass sie beiden Eigenpolarisationen  $v_3, v_4$  keine Orthogonalbasis des Polarisationsraumes bilden. Nur für den Limes  $G_{xy} \rightarrow 0$ , oder äquivalent dazu den Limes  $\Gamma \rightarrow \infty$  konvergiert der Term aus Gleichung (8.17) gegen 0. Im Bereich nahe  $G_{xy}^2 = \Gamma^2 + c^2$  gilt allerdings, dass alle vier Eigenpolarisationen gleichzeitig existieren. Aus diesem Grund wurde dieser Bereich genauer untersucht und die vier Eigenpolarisationen in Abbildung 8.3 aufgetragen. Im Grenzbereich, also zwischen  $\Gamma^2 > G_{xy}^2 - c^2$  und

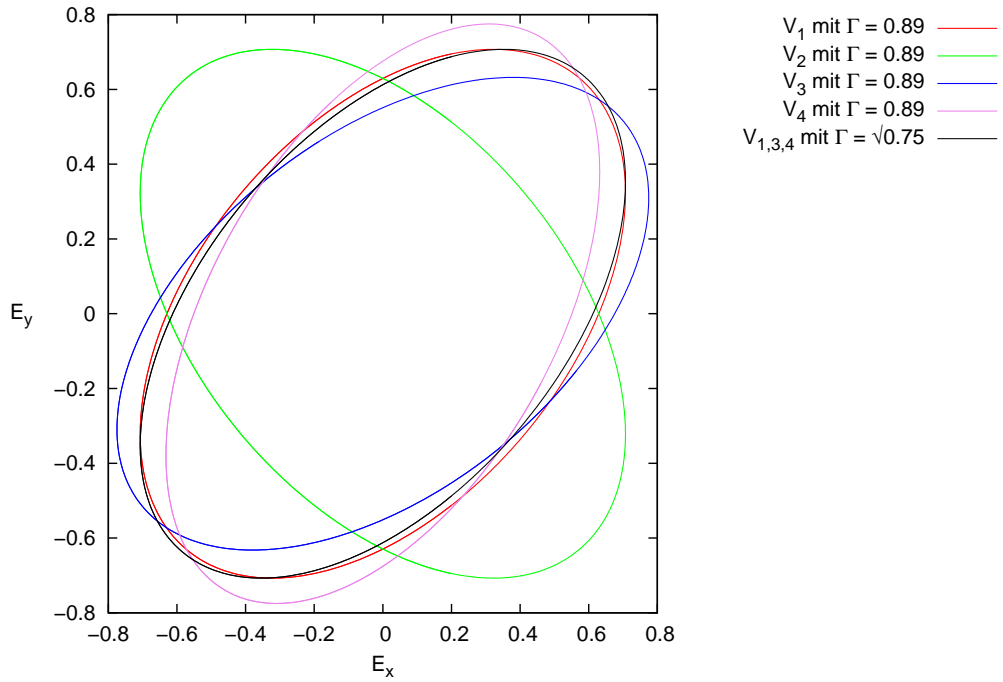


Abbildung 8.3: Eigenpolarisationszustände eines nichtlinearen Metamaterials für  $\Gamma^2 > G_{xy}^2 - c^2$ ,  $\Gamma^2 < G_{xy}^2$  mit  $G_{xy} = 1$  und  $c = 0.5$ .

$\Gamma^2 < G_{xy}^2$ , ist zu erkennen, dass die Eigenpolarisationen mit  $\kappa \neq 0$  aus der Eigenpolarisation  $v_1$  des linearen Systems entstehen. Hier nehmen  $v_1, v_2$  noch ihre Eigenpolarisationen

des linearen Systems an, bis sie beide zu einer zirkularen Eigenpolarisation verschmelzen. Währenddessen bilden  $v_3, v_4$  bereits ihre Eigenpolarisationen aus. Somit entstehen im nichtlinearen Fall Eigenpolarisationen der  $\mathcal{PT}$ -gebrochenen Zustände aus der Eigenpolarisation  $v_1$  und nicht, wie im linearen Fall, aus der Verschmelzung von  $v_1, v_2$  am EP.

Die Eigenpolarisationen  $v_3, v_4$  wurden nun noch für kleine Werte von  $c$  untersucht. Dazu wurden diese für einen kleinen Wert  $c$  in Abbildung 8.4 aufgetragen. An Abbil-

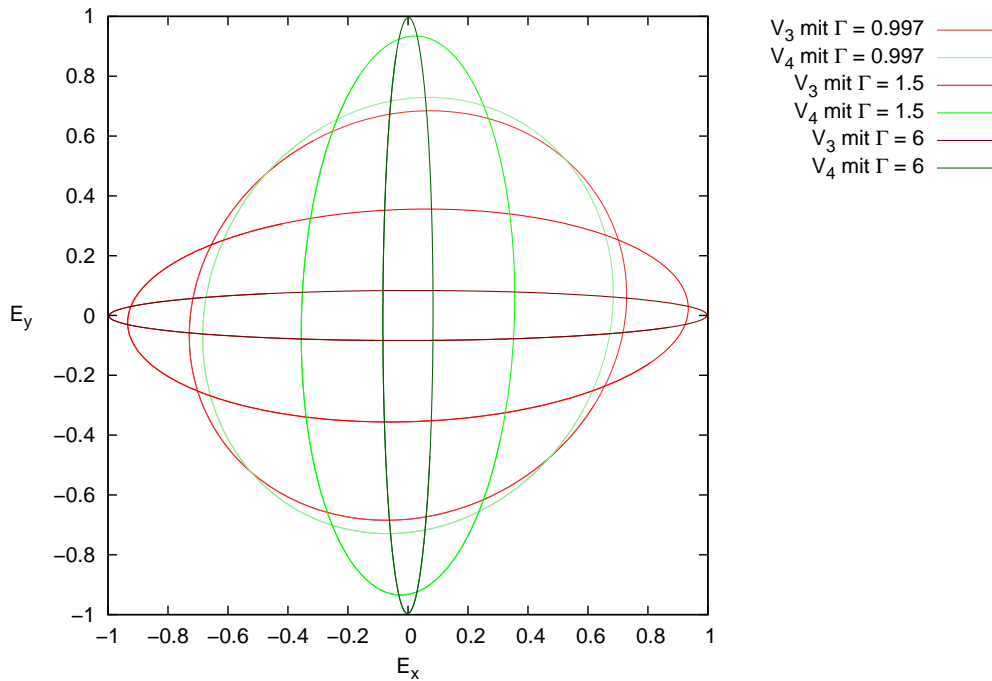


Abbildung 8.4: Eigenpolarisationszustände eines nichtlinearen Metamaterials für  $\Gamma^2 > G_{xy}^2 - c^2$  und  $\kappa \neq 0$  mit  $G_{xy} = 1$  und  $c = 0.1$ .

Abbildung 8.4 ist zu erkennen, dass sich für Werte  $c \rightarrow 0$  die Eigenpolarisationen  $v_3, v_4$  des nichtlinearen Systems immer weiter an die  $\mathcal{PT}$ -gebrochenen Eigenpolarisationen des linearen Systems annähern, bis die Eigenpolarisationen  $v_3, v_4$   $c = 0$  mit denen des linearen Systems identisch werden.

Durch erneutes Plotten der Abspaltung der Eigenpolarisationen  $v_3, v_4$  in Abbildung 8.5 ist zu erkennen, dass sich die Eigenpolarisationen für den Limes von  $c \rightarrow 0$  wieder annähernd aus einem EP, in welchem nur eine linkszirkuläre Eigenpolarisation existiert herausbilden.

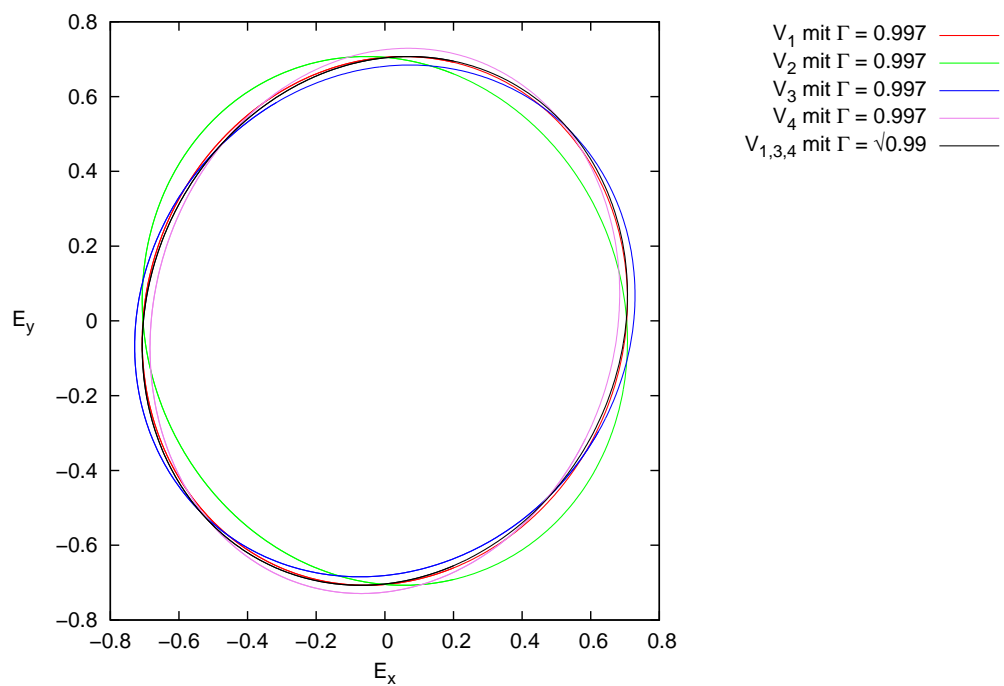


Abbildung 8.5: Eigenpolarisationszustände eines nichtlinearen Metamaterials für  $\Gamma^2 > G_{xy}^2 - c^2$ ,  $\Gamma^2 < G_{xy}^2$  mit  $G_{xy} = 1$  und  $c = 0.1$ .

## 9 Zusammenfassung und Ausblick

Anlass zu dieser Arbeit gab die Publikation [2], in welcher die in Kapitel 7 behandelte Lösung der Eigenpolarisationen von einem Metamaterial bei Terahertz-Strahlung untersucht wurde. Dabei war auffällig, dass die Gleichung zur Lösung dieses optischen  $\mathcal{PT}$ -symmetrischen Systems starke Ähnlichkeiten zur Schrödingergleichung für ein quantenmechanisches  $\mathcal{PT}$ -symmetrisches System aufweist. Dies warf die Überlegung auf, ob sich dieses System auch noch auf ein nichtlineares Problem erweitern ließe, welches dann mit bereits bekannten Rechenoperationen aus der Quantenmechanik gelöst werden kann. Für die Erweiterung des optischen Problems wurde eine Nichtlinearität der Form  $g|E|^2$  ergänzt, dies entspricht im optischen einer Kerr-Nichtlinearität, wodurch sich die Gleichung des optischen Systems so erweiterte, dass sie nun Ähnlichkeiten zur erweiterten Schrödingergleichung der Gross-Pitaevskii-Gleichung aufweist. Nun konnte mittels der quantenmechanischen Rechenmethoden für die Lösung eines Zwei-Moden Bose-Einstein-Kondensates [4], die Gleichung des optischen Äquivalentes gelöst werden.

Dabei wurden für das nichtlineare System insgesamt vier Eigenpolarisationen gefunden, wobei sich diese vier Eigenpolarisationen in zwei Paare aufteilen lassen. Das  $\mathcal{PT}$ -symmetrische lineare System hingegen besaß nur zwei Eigenpolarisationen. Die beiden Eigenpolarisationen des  $\mathcal{PT}$ -symmetrischen linearen Systems besitzen reelle Eigenwerte für  $G_{xy} > \Gamma$ , am 'exceptional point'  $G_{xy} = \Gamma$  verschmelzen die beiden Eigenpolarisationen zu einer und für  $G_{xy} < \Gamma$  trennen sich die Eigenpolarisationen wieder in zwei unterschiedliche auf, besitzen allerdings einen komplexen Eigenwert, wodurch sie in einen  $\mathcal{PT}$  gebrochenen Bereich übergehen. Wie gezeigt werden konnte sind die Eigenpolarisationen des linearen Systems ebenfalls Eigenpolarisationen des nichtlinearen Systems. In diesem System konnte ebenfalls ein  $\mathcal{PT}$ -Bruch beobachtet werden. Dieser unterscheidet sich aber vom linearen System. Für  $G_{xy}^2 < c^2 + \Gamma^2$  treten nur reelle Eigenwerte auf, ab  $G_{xy}^2 = c^2 + \Gamma^2$  treten zwei neue Eigenwerte auf, die sich von einem der reellen Eigenwerte abspalten. Sie haben komplexe Eigenwerte für  $G_{xy}^2 > c^2 + \Gamma^2$ . Daran ist zu erkennen, dass das nichtlineare System, im Gegensatz zum linearen System, für manche Werte von  $\Gamma$  vier parallel existierende Eigenpolarisationen besitzt. Die  $\mathcal{PT}$ -gebrochenen Eigenpolarisationen nähern sich für große Werte von  $\Gamma$  an die Eigenpolarisationen des linearen System an. Durch die Abspaltung von  $v_3, v_4$  aus  $v_1$  ist zu erkennen, dass sich die  $\mathcal{PT}$ -gebrochenen Eigenpolarisationen im nichtlinearen System vor der Verschmelzung von  $v_1$  und  $v_2$  bereits bilden, im Gegensatz zum linearen System, in welchem sich die  $\mathcal{PT}$ -gebrochenen Eigenpolarisationen erst nach der Verschmelzung der beiden Eigenpolarisationen bilden. Des weiteren wurde beobachtet, dass für  $c \rightarrow 0$  sich der 'exceptional

point' und der Punkt an dem sich  $v_3, v_4$  von  $v_1$  abspalten annähern, wodurch im Grenzfall für  $c = 0$ , im nichtlinearen System, wieder das lineare System entsteht.

Diese Arbeit bietet einige neue Ansatzpunkte, über welche sich neue Probleme erschließen, welche behandelt werden können. Zu allererst könnten einmal wie bereits erwähnt, die theoretisch vorhergesagten Eigenpolarisationen eines solchen  $\mathcal{PT}$ -symmetrischen nichtlinearen Metamaterials experimentell überprüft werden. Des weiteren könnte das lineare optische Problem um nichtlineare Terme anderer Form erweitert und gelöst werden. Diese könnten wie in Abschnitt 2.3 beschrieben, durch spannungsabhängige Kondensatoren, oder expliziter durch den allgemeinen elektrooptischen Effekt, woraus der Kerr-Effekt ein Spezialfall ist umgesetzt werden. Da Metamaterialien generell aus künstlichen Elementarbausteinen zusammen gesetzt werden, welche die Form von Dimern besitzen, lassen sich diese Metamaterialien über den Ansatz eines Lorentz-Dipols beschreiben. Damit lassen sich allgemeine Probleme zur Wechselwirkung von Metamaterialen mit  $E$ - und  $B$ - Felder oder die Ausbreitung von Wellen im Metamaterial betrachten.



# Literaturverzeichnis

- [1] C. M. Bender und S. Boettcher. Real Spectra in Non-Hermitian Hamiltonians Having  $\mathcal{PT}$  Symmetry. *Physical Review Letters* 80, 5243–5246 (1998).
- [2] M. Lawrence, N. Xu, X. Zhang, L. Cong, J. Han, W. Zhang und S. Zhang. Manifestation of  $\mathcal{PT}$  Symmetry Breaking in Polarization Space with Terahertz Metasurfaces. *Physical Review Letters* 113, 093901 (2014).
- [3] C. E. Ruter, K. G. Makris, R. El-Ganainy, D. N. Christodoulides, M. Segev und D. Kip. Observation of parity-time symmetry in optics. *Nature Physics* 6, 192–195 (2010).
- [4] E.-M. Graefe. Stationary states of a  $\mathcal{PT}$  symmetric two-mode Bose–Einstein condensate. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* 45, 444015 (2012).
- [5] D. Meschede. *Gerthsen Physik*. Springer-Lehrbuch. Springer Berlin Heidelberg (2015).
- [6] N. Lazarides und G. P. Tsironis. Gain-Driven Discrete Breathers in  $\mathcal{PT}$ -Symmetric Nonlinear Metamaterials. *Physical Review Letters* 110, 053901 (2013).
- [7] L. Esaki. New Phenomenon in Narrow Germanium  $p$ – $n$  Junctions. *Physical Review Letters* 109, 603–604 (1958).
- [8] W. Demtröder. *Experimentalphysik 2: Elektrizität und Optik*. Springer-Lehrbuch. Springer Berlin Heidelberg (2014).
- [9] N. Lazarides, V. Paltoglou und G. P. Tsironis. Nonlinear Magnetoinductive Transmission Lines. *International Journal of Bifurcation and Chaos* 21, 2147–2159 (2011).
- [10] H. Giessen. Vorlesung Experimentalphysik 3 (2013/2014).
- [11] D. Meschede. *Optik, Licht und Laser*. Teubner Studienbücher. Vieweg+Teubner Verlag (2008).
- [12] S.A. Tretyakov, A. J. Viitanen, S. I. Maslovski und I.E. Saarela. Impedance boundary conditions for regular dense arrays of dipole scatterers. *Antennas and Propagation, IEEE Transactions on* 51, 2073–2078 (2003).

- [13] S. Hunklinger. *Festkörperphysik*. De Gruyter Studium. De Gruyter (2014).
- [14] C. M. Bender. Making sense of non-Hermitian Hamiltonians. *Reports on Progress in Physics* 70, 947 (2007).
- [15] D. Haag. *Numerische Behandlung von Bose-Einstein-Kondensaten im  $\mathcal{PT}$ -symmetrischen Doppelmuldenpotential*. Masterarbeit, Universität Stuttgart (2012).
- [16] A. Löhle. *Stabilitätslücke bei  $\mathcal{PT}$ -symmetrischen Bose-Einstein-Kondensaten*. Bachelorarbeit, Universität Stuttgart (2013).
- [17] J. Rogel-Salazar. The Gross–Pitaevskii equation and Bose–Einstein condensates. *European Journal of Physics* 34, 247 (2013).

# Danksagung

Hiermit möchte ich mich bei allen herzlich bedanken die mich beim schreiben meiner Bachelorarbeit unterstützt haben. In besonderem Maße möchte ich mich bei Dr. Holger Cartarius bedanken, an welchen ich mich stets mit meinen Fragen wenden konnte und für sein Engagement für uns Bachelorstudenten. Ebenfalls möchte ich Prof. Dr. Günter Wunner danken für die Möglichkeit, dass ich meine Bachelorarbeit am 1. Institut für Theoretische Physik anfertigen durfte und für seine Initiative, ohne welche, diese Bachelorarbeit so nicht zu Stande gekommen wäre. Zu guter Letzt geht noch mein Dank an alle Mitarbeiter des 1. Institut für Theoretische Physik, für die freundliche Arbeitsatmosphäre und die gute Zusammenarbeit.



## **Ehrenwörtliche Erklärung**

Ich erkläre,

- dass ich diese Bachelorarbeit selbständig verfasst habe,
- dass ich keine anderen als die angegebenen Quellen benutzt und alle wörtlich oder sinngemäß aus anderen Werken übernommenen Aussagen als solche gekennzeichnet habe,
- dass die eingereichte Arbeit weder vollständig noch in wesentlichen Teilen Gegenstand eines anderen Prüfungsverfahrens gewesen ist,
- dass ich die Arbeit weder vollständig noch in Teilen bereits veröffentlicht habe, es sei denn, der Prüfungsausschuss hat die Veröffentlichung vorher genehmigt
- und dass der Inhalt des elektronischen Exemplars mit dem des Druckexemplars übereinstimmt.

Stuttgart, den 21. August 2015

*Sascha Böhrkircher*