

Skript zur Vorlesung Allgemeine Relativitätstheorie

gelesen von: Apl. Prof. Dr. rer. nat. Jörg Main

Skript von : Michael Klas

Inhalt

1. Wiederholung der SRT.....	- 4 -
2. Die ART: Erweiterung der SRT um die Gravitation.....	- 5 -
2.1 Bewegung im Gravitationsfeld: Geodätengleichung der ART.....	- 5 -
3. Riemannsche Geometrie.....	- 7 -
3.1 Tensoralgebra.....	- 7 -
3.2 Der metrische Tensor $g_{\mu\nu}$	- 7 -
3.3 Das Volumenelement.....	- 9 -
3.4 Tensoralgebra.....	- 10 -
3.4.1 Multilinearform.....	- 10 -
3.5 Metrische Räume.....	- 10 -
3.6 Riemannsche Räume, differenzierbare Mannigfaltigkeit.....	- 10 -
3.6.1 Tangentialraum.....	- 11 -
3.6.2 Kotangentialraum.....	- 11 -
3.6.3 Koordinatentransformation.....	- 12 -
3.7 Tensoranalysis.....	- 13 -
3.7.1 Parallelverschiebung, affine Zusammenhänge.....	- 13 -
3.7.2 Kontravariantes Differential.....	- 15 -
3.7.3 Kovariante Ableitungen.....	- 15 -
3.7.4 Kovarianter Differenzvektor.....	- 15 -
3.7.5 Kovariante Ableitung eines kontravarianten Tensors.....	- 15 -
3.8 Divergenz.....	- 16 -
3.9 Rotation eines kovarianten Tensors B_{μ}	- 16 -
3.10 Geodätische Linien.....	- 16 -
4. Die Krümmung des Raums.....	- 17 -
4.1 Krümmung bekannter Flächen.....	- 17 -
4.1.1 Ebene (allgemein flacher Raum).....	- 17 -
4.1.2 Kugeloberfläche.....	- 17 -
4.1.3 Zylinderfläche.....	- 17 -
4.2 Der Krümmungstensor.....	- 17 -
4.2.1 Formale Definition des Krümmungstensors.....	- 18 -
4.2.2 Symmetrien des Krümmungstensors.....	- 19 -
4.2.3 Kovarianter Krümmungstensor.....	- 19 -
4.2.4 Verjüngung des Krümmungstensors.....	- 19 -
4.2.5 Verjüngung des Ricci-Tensors.....	- 19 -
4.2.6 Bianchi-Identität.....	- 19 -

4.2.7 Pseudoriemannsche Mannigfaltigkeit	- 19 -
5. Physikalische Grundlagen der ART	- 21 -
5.1 Äquivalenz schwerer und träger Masse.....	- 21 -
5.2 Fahrstuhlexperimente	- 21 -
5.2.1 Weight-Watcher-Experiment	- 21 -
5.2.2 Freie-Fall-Experiment	- 22 -
5.3 Mathematische Formulierung des Äquivalenzprinzips	- 22 -
5.3.1 Bewegungsgleichungen der ART und ihre nicht-relativistische Näherung	- 23 -
5.3.2 Poisson-Gleichung.....	- 24 -
5.4 Eigenschaften des Energie-Impuls-Tensors	- 24 -
6. Anwendungen der ART.....	- 28 -
6.1 Die Schwarzschild-Metrik.....	- 28 -
6.1.1 Berechnung der Christoffelsymbole (von Null verschieden)	- 28 -
6.1.2 Berechnung des Krümmungstensors	- 29 -
6.2 Folgerungen aus der Schwarzschildmetrik.....	- 30 -
6.2.1 Uhren im Gravitationsfeld und Gravitationsrotverschiebung.....	- 30 -
6.2.2 Teilchenbahnen in der Schwarzschild-Metrik: Periheldrehung	- 31 -
6.2.3 Lichtablenkung in der Schwarzschild-Metrik	- 33 -
6.2.4 Newtonsche Theorie.....	- 34 -
6.2.5 Laufzeitverzögerung.....	- 34 -
7. Gravitationskollaps und schwarze Löcher.....	- 35 -
7.1 Kruskal-Koordinaten	- 37 -
7.2 Gravitationskollaps: Elementare Theorie entarteter Sterne.....	- 39 -
7.3 Kosmologie	- 41 -
7.4 Die Friedmann-Universen (ohne kosmologische Konstante $\Lambda = 0$).....	- 44 -
7.4.1. Bestimmung der Hubble-Zahl: Die Rotverschiebung	- 46 -
7.4.2. Weltmodelle mit kosmologischer Konstante ($\Lambda \neq 0$).....	- 47 -
7.4.3. Fragen zum Kosmos.....	- 48 -
7.4.4. Anisotropie der kosmischen Hintergrundstrahlung.....	- 52 -
8. Gravitationswellen.....	- 54 -

1. Wiederholung der SRT

Die Lichtgeschwindigkeit ist in allen Inertialsystemen gleich.

Konsequenzen:

- Raum und Zeit können nicht unabhängig betrachtet werden.
- Raum-Zeit-Vektor: $x^\mu = (ct, x, y, z)$ (Vierervektor, Transformation mit Lorentz-Transformation)
- Der Abstand $(\Delta s)^2 = c^2(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2$ zwischen zwei Raum-Zeit-Punkten ist derselbe in allen Inertialsystemen.
- Linienelement (infinitesimales Wegelement):
 $(ds)^2 = c^2(dt)^2 - (dx)^2 - (dy)^2 - (dz)^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ mit

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ als metrischer Tensor des Minkowskiraumes}$$

- Relativistische Bewegungsgleichung für Teilchen mit Ruhemasse m:

$$F^\mu = m b^\mu = m \frac{d}{d\tau} u^\mu = \frac{d}{d\tau} p^\mu$$

- Elektrodynamik: $F_\mu = q \underbrace{F_{\mu\nu}}_{\text{Feldstärke-tensor}} u^\nu$

- Es ist möglich die Elektrodynamik kovariant zu formulieren.

Das Problem ist nun, eine kovariante Formulierung von Gravitationskräften zu finden.

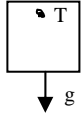
Ansätze für das Gravitationspotential $\Phi(x^\mu)$:

1. $\Phi(x^\mu)$ ist Lorentz-invariantes skalares Feld
2. Φ ist Teil eines Vierervektors $A^\mu = \begin{pmatrix} \Phi \\ c \\ \vec{A} \end{pmatrix}$ (analog zur E-dyn.)

Beide Ansätze liefern unphysikalische Lösungen.

2. Die ART: Erweiterung der SRT um die Gravitation

Einstein ging ähnlich wie bei der Entwicklung der SRT von einfachen Grundüberlegungen aus:

Schwere Masse:	$\vec{F}_g = m_s \vec{g}$		$\vec{F} = m_t \vec{b}$ Gesamtkraft
Träge Masse:	$\vec{F}_t = m_A \ddot{m} = m_t \vec{b}$		$\vec{F}_g = m_s \vec{g}$ Gravitationskraft

Die Kraft relativ zum Kasten:

$$m_t(\vec{b} - g) = \vec{F}_t - \vec{F}_g = m_t \vec{b} - m_s \vec{g} \quad \text{Dies gilt wenn } m_s = m_t$$

Ein Beobachter in einem Raumschiff (ohne Antrieb) kann nicht entscheiden, ob er sich im leeren Raum geradlinig bewegt, oder in einem Gravitationsfeld beschleunigt wird.

Äquivalenzprinzip:

Ein kleines Labor welches in einem Schwerefeld frei fällt, ist äquivalent zu einem Newtonschen Inertialsystem.

ART: Raumschiff ohne Antrieb bewegt sich kräftefrei (auf einer Geodäten) in einem durch Massen (Gravitation) gekrümmten Raum.

Die Gravitation beeinflusst die Metrik des Raumes.

Linielement: $(ds)^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ mit $g_{\mu\nu}(x^\mu)$ als Raum-Zeit-abhängiger metr. Tensor

Hauptaufgabe der ART:

Bestimmung der Metrik $g_{\mu\nu}(x^\mu)$ bei gegebener Massenverteilung.

Vergleiche: Freie Bewegung auf Kugeloberfläche

Lokal: Kugeloberfläche kann durch einen euklidischen Raum (zweidimensionale Tangentialebene) approximiert werden.

Global: Bewegung erfolgt im gekrümmten Raum

Die ART erfordert Behandlung gekrümmter Räume (Riemannsche Mannigfaltigkeit)

2.1 Bewegung im Gravitationsfeld: Geodätengleichung der ART

Wegelement: $ds = \sqrt{g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu}$ $g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}(x^\mu)$

Hierbei muss beachtet werden, dass sich die Metrik für jeden Punkt anders sein kann.

Variationsprinzip:

$$\delta \int_A^B ds = 0$$

$$\delta \int ds = \delta \int \sqrt{g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu} = \rho \delta \int \underbrace{\sqrt{g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds}}}_{L(x^\alpha, \frac{dx^\alpha}{ds})=1} ds = \delta \int L(x^\alpha, \frac{dx^\alpha}{ds}) ds \quad (2.1.a)$$

Lagrange

Euler-Lagrange-Gleichung: $\frac{d}{ds} \left(\frac{\partial L}{\partial \left(\frac{dx^\alpha}{ds} \right)} \right) - \frac{\partial L}{\partial x^\alpha} = 0$

Einsetzen des in 2.1.a ermittelten L ergibt:

$$\frac{\partial L}{\partial \left(\frac{dx^\alpha}{ds} \right)} = \frac{1}{2L} \left(g_{\alpha\nu} \frac{dx^\nu}{ds} + g_{\mu\alpha} \frac{dx^\mu}{ds} \right) \stackrel{g_{\mu\alpha}=g_{\alpha\mu}}{=} \frac{1}{L} g_{\alpha\nu} \frac{dx^\nu}{ds}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x^\alpha} = \frac{1}{2L} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds}$$

$$\frac{d}{ds} \left[\frac{1}{L} g_{\alpha\nu} \frac{dx^\nu}{ds} \right] - \frac{1}{2L} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} = 0$$

Benutze: $\frac{d}{ds} g_{\alpha\nu} = \frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x^\mu} \frac{dx^\mu}{ds}$

$$\frac{1}{L} \frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x^\mu} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} + \frac{1}{L} g_{\alpha\nu} \frac{d^2 x^\nu}{ds^2} - \frac{1}{L^2} \frac{\partial L}{\partial s} g_{\alpha\nu} \frac{dx^\nu}{ds} - \frac{1}{2L} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} = 0 \quad | \cdot L$$

$$\frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x^\mu} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} + g_{\alpha\nu} \frac{d^2 x^\nu}{ds^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} = 0 \quad | g_{\alpha\nu,\mu} = \frac{1}{2} g_{\alpha\nu,\mu} + \frac{1}{2} \underbrace{g_{\alpha\nu,\mu}}_{=\frac{1}{2} g_{\nu\alpha,\mu}}$$

Umbenennung der Indices ($\mu \leftrightarrow \nu$) im zweiten Term führt zu:

$$g_{\alpha\nu} \frac{d^2 x^\nu}{ds^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} \right) \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} = 0 \quad | \cdot g^{\sigma\alpha}$$

$\Gamma_{\alpha\mu\nu}$: Christoffel Symbol
1.Art

$$\frac{d^2 x^\sigma}{ds^2} + \underbrace{g^{\sigma\alpha} \Gamma_{\alpha\mu\nu}}_{\Gamma_{\mu\nu}^\sigma \text{ Christoffel Symbol 2.Art}} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} = 0$$

Geodätengleichung der ART:

$$\frac{d^2 x^\sigma}{ds^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\sigma \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} = 0$$

mit $\Gamma_{\mu\nu}^\sigma = \frac{1}{2} g^{\sigma\alpha} \left(\frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} \right)$ (kein Tensor)

Gravitation steckt über den metrischen Tensor in den Christoffel-Symbolen.

3. Riemannsche Geometrie

3.1 Tensoralgebra

x^μ : Vektor in einer beliebig gewählten n-dimensionalen Basis
Koordinatentransformation (Wechsel der Basis):

$$x^\mu \rightarrow \bar{x}^\nu = \bar{x}^\nu(x^\mu)$$

Wie transformieren die Differentiale dx^μ ?

$$d\bar{x}^\nu = \frac{\partial \bar{x}^\nu}{\partial x^\mu} dx^\mu$$

Jede n-komponentige Größe A^μ , die sich wie die Differentiale transformiert (also nach der Vorschrift)

$$\bar{A}^\nu = \frac{\partial \bar{x}^\nu}{\partial x^\mu} A^\mu$$

heißt kontravarianter Tensor 1. Stufe.

Wie transformieren die Ableitungen $\frac{\partial}{\partial x^\mu}$?

Betrachten der Funktion $f(\bar{x}^\nu)$:

$$\frac{\partial}{\partial \bar{x}^\nu} f(\bar{x}^\nu) = \frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^\nu} \frac{\partial}{\partial x^\mu} f(x^\mu(\bar{x}^\nu))$$

Jede n-komponentige Größe B_ν , die sich wie die Koordinatenableitungen (n-dim. Gradient) transformiert heißt kovarianter Tensor 1. Stufe.

$$\bar{B}_\nu = \frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^\nu} B_\mu$$

Tensoren höherer Stufe wie gehabt:

$A^\mu{}_\nu$ einfach kontra- und einfach kovarianter Tensor

$$\bar{A}^\mu{}_\nu = \frac{\partial \bar{x}^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^\nu} A^\alpha{}_\beta$$

Tensorprodukt wie gehabt:

$$C^{\mu\nu} = A^\mu B^\nu$$

Tensorverjüngung (Aussparen) wie gehabt:

$$\text{Skalarprodukt: } C = A^\mu B_\mu \quad (\text{Tensor 0.ter Stufe, Skalar})$$

3.2 Der metrische Tensor $g_{\mu\nu}$

Das infinitesimale Wegelement besitzt die Form $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$

In n-dimensionalen kartesischen Koordinaten gilt: $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

Koordinatentransformation: $x^\mu = x^\mu(\bar{x}^\alpha)$

$$dx^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^\alpha} d\bar{x}^\alpha$$

$$\Leftrightarrow ds^2 = \underbrace{\frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^\alpha} \frac{\partial x^\nu}{\partial \bar{x}^\beta} \eta_{\mu\nu}}_{\bar{g}_{\alpha\beta}: \text{Metrischer Tensor in den neuen Koordinaten}} d\bar{x}^\alpha d\bar{x}^\beta$$

Allgemein:

$$\bar{g}_{\alpha\beta} = \frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^\alpha} \frac{\partial x^\nu}{\partial \bar{x}^\beta} g_{\mu\nu} \quad \text{wobei } g_{\mu\nu} \text{ ein } \underline{\text{symmetrischer, positiv definiter}} \text{ kovarianter Tensor 2. Stufe ist.}$$

Herunterziehen von Indizes:

$$A_\mu = g_{\mu\nu} A^\nu \text{ ist ein kontravarianter Tensor 1. Stufe}$$

$$\text{Bei Tensoren h\u00f6herer Stufe gilt: } A_{\mu\nu\dots} = g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} \dots A^{\alpha\beta\dots}$$

Heraufziehen von Indizes: mit $g^{\mu\nu}$

$$g^{\mu\nu} A_\nu = \underbrace{g^{\mu\nu} g_{\nu\alpha}}_{\substack{\text{muss 1 sein,} \\ \text{f\u00fcr } \alpha=\mu, \\ \text{sonst 0}}} A^\alpha = A^\mu \Rightarrow \underbrace{g^{\mu\nu}}_{\substack{\text{Inverse} \\ \text{von } g_{\nu\alpha}}} g_{\nu\alpha} = \delta_\alpha^\mu$$

Beispiele:

a) 2-dim. Ebene:

$$\text{kartesisch: } x^1 = x; x^2 = y; ds^2 = dx^2 + dy^2; g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{\u00dcbergang zu Polarkoordinaten: } x = r \cos \varphi; y = r \sin \varphi \\ \bar{x}^1 = r; \bar{x}^2 = \varphi$$

$$\bar{g}_{\alpha\beta} = \frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^\alpha} \frac{\partial x^\nu}{\partial \bar{x}^\beta} g_{\mu\nu} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \bar{g}_{11} = \frac{\partial x}{\partial r} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial y}{\partial r} \frac{\partial y}{\partial r} = 1 \\ \bar{g}_{22} = \frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial y}{\partial \varphi} \frac{\partial y}{\partial \varphi} = r^2 \\ \bar{g}_{12} = \bar{g}_{21} = 0 \end{array} \right\} \bar{g}_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (\bar{x}^1)^2 \end{pmatrix}$$

hierbei durchlaufen μ, ν alle Zahlen von 1-n, wobei man wegen der Diagonalit\u00e4t nur $\mu = \nu$ betrachten muss.

$$\Rightarrow ds^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2 = (d\bar{x}^1)^2 + (\bar{x}^1)^2 (d\bar{x}^2)^2$$

Die Koordinaten sind nicht kartesisch, aber der Raum ist flach.

b) 3-dimensionaler Raum (flach)

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{\u00dcbergang zu Kugelkoordinaten: } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \vartheta \cos \varphi \\ r \cos \vartheta \sin \varphi \\ r \sin \vartheta \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} \bar{x}^1 \\ \bar{x}^2 \\ \bar{x}^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ \vartheta \\ \varphi \end{pmatrix}$$

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\vartheta^2 + r^2 \sin^2 \vartheta d\varphi^2 \\ = (d\bar{x}^1)^2 + (\bar{x}^1)^2 (d\bar{x}^2)^2 + (\bar{x}^1)^2 \sin^2(\bar{x}^2) (d\bar{x}^3)^2$$

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2 \vartheta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (\bar{x}^1)^2 & 0 \\ 0 & 0 & (\bar{x}^1 \sin \bar{x}^2)^2 \end{pmatrix}$$

c) Oberfläche der Einheitskugel ($r=1$): Zweidimensionaler gekrümmter Raum

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vartheta \\ \varphi \end{pmatrix} \quad g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2 \vartheta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2(x^1) \end{pmatrix}$$

$$ds^2 = (dx^1)^2 + (\sin x^1)^2 (dx^2)^2 = d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2$$

=> Beschreibung der Kugeloberfläche ohne Einbettung.

Hinweis: $g_{\mu\nu}$ für $x^1 = 0, \pi$ nicht invertierbar: Koordinatensingularitäten

Christoffel-Symbol 1.Art:

$$\Gamma_{\alpha\mu\nu} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} \right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} = 2 \sin \vartheta \cos \vartheta \quad \text{sonst alle } = 0.$$

$$\Gamma_{111} = \Gamma_{112} = \Gamma_{121} = \Gamma_{222} = \Gamma_{211} = 0$$

$$\Gamma_{122} = -\sin \vartheta \cos \vartheta$$

$$\Gamma_{212} = \Gamma_{221} = \sin \vartheta \cos \vartheta$$

$$\Leftrightarrow \text{Geodätengleichung: } g_{\alpha\nu} \frac{d^2 x^\nu}{ds^2} + \Gamma_{\alpha\mu\nu} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} = 0$$

$$\alpha = 1 \Rightarrow \frac{d^2 \vartheta}{ds^2} - \sin \vartheta \cos \vartheta \left(\frac{d\varphi}{ds} \right)^2 = 0$$

$$\alpha = 2 \Rightarrow \sin^2 \vartheta \frac{d^2 \varphi}{ds^2} + 2 \sin \vartheta \cos \vartheta \frac{d\vartheta}{ds} \frac{d\varphi}{ds} = 0$$

Geodätengleichung stimmen überein mit der Lagrangeschen Gleichung für

$$L = \frac{1}{2} (\dot{\vartheta}^2 + \sin^2 \vartheta \dot{\varphi}^2)$$

3.3 Das Volumenelement

In kartesischen Koordinaten: $dV = \prod_{i=1}^n dx^i$

Transformation der Koordinaten: $x^\mu = x^\mu(\bar{x}^\alpha)$, $dx^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^\alpha} d\bar{x}^\alpha$

$$dV = \prod_{i=1}^n dx^i = \underbrace{\det \left(\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^i} \right)}_{\text{Jacobi-Matrix}} \prod_{k=1}^n d\bar{x}^k = d\bar{V} \quad (3.4.a)$$

Kartesisch: $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} \rightarrow \bar{g}_{\alpha\beta} = \frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^\alpha} \frac{\partial x^\nu}{\partial \bar{x}^\beta} \eta_{\mu\nu} \quad g := \det g_{\mu\nu}$

$$\begin{aligned} \bar{g} &= \det \bar{g}_{\alpha\beta} = \det \left(\frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^\alpha} \cdot \frac{\partial x^\nu}{\partial \bar{x}^\beta} \cdot \eta_{\mu\nu} \right) \\ &= \det \left(\frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^\alpha} \right) \det \left(\frac{\partial x^\nu}{\partial \bar{x}^\beta} \right) \underbrace{\det(\eta_{\mu\nu})}_{= 1 \text{ in kartesischen Koord.}} \det \left(\frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^\alpha} \right) = \det \left(\frac{\partial x^\nu}{\partial \bar{x}^\beta} \right) \\ &= \left(\det \left(\frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^\alpha} \right) \right)^2 \end{aligned}$$

$$\sqrt{\bar{g}} = \det \left(\frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^\alpha} \right)$$

Einsetzen in (3.4.a) liefert $d\bar{V} = \sqrt{\bar{g}} \cdot \prod_{i=1}^n d\bar{x}^i$

Allgemein in krummlinigen Koordinaten:

$$dV = \sqrt{g} \cdot \prod_{\mu} dx^{\mu} \quad g := \det(g_{\mu\nu})$$

3.4 Tensoralgebra

V: Vektorraum mit Basis $e_1 \dots e_n$

Abb: $f: V \rightarrow \mathbb{R}$ (linear Abb.: $f(ax+by)=af(x)+bf(y)$)

f ist eine Linearform über V

Definition:

Die Gesamtheit der linearen Abbildungen $V \rightarrow \mathbb{R}$ heißt Dualraum V^*

Wenn $e_1 \dots e_n$ eine Basis in V, dann existiert eindeutig bestimmte Basis $\bar{e}^1, \dots, \bar{e}^n$ in

V^* mit $\bar{e}^i(e_j) = \delta_j^i$

3.4.1 Multilinearform

Ein Tensor der Stufe (p,q), p-fach kontravariant und q-fach kovariant, ist eine Abbildung von $(V_1^*, \dots, V_p^*, V_{p+1}, \dots, V_{p+q}) \rightarrow \mathbb{R}$ (linear in allen Argumenten)

Basis: $e_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_p} = e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_p} \otimes \bar{e}^{j_1} \otimes \dots \otimes \bar{e}^{j_p}$

Komponenten des Tensors: $T^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_p} = T(e_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_p})$

3.5 Metrische Räume

Metrik: Symmetrischer Tensor vom Typ (0,2)

$$g(u, v) = g_{\mu\nu} u^{\mu} v^{\nu}; \quad g_{\mu\nu} = g(e_{\mu}, e_{\nu}) = g_{\nu\mu}$$

Umkehrung: g^* ist ein Tensor der Stufe (2,0)

$$g^*(\bar{\mu}, \bar{\nu}) = g^{\mu\nu} \bar{\mu}_{\mu} \bar{\nu}_{\nu}; \quad g^{\mu\nu} = g^*(\bar{e}^{\mu}, \bar{e}^{\nu}) = g^{\nu\mu}$$

Es gilt nun:

$$g^*(\bar{e}^{\mu}, \bar{e}^{\alpha}) g(e_{\alpha}, e_{\nu}) = g^{\mu\alpha} g_{\alpha\nu} = \delta_{\nu}^{\mu}$$

Das Skalarprodukt zwischen x^{μ} und x^{ν} wird ausgedrückt durch: $g_{\mu\nu} x^{\mu} x^{\nu}$

3.6 Riemannsche Räume, differenzierbare Mannigfaltigkeit

Definition:

Eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit M^n ist ein topologischer Raum mit folgenden Eigenschaften:

- homöomorph
1. Jeder Punkt besitzt eine Umgebung $U \xrightarrow{\text{homöomorph}} \mathbb{R}^n$ mit $\sigma(P) = (X^1(P), \dots, X^n(P))$
 2. Der gesamte Raum ist durch endlich viele (oder abzählbar viele) Umgebungen überdeckbar.
 3. Zu je zwei Punkten existieren disjunkte Umgebungen (Hausdorffscher Raum)
 4. M^n soll zusammenhängend sein.

Definition:

M^n heißt differenzierbare Mannigfaltigkeit, wenn zwei sich überlappende Koordinatensysteme (x^i) und $(x^{i'})$ durch eine r-fach stetig differenzierbare Koordinatentransformation $x^{i'} = x^{i'}(x^1, \dots, x^n)$; $i = 1 \dots n$ mit einer nicht singulären Funktionaldeterminante verknüpft sind.

Koordinatendifferentiale: $dx^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^k} dx^k$

Definition:

Eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit M^n mit einem fest vorgegeben (nicht singulären) symmetrischen kovarianten Tensorfeld 2. Stufe (Metrik) heißt n-dimensionaler Riemannscher Raum.

3.6.1 Tangentialraum

Sei $F = f(x^i)$ koordinatenmäßige Darstellung einer skalaren Funktion auf M^n . In jedem Punkt P sind n Tangentialvektoren $\partial_i (i = 1 \dots n)$ gegeben.

Für diese Tangentialvektoren gilt:

$$\partial_i|_P(F) \equiv \frac{\partial f}{\partial x^i}|_P \equiv f_{,i}|_P \qquad T_p: \text{Tangentialraum im Punkt P}$$

3.6.2 Kotangentialraum

Betrachte df längs einer Kurve $x^i = x^i(s)$, dann gilt:

$$df = \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x^i}}_{f_{,i} \in T_p^*} \underbrace{dx^i}_{dx^i \in T_p^*}$$

Hierbei bezeichnet T_p^* den Kotangentialraum.

3.6.3 Koordinatentransformation

$$\bar{x}^\nu = \bar{x}^\nu(x^\mu)$$

Differentiale: $d\bar{x}^\nu = \frac{\partial \bar{x}^\nu}{\partial x^\mu} dx^\mu = \alpha_\mu^\nu dx^\mu$ Inverse Transformation

Ableitungen: $\bar{\partial}_\nu = \frac{\partial}{\partial \bar{x}^\nu} = \frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^\nu} \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \alpha_\nu^\mu \partial_\mu$

$$\bar{g}_{\mu'\nu'} = \alpha_{\mu'}^\rho \alpha_{\nu'}^\sigma g_{\rho\sigma}$$

Christoffel-Symbole: $\Gamma_{\mu\nu\lambda} = \frac{1}{2}(g_{\mu\nu,\lambda} + g_{\mu\lambda,\nu} - g_{\nu\lambda,\mu})$ (1. Art)

$$\Gamma_{\nu\lambda}^\mu = g^{\mu\rho} \Gamma_{\rho\nu\lambda}$$
 (2. Art)

$$\bar{\Gamma}_{\nu'\lambda'}^{\mu'} = \alpha_{\nu'}^\rho \alpha_{\lambda'}^\sigma \alpha_{\tau'}^{\mu'} \Gamma_{\rho\sigma\tau} + \frac{\partial^2 x^\rho}{\partial \bar{x}^{\nu'} \partial \bar{x}^{\lambda'}} \cdot \frac{\partial \bar{x}^{\mu'}}{\partial x^\rho}$$
 ($\Gamma_{\nu\lambda}^\mu$ kein Tensor!)

Kontravarianter Vektor A^μ : $\bar{A}^\nu = \alpha_\mu^\nu A^\mu$

Ableitung eines kontravarianten Vektors: $A^\mu_{,\nu} = \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\nu}$

$$\begin{aligned} \bar{A}^{\mu'}_{,\nu'} &= \frac{\partial}{\partial \bar{x}^{\nu'}} \bar{A}^{\mu'} = \alpha_{\nu'}^\rho \frac{\partial}{\partial x^\rho} [\alpha_\lambda^{\mu'} A^\lambda] = \alpha_{\nu'}^\rho \alpha_\lambda^{\mu'} \frac{\partial A^\lambda}{\partial x^\rho} + \alpha_{\nu'}^\rho A^\lambda \underbrace{\frac{\partial \alpha_\lambda^{\mu'}}{\partial x^\rho}}_{\substack{\neq 0 \text{ falls } \alpha \\ \text{koord.abh\"angig}}} \\ &= \alpha_{\nu'}^\rho \alpha_\lambda^{\mu'} \left(\frac{\partial A^\lambda}{\partial x^\rho} + \Gamma_{\rho\sigma}^\lambda A^\sigma \right) - \underbrace{\alpha_\lambda^{\sigma'} \Gamma_{\nu'\sigma'}^{\mu'} A^\lambda}_{=-\Gamma_{\nu'\sigma'}^{\mu'} \bar{A}^{\sigma'}} \\ &\rightarrow \underbrace{\bar{A}^{\mu'}_{,\nu'} + \Gamma_{\nu'\sigma'}^{\mu'} \bar{A}^{\sigma'}}_{\bar{A}^{\mu'}_{;\nu'}} = \alpha_{\nu'}^\rho \alpha_\lambda^{\mu'} \underbrace{(A^\lambda_{,\rho} + \Gamma_{\rho\sigma}^\lambda A^\sigma)}_{=A^\lambda_{;\rho}} \end{aligned}$$

$\nabla_{\nu'} A^{\mu'} \equiv A^{\mu'}_{;\nu'} = A^{\mu'}_{,\nu'} + \Gamma_{\nu'\sigma'}^{\mu'} A^{\sigma'}$ ist Tensor der Stufe (1,1)

Kovariante Ableitung

Entsprechend: Ableitung eines kovarianten Vektors A_μ

$$\nabla_\nu A_\mu = A_{\mu;\nu} = \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} - \Gamma_{\mu\nu}^\sigma A_\sigma$$

Kovariante Ableitung von Tensoren h"oherer Stufe:

$$\nabla_\gamma T_{\beta\dots}^{\alpha\dots} = \frac{\partial}{\partial x^\gamma} T_{\beta\dots}^{\alpha\dots} + \underbrace{\Gamma_{\gamma\lambda}^\alpha T_{\beta\dots}^{\lambda\dots}}_{\text{alle kontravarianten Indizes durchgehen}} + \dots - \underbrace{\Gamma_{\gamma\beta}^\lambda T_{\lambda\dots}^{\alpha\dots}}_{\text{alle kovarianten Indizes durchgehen}} - \dots$$

3.7 Tensoranalysis

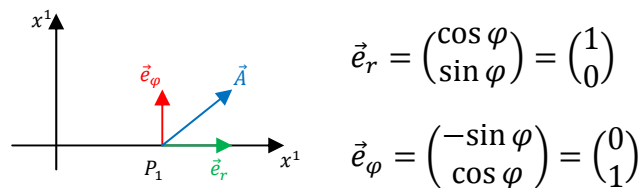
3.7.1 Parallelverschiebung, affine Zusammenhänge

Frage: Wie ändert sich ein Basisvektor \vec{e}_i bei Parallelverschiebung längs eines Basisvektors \vec{e}_j ?

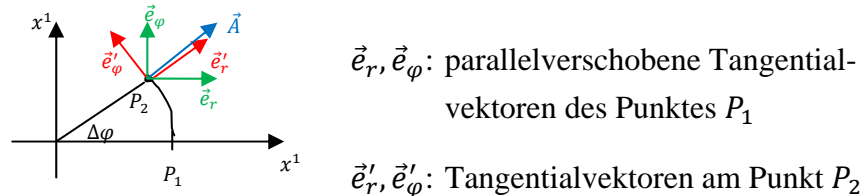
klar: Keine Änderung bei Parallelverschiebung im Euklidischen Raum mit kartesischen Koordinaten

anders: Parallelverschiebung in krummlinigen Koordinaten

Beispiel 1: 2-dim. Euklidischer Raum in Polarkoordinaten
 $\bar{x}^1 = r; \bar{x}^2 = \varphi$; mit $x^1 = r \cos \varphi; x^2 = r \sin \varphi$
 Wir betrachten lokal kartesisches Koordinatensystem am Punkt P_1 mit $\bar{x}^1 = r = 1$ und $\bar{x}^2 = \varphi = 0$ ($x^1 = 1, x^2 = 0$)



Verschiebung entlang der $\bar{x} = \varphi$ -Koordinate um $\Delta \bar{x}^2 = \Delta \varphi$:
 $P_2: \bar{x}^1 = r; \bar{x}^2 = \Delta \varphi$ ($x^1 = r \cos(\Delta \varphi); x^2 = r \sin(\Delta \varphi)$)



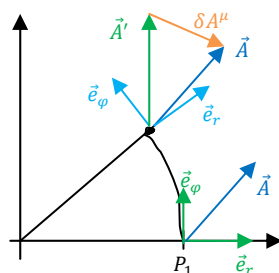
$\vec{e}_r, \vec{e}_\varphi$: parallelverschobene Tangentialvektoren des Punktes P_1

$\vec{e}'_r, \vec{e}'_\varphi$: Tangentialvektoren am Punkt P_2

Im lokalen kartesischen Koordinatensystem des Punktes P_1 erscheinen die Tangentialvektoren \vec{e}_r und \vec{e}_φ gedreht.

Beispiel 2: Vektorfeld $A^\mu(x^\nu)$

Frage: Wie ändert sich A^μ bei Parallelverschiebung längs einer Richtung dx^β ?



$$P_1: \bar{x}^\beta$$

$$P_2: \bar{x}^\beta + \underbrace{d\bar{x}^\beta}_{\text{in krummlinigen Koordinaten}}$$

Allgemein: Parallelverschiebung eines Vektors A^μ von P_1 nach P_2 . Wir legen (in P_1) eine lokal euklidische Basis zugrunde und verschieben $A^\mu(P_1)$ innerhalb dieser Basis parallel. Der parallel verschobene Vektor hat dann in P_2 die Komponenten:

$$A^\mu_{||}(P_2) = A^\mu(P_1) + \delta A^\mu(A^\alpha, d\bar{x}^\beta)$$

Beachte: A^μ bleibt als geometrisches Objekt unverändert, es ändert sich nur die Projektion auf die mitgeführte Basis. δA^μ wird verursacht durch Änderung der Richtung der Koordinatenlinien. Für kleine Abstände zwischen P_1 und P_2 ($P_1: \bar{x}^\beta; P_2: \bar{x}^\beta + \delta \bar{x}^\beta$): $\delta A^\mu(A^\alpha, d\bar{x}^\beta)$ hängt linear von A^α und dx^β ab.

$$\delta A^\mu = -\Gamma_{\alpha\beta}^\mu A^\alpha dx^\beta$$

$\Gamma_{\alpha\beta}^\mu$: Übergangskoeffizienten, Koeff. des affinen Zusammenhangs, Zusammenhangsformen, Christoffel-Symbol 2. Art

$\Gamma_{\alpha\beta}^\mu$ ist die μ -te Komponente der Änderung des Basisvektors \vec{e}_α bei Parallelverschiebung längs eines Basisvektors \vec{e}_β .

Wie berechnen sich die Christoffel-Symbole für eine gegebene Metrik?

Wir betrachten den Skalar $g_{\mu\nu} A^\mu A^\nu$, der sich bei Parallelverschiebung nicht ändert:

$$\begin{aligned} 0 = \delta(g_{\mu\nu} A^\mu A^\nu) &= \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\beta} A^\mu A^\nu dx^\beta + g_{\mu\nu} \delta A^\mu A^\nu + g_{\mu\nu} A^\mu \delta A^\nu \\ &= g_{\mu\nu,\beta} A^\mu A^\nu dx^\beta - g_{\mu\nu} \Gamma_{\alpha\beta}^\mu A^\alpha A^\nu dx^\beta - g_{\mu\nu} A^\mu \Gamma_{\alpha\beta}^\nu A^\alpha dx^\beta \\ &= (g_{\mu\nu,\beta} A^\mu A^\nu - g_{\mu\nu} \Gamma_{\mu\beta}^\alpha A^\mu A^\nu - g_{\mu\nu} A^\mu \Gamma_{\nu\beta}^\alpha A^\nu) dx^\beta \\ &= \underbrace{(g_{\mu\nu,\beta} - g_{\alpha\nu} \Gamma_{\mu\beta}^\alpha - g_{\mu\alpha} \Gamma_{\nu\beta}^\alpha)}_{=0, \text{ da } A^\mu \text{ und } dx^\beta \text{ beliebig}} A^\mu A^\nu dx^\beta \end{aligned} \quad (1)$$

Gleichung (1) liefert ein lineares Gleichungssystem zur Bestimmung der Γ :

$$g_{\mu\nu,\beta} - g_{\alpha\nu} \Gamma_{\mu\beta}^\alpha - g_{\mu\alpha} \Gamma_{\nu\beta}^\alpha = 0$$

Lösung:

$$\Gamma_{\mu\beta}^\alpha = \frac{1}{2} \cdot g^{\alpha\sigma} (g_{\sigma\beta,\mu} + g_{\mu\sigma,\beta} - g_{\mu\beta,\sigma})$$

Und entsprechend für $\mu \leftrightarrow \nu$.

Einsetzen in (1) mit $g_{\alpha\nu} g^{\alpha\sigma} = \delta_\nu^\sigma$

$$g_{\mu\nu,\beta} - \frac{1}{2} (g_{\nu\beta,\mu} + g_{\mu\nu,\beta} - g_{\mu\beta,\nu}) - \frac{1}{2} (g_{\mu\beta,\nu} + \overbrace{g_{\nu\mu,\beta}}^{=g_{\mu\nu,\beta}} - g_{\nu\beta,\mu}) = 0$$

Bemerkung: Die Lösung ist nicht eindeutig!

$$g_{\mu\nu,\beta} - g_{\alpha\nu} \Gamma_{\mu\beta}^\alpha - g_{\mu\alpha} \Gamma_{\nu\beta}^\alpha = 0$$

liefert wegen $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$ nur $n^2 \cdot \frac{(n+1)}{2}$ unabhängige Gleichungen für n^3 unbekannte $\Gamma_{\mu\beta}^\alpha$.

Im Allgemeinen $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha \neq \Gamma_{\nu\mu}^\alpha$
 „Torsionstensor“: $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha - \Gamma_{\nu\mu}^\alpha$

Unsere Wahl: Symmetrische Christoffelsymbole: $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha = \Gamma_{\nu\mu}^\alpha$

Daraus folgt, dass in der ART die Torsion = 0 ist.

3.7.2 Kontravariantes Differential

Sei $A^\mu = A^\mu(x^\beta)$ ein kontravariantes Vektorfeld, dann ist

$$\begin{aligned} \underbrace{DA^\mu}_{\substack{\text{Differential in lokal} \\ \text{kartes. Koordinaten}}} &\equiv dA^\mu - \delta A^\mu = \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\beta} dx^\beta + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu A^\alpha dx^\beta \\ &= A_{,\beta}^\mu dx^\beta + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu A^\alpha dx^\beta \\ &= A_{;\beta}^\mu dx^\beta \end{aligned}$$

ebenfalls ein kontravariantes Vektorfeld.

3.7.3 Kovariante Ableitungen

$$\nabla_\beta A^\mu \equiv A_{;\beta}^\mu = A_{,\beta}^\mu + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu A^\alpha$$

$$\nabla_\beta A_\mu = A_{\mu;\beta} = A_{\mu,\beta} - \Gamma_{\mu\beta}^\alpha A_\alpha$$

3.7.4 Kovarianter Differenzvektor

$$\begin{aligned} 0 &= \delta(A^\mu B_\mu) && \text{Parallelverschiebung eines Skalars} \\ &= \underbrace{\delta A^\mu}_{-\Gamma_{\alpha\beta}^\mu A^\alpha dx^\beta} B_\mu + A^\mu \delta B_\mu \\ &= A^\alpha (\underbrace{\delta B_\alpha - \Gamma_{\alpha\beta}^\mu B_\mu dx^\beta}_{=0, \text{ da unabh. von } A^\alpha}) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \delta B_\alpha = +\Gamma_{\alpha\beta}^\mu B_\mu dx^\beta$$

$$\begin{aligned} DB_\alpha &= dB_\alpha - \delta B_\alpha = \frac{\partial B_\alpha}{\partial x^\beta} dx^\beta - \Gamma_{\alpha\beta}^\mu B_\mu dx^\beta \\ &= (B_{\alpha,\beta} - \Gamma_{\alpha\beta}^\mu B_\mu) dx^\beta \\ &= B_{\alpha;\beta} dx^\beta \end{aligned} \tag{3.8.4.a}$$

DB_α ist ein kovariantes Vektorfeld.

3.7.5 Kovariante Ableitung eines kontravarianten Tensors

$$B_{\alpha;\beta} = B_{\alpha,\beta} - \Gamma_{\alpha\beta}^\mu B_\mu$$

Damit möglich: Einführung der Divergenz und Rotation in gekrümmten Koordinaten.

3.8 Divergenz

$$A^\mu_{;\mu} = \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\mu} + \Gamma_{\alpha\mu}^\mu A^\alpha$$

Es gilt: $\Gamma_{\alpha\mu}^\mu = \frac{1}{2} g^{\mu\sigma} (g_{\sigma\mu,\alpha} + g_{\alpha\sigma,\mu} - g_{\alpha\mu,\sigma}) = \dots = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial x^\alpha}$ mit $g = \det(g_{\mu\nu})$

$$\Rightarrow A^\mu_{;\mu} = \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\mu} + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial x^\alpha} A^\alpha = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^\mu} (A^\mu \sqrt{g})$$

3.9 Rotation eines kovarianten Tensors B_μ

$\varphi_{\mu\nu} := B_{\nu;\mu} - B_{\mu;\nu}$ ist ein antisymmetrischer kovarianter Tensor 2. Stufe

Es gilt: $\varphi_{\mu\nu} = B_{\nu;\mu} - B_{\mu;\nu} = B_{\nu,\mu} - \Gamma_{\nu\mu}^\sigma B_\sigma - B_{\mu,\nu} + \Gamma_{\mu\nu}^\sigma B_\sigma = B_{\nu,\mu} - B_{\mu,\nu}$
↕
da torsionsfrei

3.10 Geodätische Linien

$u^\mu = \frac{dx^\mu}{ds}$ „Geschwindigkeit“ mit $t \rightarrow s$ Zeit Bogenlänge

Geodäte: „Geschwindigkeit bleibt konstant“ (kovariant):

$$\frac{Du^\sigma}{ds} = \frac{du^\sigma}{ds} - \Gamma_{\mu\nu}^\sigma u^\mu \frac{dx^\nu}{ds} = \frac{d^2 x^\sigma}{ds^2} - \Gamma_{\mu\nu}^\sigma \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} = 0 \quad (\text{mit } Du^\sigma \text{ analog zu 3.8.4.a})$$

Geodätengleichung: $\frac{Du^\mu}{ds} = 0$ in formaler Analogie zur klassischen Mechanik.

3.11 Kovariante Ableitungen für Tensoren höherer Stufe $\nabla_\gamma T_{\beta\dots}^{\alpha\dots}$

Bilde Skalar $\varphi := E_\alpha E^\dots E^\beta E^\dots T_{\beta\dots}^{\alpha\dots}$

↖
Basisvektor in Richtung α

Parallelverschiebung des Skalars $\delta\varphi = 0$

$$\Leftrightarrow \delta T_{\beta\dots}^{\alpha\dots} = (-\Gamma_{\gamma\lambda}^\alpha T_{\beta\dots}^{\lambda\dots} - \dots + \Gamma_{\gamma\beta}^\lambda T_{\lambda\dots}^{\alpha\dots} + \dots) dx^\gamma$$

$$DT_{\beta\dots}^{\alpha\dots} = dT_{\beta\dots}^{\alpha\dots} - \delta T_{\beta\dots}^{\alpha\dots}$$

$$\nabla_\gamma T_{\beta\dots}^{\alpha\dots} = T_{\beta\dots;\gamma}^{\alpha\dots} = T_{\beta\dots,\gamma}^{\alpha\dots} + \Gamma_{\gamma\lambda}^\alpha T_{\beta\dots}^{\lambda\dots} + \dots - \Gamma_{\gamma\beta}^\lambda T_{\lambda\dots}^{\alpha\dots} - \dots$$

4. Die Krümmung des Raums

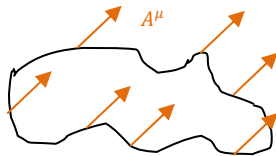
Metrik: $g_{\mu\nu}$
 Affiner Zusammenhang: $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$ } nicht-trivial bei euklid. (flachen) Räumen mit
 krummlinigen Koordinaten (z.B. Polarkoordinaten)

=> $g_{\mu\nu}$ und $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$ geben keinen direkten Aufschluss über die Raumkrümmung.
 Wie können wir (qualitativ und quantitativ) feststellen, ob ein Raum gekrümmt ist?

4.1 Krümmung bekannter Flächen

4.1.1 Ebene (allgemein flacher Raum)

Betrachte Parallelverschiebung eines Vektors A^μ entlang eines geschlossenen Weges.



Am Weganfang und -ende stimmen die Vektoren überein ($\delta A^\mu = 0$).

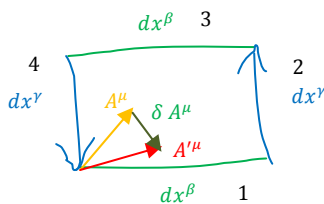
4.1.2 Kugeloberfläche

Betrachte geschlossenen Weg auf Kugeloberfläche: z.B. Startpunkt am Äquator, Vektor \vec{A} zeige nach norden. Weg: Halbkreis entlang des Äquators, dann entlang eines Längskreises zurück: \vec{A} (immer parallel verschoben) zeigt dann nach Süden. Die Kugeloberfläche ist gekrümmt.

4.1.3 Zylinderfläche

Geschlossener Weg auf Zylinderoberfläche (Mantel): $\delta \vec{A} = 0 \Rightarrow$ flacher Raum

4.2 Der Krümmungstensor



Geg.: Kontravariantes Vektorfeld $A^\mu(x)$

Betrachte Änderung δA^μ bei Parallelverschiebung von A^μ entlang eines (infinitesimalen) geschlossenen Weges

$$\delta A^\mu = -R^\mu_{\alpha\beta\gamma} A^\alpha dx^\beta dx^\gamma$$

$$\begin{aligned}
&= \underbrace{-\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} A^{\alpha} dx^{\beta}}_1 - \underbrace{\left[\Gamma_{\alpha\gamma}^{\mu} + \Gamma_{\alpha\gamma,\beta}^{\mu} dx^{\beta} \right]}_{\substack{\Gamma \text{ an der neuen Stelle} \\ 2}} \cdot \underbrace{\left[A^{\alpha} - \Gamma_{\lambda\beta}^{\alpha} A^{\lambda} dx^{\beta} \right]}_3 dx^{\gamma} \quad \left. \vphantom{\Gamma_{\alpha\gamma}^{\mu}} \right\} \text{Weg vorwärts} \\
&+ \underbrace{\left[\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} + \Gamma_{\alpha\beta,\gamma}^{\mu} dx^{\gamma} \right]}_3 \underbrace{\left[A^{\alpha} - \Gamma_{\lambda\gamma}^{\alpha} dx^{\gamma} \right]}_4 dx^{\beta} + \underbrace{\Gamma_{\alpha\gamma}^{\mu} A^{\alpha} dx^{\gamma}}_4 \quad \left. \vphantom{\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu}} \right\} \text{Weg rückwärts} \\
&= \left[\Gamma_{\alpha\gamma}^{\mu} \Gamma_{\lambda\beta}^{\alpha} - \underbrace{\Gamma_{\lambda\gamma,\beta}^{\mu}}_{(\alpha \leftrightarrow \lambda)} - \Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} \Gamma_{\lambda\gamma}^{\alpha} + \underbrace{\Gamma_{\lambda\beta,\gamma}^{\mu}}_{(\alpha \leftrightarrow \lambda)} \right] A^{\alpha} dx^{\beta} dx^{\gamma} + \sigma(d^3)
\end{aligned}$$

$\alpha \rightarrow \sigma$
 $\lambda \rightarrow \alpha$

$$\Rightarrow \boxed{R_{\alpha\beta\gamma}^{\mu} = \Gamma_{\alpha\gamma,\beta}^{\mu} - \Gamma_{\alpha\beta,\gamma}^{\mu} + \Gamma_{\sigma\beta}^{\mu} \Gamma_{\alpha\gamma}^{\sigma} - \Gamma_{\sigma\gamma}^{\mu} \Gamma_{\alpha\beta}^{\sigma}} \quad \text{Riemannscher Krümmungstensor der Stufe (1,3)}$$

$$A^{\mu} \text{ Tensor} \quad \Rightarrow A_{;\beta}^{\mu} \text{ Tensor (1,1)} \quad \Rightarrow \left(A_{;\beta}^{\mu} \right)_{;\gamma} = A_{;\beta\gamma}^{\mu} \text{ Tensor (1,2)}$$

Es gilt:

$$A_{;\beta\gamma}^{\mu} = A_{;\gamma\beta}^{\mu} \quad \text{aber im Allgemeinen } A_{;\beta\gamma}^{\mu} \neq A_{;\gamma\beta}^{\mu}$$

4.2.1 Formale Definition des Krümmungstensors

$$\begin{aligned}
(\nabla_{\gamma} \nabla_{\beta} - \nabla_{\beta} \nabla_{\gamma}) A^{\mu} &= \underbrace{A_{;\beta\gamma}^{\mu} - A_{;\gamma\beta}^{\mu}}_{\text{Tensor (1,2)}} = \underbrace{-R_{\alpha\beta\gamma}^{\mu}}_{\downarrow} \underbrace{A^{\alpha}}_{\text{Tensor(1,0)}} \quad \text{entspricht der Vertauschbarkeit der 2.ten Ableitungen} \\
&\quad \text{Quotiententheorem: } -R_{\alpha\beta\gamma}^{\mu} \text{ ist Tensor (1,3)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{;\beta\gamma}^{\mu} &= \left(\underbrace{A_{;\beta}^{\mu}}_{\text{Tensor(1,1)}} \right)_{;\gamma} = \left(A_{;\beta}^{\mu} \right)_{;\gamma} + \Gamma_{\gamma\lambda}^{\mu} A_{;\beta}^{\lambda} - \Gamma_{\gamma\beta}^{\lambda} A_{;\lambda}^{\mu} \\
&= \left(A_{;\beta}^{\mu} + \Gamma_{\beta\lambda}^{\mu} A^{\lambda} \right)_{;\gamma} + \Gamma_{\gamma\lambda}^{\mu} (A_{;\beta}^{\lambda} + \Gamma_{\beta\sigma}^{\lambda} A^{\sigma}) - \Gamma_{\gamma\beta}^{\lambda} (A_{;\lambda}^{\mu} + \Gamma_{\lambda\sigma}^{\mu} A^{\sigma})
\end{aligned}$$

$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$ sind immer symmetrisch in den unteren Indices.

Beachte: $\boxed{A_{;\beta\gamma}^{\mu} = A_{;\gamma\beta}^{\mu}}$ (Ableitungen vertauschen)

$$\boxed{\Gamma_{\gamma\beta}^{\lambda} = \Gamma_{\beta\gamma}^{\lambda}}$$

$$\text{Damit: } A_{;\beta\gamma}^{\mu} - A_{;\gamma\beta}^{\mu} = -R_{\alpha\beta\gamma}^{\mu} A^{\alpha} = \dots = - \underbrace{\left(\Gamma_{\alpha\beta,\gamma}^{\mu} - \Gamma_{\alpha\gamma,\beta}^{\mu} + \Gamma_{\sigma\beta}^{\mu} \Gamma_{\alpha\gamma}^{\sigma} - \Gamma_{\sigma\gamma}^{\mu} \Gamma_{\alpha\beta}^{\sigma} \right)}_{=R_{\alpha\beta\gamma}^{\mu} \text{ (wie oben)}} A^{\alpha}$$

4.2.2 Symmetrien des Krümmungstensors

Es gilt: $R_{\alpha\beta\gamma}^{\mu} = -R_{\alpha\gamma\beta}^{\mu}$

$$R_{\alpha\beta\gamma}^{\mu} + R_{\gamma\alpha\beta}^{\mu} + R_{\beta\gamma\alpha}^{\mu} = 0$$

4.2.3 Kovarianter Krümmungstensor

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = g_{\alpha\sigma} R_{\beta\gamma\delta}^{\sigma} = -R_{\beta\alpha\gamma\delta} = -R_{\alpha\beta\delta\gamma}$$

4.2.4 Verjüngung des Krümmungstensors

$$R_{\alpha\mu\beta}^{\mu} = R_{\alpha\beta} = \Gamma_{\alpha\beta,\mu}^{\mu} - \Gamma_{\alpha\mu,\beta}^{\mu} + \Gamma_{\sigma\mu}^{\mu} \Gamma_{\alpha\beta}^{\sigma} - \Gamma_{\sigma\beta}^{\mu} \Gamma_{\alpha\mu}^{\sigma}$$

Symmetrischer Tensor 2. Stufe: Ricci-Tensor

$$R_{\alpha\beta} = R_{\beta\alpha}$$

(zum Beweis: $\Gamma_{\alpha\mu}^{\mu} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial x^{\alpha}}$)

$$\Gamma_{\alpha\mu,\beta}^{\mu} = \frac{\partial}{\partial x^{\beta}} \left(\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial x^{\alpha}} \right) = \dots = -\frac{1}{g} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial x^{\beta}} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial x^{\alpha}} + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial^2 \sqrt{g}}{\partial x^{\alpha} \partial x^{\beta}} = \Gamma_{\beta\mu,\alpha}^{\mu}$$

4.2.5 Verjüngung des Ricci-Tensors

$$R_{\mu}^{\mu} = g^{\mu\alpha} R_{\alpha\mu} := R \quad \text{„Krümmungsskalar“}$$

Bem.: Ricci-Tensor und Krümmungsskalar wichtig in der ART!

4.2.6 Bianchi-Identität

$$R_{\nu\alpha\beta;\gamma}^{\mu} + R_{\nu\gamma\alpha;\beta}^{\mu} + R_{\nu\beta\gamma;\alpha}^{\mu} = 0$$

(zum Beweis: am Punkt P_0 lassen sich geeignete Koordinaten so wählen, dass $\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu}(P_0) = 0$. Dann gilt an P_0 :

$$R_{\nu\alpha\beta}^{\mu} = \Gamma_{\nu\beta,\alpha}^{\mu} - \Gamma_{\nu\alpha,\beta}^{\mu}$$

$$R_{\nu\alpha\beta;\gamma}^{\mu} = R_{\nu\alpha\beta,\gamma}^{\mu} = \Gamma_{\nu\beta,\alpha\gamma}^{\mu} - \Gamma_{\nu\alpha,\beta\gamma}^{\mu} \quad \Rightarrow \text{Summe der zykl. Permutationen der letzten 3 Indices} = 0$$

Wegen Tensoreigenschaft gilt die Bianchi-Identität allgemein.

4.2.7 Pseudoriemannsche Mannigfaltigkeit

$g_{\mu\nu}$: symmetrisch und nicht-singulär (aber nicht notwendig pos. definit)

4.7.8 Trägheitssatz von Sylvester

$g_{\mu\nu}$ lässt sich in einer Orthonormalbasis als Diagonalmatrix mit Einträgen ± 1 darstellen; r Einträge +1, s Einträge -1 => Metrik mit Trägheit (Signatur) (r,s)

Beispiel: $\eta_{\mu\nu}$: (r,s)=(1,3)

ART: Gravitation lässt sich lokal wegtransformieren, d.h. in einer genügend kleinen Umgebung existieren Koordinaten, sodass sich „kräftefreie“ Teilchen auf Geraden bewegen.

Postulate:

1. Die Welt ist eine pseudoriemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension 4 und der Trägheit (r,s)=(1,3)
2. Die Weltlinien von Massepunkten, die nur gravitativen Kräften unterliegen, sind zeitartige metrische Geodäten.

5. Physikalische Grundlagen der ART

5.1 Äquivalenz schwerer und träger Masse

$$\left. \begin{array}{l} \text{Träge Masse:} \quad m_t \ddot{\vec{r}} = \vec{F} \\ \text{Schwere Masse:} \quad m_s \vec{g} = \vec{F} \end{array} \right\} m_t \ddot{\vec{r}} = m_s \vec{g}$$

Fallexperimente: Verschieden Massen fallen gleich schnell! Für zwei Körper gilt:
 $\ddot{\vec{r}}_1 = \ddot{\vec{r}}_2$ unabhängig von der Größe ihrer (trägen) Masse.

$$\frac{m_{t1}}{m_{t2}} = \frac{m_{s2}}{m_{s1}} \Rightarrow \frac{m_{t1}}{m_{s1}} = \frac{m_{t2}}{m_{s2}}$$

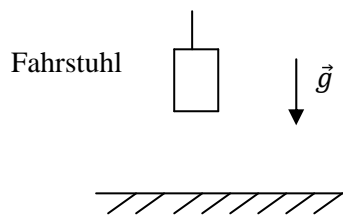
Das Verhältnis von schwerer zu träger Masse ist für jedes Objekt konstant bei geeigneter Wahl der Einheit der schweren Masse:

$$\frac{m_t}{m_s} = 1$$

„Gleichheit“ von schwere und träger Masse

5.2 Fahrstuhlexperimente

Betrachte Fahrstuhl in einem homogenen Schwerfeld



5.2.1 Weight-Watcher-Experiment

1. Fall: Der Fahrstuhl ruht im Schwerfeld ($m=80\text{kg}$). Eine Waage zeigt eine Kraft von 80kp an (alte Krafteinheit $1\text{kp}=g \cdot 1\text{kg}=9,81\text{N}$)

$$F = m_s \cdot g$$

2. Fall: Der Fahrstuhl wird im leeren Raum konstant mit g beschleunigt. Auch in diesem Fall zeigt die Waage eine Kraft von 80kp an.

$$F = m_t \cdot g$$

Kann man durch irgendein Experiment (mechanisch, elektromagn.) feststellen, ob man im Schwerfeld ruht oder mit g im schwerelosen Raum beschleunigt wird? Nein!

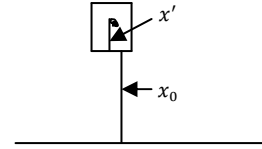
„Die Vorstellung eines ruhenden Koordinatensystems, in dem ein Schwerfeld herrscht, ist äquivalent mit der Vorstellung eines entsprechenden beschleunigten Systems ohne Schwerfeld.“

5.2.2 Freie-Fall-Experiment

1. Fall: Fahrstuhl ruht im schwerelosen Raum (=Inertialsystem= Lorentz-System= Minkowski-System)
Waage zeigt keine Kraft: $\underline{F=0}$
2. Fall: Fahrstuhl fällt im homogenen Schwerfeld. Auch hier zeigt die Waage keine Kraft : $\underline{F=0}$

$$x(t) = x_0(t) + x'$$

$$m_t \ddot{x} = m_t \left(\underset{g}{\ddot{x}_0} + \ddot{x}' \right) = m_s g \Rightarrow m_t \ddot{x}' = 0$$



Kann man durch ein Experiment nachprüfen, ob man im schwerelosen Raum (Inertialsystem) experimentiert oder im Schwerfeld? Nein!!

Schwaches Äquivalenzprinzip:

„ In einem kleinen Labor, das in einem Schwerfeld fällt, sind die mechanischen Phänomene dieselben wie in einem Newtonschen Inertialsystem ohne Schwerkraft.“

Starkes Äquivalenzprinzip: (Einstein 1907)

Ersetze „mechanische Phänomene“ durch „Gesetze der Physik“.

- Bemerkung:
- Bei inhomogenen Gravitationsfeldern muss das Labor klein sein, sodass die Abweichung von der Homogenität keine Rolle spielt.
 - streng genommen ist für jeden Punkt nur ein infinitesimales frei fallendes System (=Lokales Inertialsystem) definiert.

5.3 Mathematische Formulierung des Äquivalenzprinzips

Raumzeit mit Gravitation ist lokal minkowskisch! Für jedes Raum-Zeit-Ereignis $x_p = x^\mu$ existiert eine Koordinatentransformation $x^\mu \rightarrow \bar{x}^\mu$ die von x^μ abhängt, sodass sich die Metrik mit transformiert:

$$g_{\mu\nu}(x) \rightarrow \bar{g}_{\mu\nu}(\bar{x})$$

$$\text{mit } \bar{g}_{\mu\nu}(\bar{x} = \bar{x}_p) = \eta_{\mu\nu} \quad \text{und} \quad \frac{\partial \bar{g}_{\mu\nu}}{\partial \bar{x}^\alpha} \Big|_{\bar{x}=\bar{x}_p} = 0$$

(höhere Ableitungen i.A. $\neq 0$)

$$\bar{g}_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \bar{g}_{\mu\nu}}{\partial \bar{x}^\alpha \partial \bar{x}^\beta} \bar{x}^\alpha \bar{x}^\beta \right)$$

5.3.1 Bewegungsgleichungen der ART und ihre nicht-relativistische Näherung

ART: Die Gravitation steckt in der Metrik $g_{\mu\nu}$.

Die Bewegungsgleichungen für die Punktteilchen im Schwerfeld sind die Geodätengleichungen:

$$\frac{d^2 x^\mu}{ds^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\beta}{ds} = 0$$

Nicht-relativistisch: Teilchen bewegt sich in einem Gravitationspotential $V(x)$.
Newtonsche Bewegungsgleichung:

$$m\ddot{x} = -\nabla V$$

Lassen sich die Newtonschen Bewegungsgleichungen als Grenzfall aus den Geodätengleichungen erhalten?

Newtonsche Bewegungsgleichungen folgen einem Variationsprinzip (Hamiltonsches Prinzip):

$$\delta \int_{P_1}^{P_2} L dt = 0 \quad \text{mit } L=T-V- \underbrace{mc^2}_{\text{Ruheenergie (konstant)}}$$

$$\Rightarrow L = mc^2 \left(-1 + \frac{\dot{x}^2}{2c^2} + \frac{V}{m} \frac{1}{c^2} \right) \quad \left| \sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2} \right.$$

:= ϕ : Gravitationspotential

$$\approx -mc^2 \sqrt{1 - \frac{\dot{x}^2}{c^2} + \frac{2\phi}{c^2}}$$

Damit folgt durch Einsetzen in das Variationsprinzip:

$$\begin{aligned} \delta \int_{P_1}^{P_2} L dt &= -mc \cdot \delta \int_{P_1}^{P_2} \sqrt{(cdt)^2 - \dot{x}^2 dt^2 + 2\phi dt^2} \\ &= -mc \cdot \delta \int \sqrt{c^2 dt^2 \left(1 + \frac{2\phi}{c^2} \right) - dx^2 - dy^2 - dz^2} = 0 \end{aligned}$$

In der ART soll gelten:

$$\delta \int ds = \delta \int \sqrt{g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu} = 0$$

Durch einen Vergleich der beiden Formeln ergibt sich:

$$ds^2 = c^2 dt^2 \left(1 + \frac{2\phi}{c^2} \right) - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 + 2\phi/c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \left(\text{für } \frac{2\phi}{c^2} \ll 1 \right)$$

$$g_{00} = 1 + \frac{2\phi}{c^2}$$

Beispiel: Kugelsymmetrische Masse M: $\phi(r) = -\frac{GM}{r}$
 $\Rightarrow g_{00} = 1 - \frac{2GM}{c^2 r} = 1 - \frac{r_s}{r}$ mit $r_s := \frac{2GM}{c^2}$ Schwarzschild-Radius der Masse M
 Sonne $r_s \approx 3km$
 Erde $r_s \approx 9mm$

Die Metrik $g_{\mu\nu}$ liefert Christoffelsymbole und Krümmungstensor:

$$\Gamma_{00}^i = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial x^i} \quad i \in \{1,2,3\}$$

$$R_{0k0}^j = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^j \partial x^k} \quad j, k \in \{1,2,3\}$$

$$R_{00} = \frac{1}{c^2} \sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^j \partial x^j} = \frac{1}{c^2} \Delta \phi$$

mit $\phi = -G \int \frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3x'$

5.3.2 Poisson-Gleichung

$$\Delta \phi = 4 \pi G \rho(\vec{x}) \quad (\text{vgl. Elektrodynamik})$$

daraus folgt: $R_{00} = \frac{4\pi G}{c^2} \rho$ (Masse wirkt auf Metrik)

Problem: R_{00} ist nur eine Komponente des Tensors, die Gleichung besitzt also nicht die richtigen Transformationseigenschaften

Gesucht: etwa $R_{\mu\nu}$ = Tensor T (abhängig von Masseverteilung, auch Impulsdichte)
 \rightarrow Energie-Impuls-Tensor

Erinnerung: Der Energie-Impuls-Tensor der el.-mag. Felder (im Minkowskiraum)

$$T_{\mu}^{\nu} = \frac{1}{\mu_0} \left(F_{\mu\alpha} F^{\alpha\nu} + \frac{1}{4} \delta_{\mu}^{\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \right) = \begin{pmatrix} \omega & \frac{1}{c} \vec{S} \\ -\frac{1}{c} \vec{S} & T_i^j \end{pmatrix}$$

mit $\omega = \frac{1}{2} \left(\epsilon_0 \vec{E}^2 + \frac{1}{\mu_0} \vec{B}^2 \right)$ (Feldenergiedichte)

$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B}$ (Poynting-Vektor; Energiestrom)

T_i^j : maxwellscher Spannungstensor (beschreibt Impulsstrom)

5.4 Eigenschaften des Energie-Impuls-Tensors

$\partial_{\nu} F^{\mu\nu} = 0$ (im Vakuum; $j^{\mu} = 0$)

\leftrightarrow vier Kontinuitätsgleichungen: $\frac{\partial \omega}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{S} = 0$

$$\underbrace{\frac{1}{c^2} \frac{\partial S_i}{\partial t}}_{\text{Impulsänderung}} + \vec{\nabla} \cdot \vec{T}^i = 0$$

Aufspaltung: $T^{\mu\nu} = T_{el-mag}^{\mu\nu} + T_{Materie}^{\mu\nu}$

Ansatz für Materie

$$T^{\mu\nu} = \rho_0 u^\mu u^\nu = \rho_0 \gamma^2 \begin{pmatrix} c^2 & c\vec{v} \\ c\vec{v} & v^i v^j \end{pmatrix}$$

Spezialfall: Ruhende Materie:

$$T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \rho_0 c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad T^{00} = \rho_0 c^2 \text{ ist Energiedichte der Materie}$$

Wie in der E-Dyn. gelten die Kontinuitätsgleichungen

$$\partial_\nu T^{\mu\nu} = T_{,\nu}^{\mu\nu} = 0 \quad (T^{\mu\nu} \text{ ist Divergenzfrei})$$

$T^{\mu\nu}$ in gekrümmten Räumen: (ersetze ∂_ν durch kovariante Ableitung)

$$\nabla_\nu T^{\mu\nu} = T_{;\nu}^{\mu\nu} = 0 \quad (\text{entspricht den 4 Kontinuitätsgleichungen für Energie- und Impulsströme})$$

Rechte Seite: $T_{\mu\nu}$ (kovarianter Energie-Impuls-Tensor)

Linke Seite: $R_{00} \rightarrow R_{\mu\nu}$ (Dieser Ansatz ist zu einfach, denn i.A. $R_{;\nu}^{\mu\nu} \neq 0$)

Forderungen an die linke Seite der Feldgleichungen: (Postulate der ART)

- 1) Linke Seite ist symmetrischer Tensor 2. Stufe (wie $T_{\mu\nu}$).
- 2) Auf der linken Seite sollen für $g_{\mu\nu}$ keine höheren Ableitungen als von zweiter Ordnung stehen.
- 3) Die zweiten Ableitungen sollen nur linear auftreten (gilt nicht für die ersten Ableitungen).
- 4) Die linke Seite soll divergenzfrei sein (da $T^{\mu\nu}$ divergenzfrei).
- 5) In der Minkowskischen Raum-Zeit soll die linke Seite identisch verschwinden.

Aus Bedingung 1-3 folgt für die Feldgleichungen (Beweis durch Hermann Weyl)

$$R_{\mu\nu} + a \cdot g_{\mu\nu} R + b \cdot g_{\mu\nu} = \kappa \cdot T_{\mu\nu} \quad a, b, \kappa \text{ freie Parameter}$$

zu Bedingung 4. (Divergenzfreiheit):

$$R_{;\nu}^{\mu\nu} + \alpha (g^{\mu\nu} R)_{;\nu} + \underbrace{b \cdot g_{;\nu}^{\mu\nu}}_{=0} =! 0$$

b lässt sich nicht aus der Divergenzfreiheit bestimmen

Behauptung: $a = -\frac{1}{2}$

Beweis: Krümmungstensor: $R_{\alpha\beta\gamma\delta} = g_{\alpha\rho} R_{\beta\gamma\delta}^{\rho}$
 Symmetrieeigenschaften: $R_{\alpha\beta\gamma\delta} = -R_{\beta\alpha\gamma\delta} = -R_{\alpha\beta\delta\gamma}$
 $R_{\alpha\beta} = R_{\beta\alpha}$
 $R = R_{\alpha}^{\alpha} = g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta}$

Bianchi-Identität: $R_{\alpha\beta;\gamma}^{\mu} + R_{\nu\alpha;\beta}^{\mu} + R_{\nu\beta;\alpha}^{\mu} = 0$
 zyklisch vertauschen

$$\underbrace{R_{\alpha\mu\beta;\gamma}^{\mu}}_{R_{\alpha\beta;\gamma}} + \underbrace{R_{\alpha\gamma\mu;\beta}^{\mu}}_{-R_{\alpha\gamma;\beta}} + \underbrace{R_{\alpha\beta\gamma;\mu}^{\mu}}_{R_{\alpha\beta\gamma;\mu}} = 0 \quad | \cdot g^{\alpha\beta}$$

$$R_{;\gamma} - R_{\gamma;\beta}^{\beta} + g^{\alpha\beta} \underbrace{g^{\mu\lambda} g_{\lambda\nu}}_{\delta_{\nu}^{\mu}} \cdot R_{\alpha\beta\gamma;\mu}^{\nu} = 0$$

$$R_{\lambda\alpha\beta\gamma;\mu} = -R_{\alpha\lambda\beta\gamma;\mu}$$

$$R_{;\gamma} - R_{\gamma;\beta}^{\beta} + \underbrace{g^{\mu\lambda} R_{\lambda\gamma;\mu}}_{R_{\gamma;\mu}^{\mu} \stackrel{\mu \rightarrow \beta}{\leftrightarrow} R_{\gamma;\beta}^{\beta}} = 0$$

$$R_{;\gamma} - 2 \cdot R_{\gamma;\beta}^{\beta} = 0 \quad | \cdot \frac{1}{2}$$

$$R_{\gamma;\beta}^{\beta} - \frac{1}{2} \delta_{\gamma}^{\beta} R_{;\beta} = 0 \quad | \gamma \text{ hochziehen}$$

$$R_{;\beta}^{\beta\gamma} - \frac{1}{2} (g^{\beta\gamma} R)_{;\beta} = 0 \quad = a = \frac{1}{2} \text{ aus Divergenzfreiheit}$$

$$R_{;\nu}^{\mu\nu} - \frac{1}{2} (g^{\mu\nu} R)_{;\nu} = 0 \Rightarrow \left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} R \cdot g^{\mu\nu} \right)_{;\nu} = 0$$

Jetzt also:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + b g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu} \quad | \cdot g^{\mu\nu}$$

$$\underbrace{g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}}_R - \frac{1}{2} R \underbrace{g^{\mu\nu} g_{\mu\nu}}_{4(\text{Spur})} + b \underbrace{g^{\mu\nu} g_{\mu\nu}}_{4(\text{Spur})} = \kappa \cdot \underbrace{g^{\mu\nu} T_{\mu\nu}}_{:= T(\text{Skalar})}$$

$$-R + 4b = \kappa T \Rightarrow \underline{R = 4b - \kappa T}$$

Damit: $R_{\mu\nu} - b g_{\mu\nu} = \kappa \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} T g_{\mu\nu} \right)$
 $= \kappa T_{\mu\nu}^*$

Bestimmung von b und κ :

Wir hatten (nichtrel. Näherung, $v \ll c, \frac{2\phi}{c^2} \ll 1$): $g_{00} = 1 + \overset{\text{klein}}{\frac{2\phi}{c^2}}$ und

$$R_{00} = \frac{1}{c^2} \Delta \phi = \frac{4\pi G}{c^2} \rho.$$

Ruhende Materie: $T_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \rho c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow T = \rho c^2, T_{00}^* = \frac{1}{2} \rho c^2$

$$R_{00} - b g_{00} = \kappa T_{\mu\nu}^*$$

$$\frac{4\pi G}{c^2} \rho - b g_{00} = \frac{1}{2} \kappa \rho c^2 \Rightarrow b = 0 \text{ (oder sehr klein } \rightarrow b = \Lambda \text{ „Kosmologische Konstante“)}$$

↓
Damit Bedingung 5 erfüllt

$$\kappa = \frac{8\pi G}{c^4}$$

5.5 Einsteinsche Feldgleichungen (ohne Kosmologische Konstante)

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R \cdot g_{\mu\nu} := G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

↑ Einstein-Tensor

oder

$$R_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \right) \\ = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}^*$$

Bemerkung:

- κ ist sehr klein: $c^2 \kappa = \frac{8\pi G}{c^2} = 1,86 \cdot 10^{-26} \frac{m}{kg}$

- $R_{\mu\nu}, R$ (und $G_{\mu\nu}$) enthalten 2. Ableitung des metrischen Tensors und Quadrate der 1.

Ableitung \Rightarrow Nichtlinearität

\Rightarrow kein Superpositionsprinzip

6. Anwendungen der ART

6.1 Die Schwarzschild-Metrik

Gravitationsfeld im Außenraum einer sphärisch-symmetrischen Massenverteilung mit der Gesamtmasse M:

$$\phi(r) = -\frac{MG}{r}$$

Wie lautet die zugehörige Metrik in der ART? Gesucht werden die sphärisch-symmetrischen Lösungen der Einsteinschen Feldgleichungen:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}$$

wobei im Vakuum gilt: $T_{\mu\nu} = 0$

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 0$$

Mit $R = -\kappa T$ und $T = g^{\mu\nu}T_{\mu\nu} = 0$ folgt $R = 0$, also $R_{\mu\nu} = 0$

Allgemeiner Ansatz für sphärisch-symmetrische Metrik:

$$(\mathbb{R}^3 \text{ flach: } d\vec{x}^2 = dr^2 + r^2 \underbrace{(d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2)}_{=d\Omega^2})$$

$$ds^2 = a(r,t)dt^2 + b(r,t)dr^2 + \underbrace{c(r,t)}_{=0} dr dt + d(r,t) \underbrace{d\Omega^2}_{=d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2}$$

Geeignete Koordinatentransformation:

$d(r,t) = -r'^2$ (damit wie bei Kugelkoordinaten); $r' \rightarrow r$ (Umbenennung) und Annahme einer statischen Metrik ($\Rightarrow c(r,t)=0$ wegen Zeitumkehr invarianz)

$$ds^2 = f(r)c^2 dt^2 - g(r)dr^2 - r^2(d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2)$$

hierbei ist $f(r)$ dimensionslos und

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} f(r) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -g(r) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2 \vartheta \end{pmatrix} \Rightarrow g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \frac{1}{f} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{g} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \end{pmatrix}$$

6.1.1 Berechnung der Christoffelsymbole (von Null verschieden)

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} = \frac{1}{2}g^{\sigma\alpha}(g_{\alpha\nu,\mu} + g_{\mu\alpha,\nu} - g_{\mu\nu,\alpha}) = \Gamma_{\nu\mu}^{\sigma} \quad (\text{da symmetrisch})$$

$$\Gamma_{01}^0 = \frac{1}{2}g^{00} \left(\underbrace{g_{01,0}}_{=0} + \underbrace{g_{00,1}}_{\frac{\partial f}{\partial r}} - \underbrace{g_{01,0}}_{=0} \right) = \frac{1}{2f} \cdot f' = \frac{f'}{2f} = \Gamma_{10}^0$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{00}^1 &= \frac{1}{2} g^{11} (g_{10,0} + g_{01,0} - g_{00,1}) = \frac{1}{2g} \frac{\partial f}{\partial r} = \frac{f'}{2g} \\
\Gamma_{11}^1 &= \frac{1}{2} g^{11} (g_{11,1} + g_{11,1} - g_{11,1}) = \frac{g'}{2g} \\
\Gamma_{22}^1 &= \frac{1}{2} g^{11} (-g_{22,1}) = \frac{1}{2g} (-2r) = -\frac{r}{g} \\
\Gamma_{33}^1 &= \frac{1}{2} g^{11} (-g_{33,1}) = \frac{1}{2g} (-2r \sin^2 \vartheta) = \frac{r \sin^2 \vartheta}{g} \\
\Gamma_{12}^1 &= \frac{1}{2} g^{22} (g_{22,1}) = \frac{1}{2r^2} (2r) = \frac{1}{r} = \Gamma_{21}^2 \\
\Gamma_{13}^3 &= \frac{1}{2} g^{33} (g_{33,1}) = \frac{1}{2r^2 \sin^2 \vartheta} (2r \sin^2 \vartheta) = \frac{1}{r} = \Gamma_{31}^3 \\
\Gamma_{23}^3 &= \Gamma_{32}^2 = \dots = \cot \vartheta \\
\Gamma_{23}^2 &= \Gamma_{32}^3 = \dots = -\sin \vartheta \cos \vartheta \\
&(\text{alle anderen } \Gamma_{\dots} = 0)
\end{aligned}$$

6.1.2 Berechnung des Krümmungstensors

$$R_{\alpha\beta\gamma}^{\mu} = \Gamma_{\alpha\gamma,\beta}^{\mu} - \Gamma_{\alpha\beta,\gamma}^{\mu} + \Gamma_{\delta\beta}^{\mu} \Gamma_{\alpha\gamma}^{\delta} - \Gamma_{\delta\gamma}^{\mu} \Gamma_{\alpha\beta}^{\delta}$$

und des Ricci-Tensors: $R_{\alpha\beta} = R_{\alpha\mu\beta}^{\mu}$

$$\begin{aligned}
\text{Ergebnis: } R_{00} &= \frac{1}{2} \frac{f''}{g} - \frac{1}{4} \frac{f'}{g} \left(\frac{f'}{f} + \frac{g'}{g} \right) + \frac{1}{r} \frac{f'}{g} \\
R_{11} &= -\frac{1}{2} \frac{f''}{f} + \frac{1}{4} \frac{f'}{f} \left(\frac{f'}{f} + \frac{g'}{g} \right) + \frac{1}{r} \frac{g'}{g} \\
R_{22} &= \frac{r}{2g} \left(\frac{f'}{f} + \frac{g'}{g} \right) + \frac{1}{g} - 1 \\
R_{33} &= \sin^2 \vartheta \cdot R_{22} \\
R_{\mu\nu} &= 0 \quad (\text{für } \mu \neq \nu)
\end{aligned}$$

Einsetzen in $R_{\mu\nu}=0$:

$$(I) \quad f'' - \frac{1}{2} f' \left(\frac{f'}{f} + \frac{g'}{g} \right) + \frac{2}{r} f' = 0$$

$$(II) \quad f'' - \frac{1}{2} f' \left(\frac{f'}{f} + \frac{g'}{g} \right) - \frac{2}{r} f' g' = 0$$

$$(III) \quad \frac{r}{2g} \left(\frac{f'}{f} - \frac{g'}{g} \right) + \frac{1}{g} - 1 = 0$$

$$(I-II) \quad \frac{f'}{f} = -\frac{g'}{g} \Rightarrow (III) \quad r g' - g + g^2 = 0$$

$$r g' = g - g^2$$

$$\frac{1}{r} = \frac{g'}{g-g^2} \Rightarrow \int \frac{dr}{r} = \int \frac{dg}{g-g^2} = -\int \frac{dg}{g(g-1)} = \dots = \ln(r) = -\ln \frac{1-g}{g} + c$$

$$= \ln \left(\frac{g}{1-g} \right) + c$$

$$r = B \cdot \frac{g}{1-g} \Leftrightarrow 1 - g = \frac{B}{r} g \Leftrightarrow \left(\frac{B}{r} + 1 \right) g = 1$$

$$g(r) = \frac{1}{1 + \frac{B}{r}} = [B := -A] = \frac{1}{1 - \frac{A}{r}}$$

$$\frac{df}{f} = -\frac{dg}{g} \Rightarrow \ln(f) = -\ln(g) + \text{const} = \ln\left(\frac{1}{g}\right) + \text{const.}$$

$$\Rightarrow f(r) = \frac{C}{g} = C\left(1 - \frac{A}{r}\right)$$

Bestimmung von A und C:

Randbedingungen:

1) Für $r \rightarrow \infty$ soll $g_{\mu\nu}$ in den Minkowski-Raum übergehen; in Kugelkoordinaten:

$$g_{\mu\nu} \xrightarrow[r \rightarrow \infty]{\curvearrowright} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2 \vartheta \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \lim_{r \rightarrow \infty} f(r) = 1 \Rightarrow C = 1 \Rightarrow f(r) = 1 - \frac{A}{r}$$

2) Im Newtonschen Grenzfall gilt:

$$g_{00} = 1 + \frac{2\phi}{c^2} \text{ mit } \phi = -\frac{MG}{r}$$

$$g_{00} = 1 - \frac{2MG}{r} = f(r) = 1 - \frac{A}{r} \Rightarrow A = \frac{2MG}{c^2} = r_s$$

wobei r_s der Schwarzschildradius ist.

\Rightarrow Schwarzschildmetrik:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) c^2 dt^2 - \frac{1}{1 - \frac{r_s}{r}} dr^2 - r^2 d\Omega^2$$

Bem.: Singularität bei $r = r_s$ (Koordinatensingularität)

6.2 Folgerungen aus der Schwarzschildmetrik

6.2.1 Uhren im Gravitationsfeld und Gravitationsrotverschiebung

Betrachte eine ruhende Uhr im Gravitationsfeld

weit entfernter Beobachter (ohne Gravitationseinfluss)

$$ds \underset{(dr=0)}{\overset{\curvearrowright}{=}} c d\tau = \sqrt{1 - \frac{r_s}{r}} c dt \quad \Rightarrow d\tau = \sqrt{1 - \frac{r_s}{r}} \underbrace{(dt)}_{< dt}$$

Uhren im Gravitationsfeld gehen langsamer.

Niedrige Frequenz eines Übergangs im Schwerfeld entspricht längerer Wellenlänge der Strahlung („Gravitationsrotverschiebung“).

Messung im Schwerfeld der Erde:

Strahlungsquelle auf Höhe $r = r_1$ mit $r_s \ll r_1$

Betrachter auf Höhe $r = r_2 = r_1 + h$ ($|h| \ll r_1$)

$$v(r_2) = v(r_1 + h) = \frac{\sqrt{1 - \frac{r_s}{r_1}}}{\sqrt{1 - \frac{r_s}{r_2}}} \cdot v_0 = \sqrt{\left(\frac{r_1 - r_s}{r_1} \cdot \frac{r_1 + h}{r_1(r_s + h)}\right)} \cdot v_0$$

$$\approx \left(1 - \frac{r_s h}{2r_1(r_1 - r_s)}\right) v_0 \approx \left(1 - \frac{r_s h}{2r_1^2}\right) v_0$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta v}{v_0} = \frac{r_s h}{2r_1^2}$$

Experimentell bestätigt durch Mößbauer- Spektroskopie am ^{57}Fe (14,4keV-Linie)

Erde: $r_s = 9\text{mm}, r_1 = R = 6350\text{km}, h = 22,6\text{m}$

$$\Rightarrow \frac{\Delta v}{v_0} = 2,5 \cdot 10^{-15} \text{ (Theorie)}$$

$$\text{Experiment (Pound und Repka, 1960): } \frac{\Delta v}{v_0} = (2,57 \pm 0,26) \cdot 10^{-15}$$

6.2.2 Teilchenbahnen in der Schwarzschild-Metrik: Periheldrehung

Newtonsche Mechanik: $\phi(r) = -\frac{MG}{r}$: Teilchenbahnen sind Kegelschnitte (z.B. Keplerellipsen)

Frage: Wie ändert sich der Bahnverlauf in der ART?

ART: Gravitation steckt in der Metrik. Zu lösen sind die Geodätengleichungen:

$$\frac{d^2 x^\sigma}{ds^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\sigma \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} = 0 \quad \text{für die Schwarzschildmetrik}$$

Alternativ: Bestätigung der Bewegungsgleichung aus der Lagrangefunktion (Gravitation in $g_{\mu\nu}$: Potential = 0, da Geodäte \Rightarrow Lagrange sieht wie folgt aus:)

$$L = \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} \quad \text{wobei } \tau \text{ die Eigenzeit des Teilchens ist und}$$

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} f(r) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -g(r) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2 \vartheta \end{pmatrix}$$

$$\text{mit } f(r) = 1 - \frac{r_s}{r}; g(r) = \frac{1}{1 - \frac{r_s}{r}}$$

Daraus ergibt sich durch einsetzen in L für geeignete Wahl des Koordinatensystems, so dass Bewegung in der Ebene mit $\vartheta = \frac{\pi}{2}$; $d\vartheta = 0$ erfolgt.

$$\Rightarrow L = \frac{1}{2} \left[\left(1 - \frac{r_s}{r}\right) c^2 \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 - \frac{1}{1 - \frac{r_s}{r}} \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 - r^2 \left(\frac{d\phi}{d\tau}\right)^2 \right] = L \left(t, r, \phi, \frac{dt}{d\tau}, \frac{dr}{d\tau}, \frac{d\phi}{d\tau} \right)$$

im Folgenden: $\dot{} \equiv \frac{d}{d\tau}$

ϕ und t sind zyklische Koordinaten \Rightarrow 2 Erhaltungssätze

$$\frac{\partial L}{\partial \phi} = r^2 \frac{d\phi}{d\tau} = B = \text{const.} \quad \text{(Drehimpulssatz)}$$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial L}{\partial t} = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) c \frac{dt}{d\tau} = A = \text{const.} \quad \text{(Energiesatz)}$$

Dritte Gleichung:

$$\left(\frac{ds}{d\tau}\right)^2 = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) c^2 \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 - \frac{1}{1 - \frac{r_s}{r}} \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 - r^2 \left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)^2 = c^2$$

Dies gilt, da nach der Definition der Eigenzeit für ein Masseteilchen gilt: $ds = c d\tau$

Gesucht: Bahnkurve $r(\varphi)$

$$\text{Substitution: } r = \frac{1}{u}; \frac{d\varphi}{d\tau} = Bu^2; c \frac{dt}{d\tau} = \frac{A}{1 - r_s u}; \frac{dr}{d\tau} = \frac{d}{d\tau} \frac{1}{u} = -\frac{1}{u^2} \frac{du}{d\tau} = -\frac{B}{\frac{d\varphi}{d\tau}} \frac{du}{d\tau} = -B \frac{du}{d\tau}$$

Einsetzen in die 3. Gleichung, wobei $' \equiv \frac{d}{d\varphi}$

$$A^2 - B^2 u'^2 - B^2 u^2 (1 - r_s u) = c^2 (1 - r_s u)$$

Differenzieren nach φ führt zu:

$$-2B^2 u' u'' - 2B^2 u u' + 3B^2 r_s u^2 u' = -c^2 r_s u' \quad | \cdot \frac{1}{-2B^2 u'}$$

$$u'' + u' = \frac{c^2 r_s}{2B^2} + \frac{3}{2} r_s u^2 = \frac{MG}{B^2} + \frac{3}{2} \frac{MG}{c^2} u^2$$

Term zusätzlich
zur Newtonschen
Mechanik

Planetenbewegung: $r_s u = \frac{r_s}{r} \ll 1 \rightarrow \frac{3}{2} r_s u^2$ ist eine kleine Störung

Lösung mittels klassischer Störungstheorie:

$$u'' + u_0 \stackrel{\text{kl. Mechanik}}{\equiv} \frac{c^2 r_s}{2B^2} \Rightarrow u_0(\varphi) = \frac{c^2 r_s}{2B^2} (1 + \epsilon \cos \varphi) \quad (\text{Kegelschnitte})$$

Setze $u=0$ im Störterm $\frac{1}{a(1-\epsilon^2)}$ für Ellipsen ($0 \leq \epsilon < 1$)

Hierbei bezeichnet ϵ die Exzentrizität und a die große Halbachse

„Bessere“ Lösung $u_1(\varphi)$: Setze $u = u_0$ im Störterm

$$u'' + u_1 \approx \frac{c^2 r_s}{2B^2} + \frac{3}{2} r_s u_0^2 = \frac{c^2 r_s}{2B^2} + \frac{3c^4 r_s^3}{8B^4} (1 + 2\epsilon \cos \varphi + \epsilon^2 \cos^2 \varphi)$$

$$\Rightarrow u_1(\varphi) = u_0(\varphi) + \frac{3c^4 r_s^3}{8B^4} \left[1 + \underbrace{\epsilon \varphi \sin \varphi}_{\text{wächst an bei vielen Umdrehungen, deswegen der wichtigste Term und Rest kann vernachlässigt werden}} + \epsilon^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6} \cos(2\varphi) \right) \right]$$

$$\approx \frac{c^2 r_s}{2B^2} \left[\overbrace{1 + \epsilon \cos \varphi}^{=u_0} + \epsilon \frac{3c^2 r_s}{4B^2} \varphi \sin \varphi + \dots \right] \quad \text{Benutze Additionstheoreme}$$

$$\approx \frac{c^2 r_s}{2B^2} \left[1 + \epsilon \cos \left(\left(1 - \frac{3c^2 r_s}{4B^2} \right) \varphi \right) \right]$$

$= 2\pi$ wenn $\varphi = 2\pi \left(1 + \frac{3c^2 r_s^3}{4B^2} \right)$

\rightarrow Periheldrehung („Rosettenbahn“)

$$\Delta\varphi = 3\pi \frac{c^2 r_s^2}{2B^2} = 3\pi \frac{r_s}{a(1-\epsilon^2)}$$

Planetenbahnen im Sonnensystem:

	a[10 ⁶ km]	ε	Δφ _{Theorie} ↑	Δφ _{Beobachtung} ←
Merkur	57,91	0,2056	43,03	43,11 ± 0,45
Venus	108,21	0,0068	8,6	8,4 ± 4,8
Erde	149,60	0,0167	3,8	5,0 ± 1,2

[Bogensekunde pro Jhd]

Genauer: Beobachtung bei Merkur Δφ = 574''/Jahrhundert
 Klassische Theorie (WW mit anderen Planeten): Δφ = 531''/Jhd
 Differenz: 43''/Jhd. erklärt durch ART

6.2.3 Lichtablenkung in der Schwarzschild-Metrik

Masseteilchen: $ds^2 = cd\tau$; für Licht gilt: $ds = 0$

Wenn man dies in die dritte Gleichung aus Kapitel 6.2.2 einsetzt erhält man:

$$\left(1 - \frac{r_s}{r}\right) c^2 \left(\frac{ct}{d\tau}\right)^2 - \frac{1}{1 - \frac{r_s}{r}} \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 - r^2 \left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)^2 = \left(\frac{ds}{d\tau}\right)^2 = 0$$

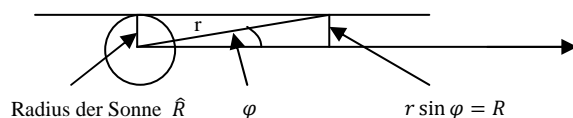
Daraus ergibt sich die DGL $r(\varphi)$ der Photonen: [mit $u = \frac{1}{r}$; $' \equiv \frac{d}{d\varphi}$]

$$A^2 - B^2 u'^2 - B^2 u^2 (1 - r_s u) = 0$$

Wenn man diese Gleichung nun differenziert und mit $-\frac{1}{2B^2 u}$ multipliziert so erhält man:

$$u'' + u = \underbrace{\frac{3}{2} r_s u^2}_{\text{kleine Störung}}$$

$$u''_0 + u_0 = 0 \Rightarrow u_0(\varphi) = \frac{1}{R} \sin\varphi \Rightarrow r(\varphi) = \frac{R}{\sin\varphi} \quad \text{was eine Gerade ist.}$$



u_0 einsetzen in Störung:

$$u''_1 + u_1 = \frac{3r_s}{2R^2} \sin^2 \varphi \Rightarrow u_1(\varphi) = \frac{1}{R} \sin \varphi + \frac{3r_s}{4R^2} \left(1 + \frac{1}{3} \cos 2\varphi\right)$$

Asymptotisch: $r \rightarrow \infty \Rightarrow u = 0$

$$\frac{1}{R} \sin \varphi + \frac{3r_s}{4R^2} \left(1 + \frac{1}{3} \cos 2\varphi\right) = 0$$

$$\varphi \approx 0: \frac{1}{R} \varphi + \frac{3r_s}{4R^2} \left(1 + \frac{1}{3}\right) = 0 \Rightarrow \varphi_\infty \approx -\frac{r_s}{R}$$

$$\text{Gesamtablenkung: } \delta = |2\varphi_\infty| = \frac{2r_s}{R} = \frac{4GM}{c^2 R}$$



Experimenteller Test: Lichtablenkung an der Sonne: Bei einer Sonnenfinsternis erscheinen die Positionen der Sterne verschoben.

Sonne: $r_s = 2,95 \text{ km}; \quad R_s = 6,96 \cdot 10^5 \text{ km}$
 $\Rightarrow \delta = \frac{2r_s}{R} = 8,46 \cdot 10^{-6} = 1,75''$

Messungen: Licht, 1919: $1,5'' < \delta < 2,2''$
 Radiowellen, Quasar 3C275 $\delta = 1,76 \pm 0,02''$

6.2.4 Newtonsche Theorie

$$\frac{1}{r(\varphi)} = u(\varphi) = \frac{c^2 r_s}{2B^2} (1 + \epsilon \sin \varphi) \quad \text{mit } B = r^2 \frac{d\varphi}{dt} = R \underbrace{\left(\frac{rd\varphi}{dt} \right)}_c = Rc \quad \varphi = \frac{\pi}{2} \quad \text{Photonen}$$

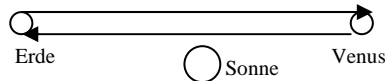
$$\varphi = \frac{\pi}{2}; \frac{1}{R} = \frac{r_s}{2R^2} (1 + \epsilon) \Rightarrow \epsilon = \frac{2R}{r_s} - 1 = \frac{2R}{r_s} \gg 1$$

$$r \rightarrow \infty; 0 = \frac{r_s}{2R^2} (1 + \epsilon \sin \varphi_\infty) \Rightarrow \varphi_\infty = -\frac{1}{\epsilon} = -\frac{r_s}{2R}$$

Gesamtablenkung: $\delta_{Newton} = 2|\varphi_\infty| = \frac{r_s}{R} \Rightarrow \Delta\varphi_{ART} = \frac{2r_s}{R} = 2\delta_{Newton}$

6.2.5 Laufzeitverzögerung

Idee: Radarsignal Erde \rightarrow Venus, Messung der Zeit bis zur Ankunft des reflektierten Signals



Bei Konjunktion Erde, Sonne, Venus: $\Delta t = 240 \mu\text{s}$, bestätigt bis auf 3%.

7. Gravitationskollaps und schwarze Löcher

Schwarzschild-Metrik: $ds^2 = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) c^2 dt^2 - \frac{1}{1 - \frac{r_s}{r}} dr^2 - r^2 d\Omega^2$

$r = r_s$ ist pathologisch: $g_{00} = 0$; $g_{11} \rightarrow -\infty$

Wir betrachten radiale Geodäten der Schwarzschildmetrik ($d\Omega = 0$):

Wir nehmen die dritte Gleichung aus Abschnitt 6.2.2:

$$\left(1 - \frac{r_s}{r}\right) c^2 \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 - \frac{1}{1 - \frac{r_s}{r}} \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 - r^2 \underbrace{\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2}_{=0 \text{ für } d\varphi=0} = c^2$$

t ist eine zyklische Variable:

$$\left(1 - \frac{r_s}{r}\right) c \frac{dt}{d\tau} = A = \text{const.}$$

Nun gilt:

$$A^2 - \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = c^2 \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) \Rightarrow \frac{dr}{d\tau} = \pm \sqrt{A^2 - c^2 \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)}; \frac{dt}{d\tau} = \frac{A}{c} \frac{1}{1 - \frac{r_s}{r}}$$

Annahme: Ausdehnung der Masse M (welche die Schwarzschildmetrik erzeugt) kleiner als Schwarzschildradius := Masse M ist ein „Schwarzes Loch“

Frage: Wann erreicht ein bei $r=R > r_s$ startendes frei fallendes Teilchen den Schwarzschildradius $r=r_s$?

Eigenzeit (mitbewegter Beobachter):

$$\tau(r) = - \int_R^r \frac{dr'}{\sqrt{A^2 - c^2 \left(1 - \frac{r_s}{r'}\right)}}$$

$$\text{Bei } r=R: \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) c^2 \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 = c^2 \Rightarrow \frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{r_s}{R}}} \Rightarrow A = c \sqrt{1 - \frac{r_s}{R}}$$

Wenn man das einsetzt erhält man:

$$\tau(r) = \frac{1}{c} \int_r^R \frac{dr'}{\sqrt{\left(1 - \frac{r_s}{R}\right) - \left(1 - \frac{r_s}{r'}\right)}} = \frac{1}{c} \int_r^R \frac{dr'}{\sqrt{\frac{r_s}{r'} - \frac{r_s}{R}}}$$

Man kann das Integral durch folgende Substitution lösen:

$$r' = R \sin^2 x \Rightarrow dr' = 2R \sin x \cos x dx$$

$$\tau(r) = \frac{2R}{c} \sqrt{\frac{R}{r_s}} \int_{\arcsin \sqrt{\frac{r}{R}}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx = \frac{R}{2c} \sqrt{\frac{R}{r_s}} \left[2 \sqrt{\frac{r}{R} - \frac{r^2}{R^2}} + \arccos \left(\frac{2r}{R} - 1 \right) \right]$$

Bei $r=R$ gilt: $\tau(R) = 0$

Wählt man nun $r = r_s$, so erhält man: $\tau(r_s) = \frac{R}{2c} \sqrt{\frac{R}{r_s}} \left[2 \sqrt{\frac{r_s}{R} - \frac{r_s^2}{R^2}} + \arccos\left(\frac{2r_s}{R} - 1\right) \right]$

Das Teilchen erreicht nach endlicher Eigenzeit den Schwarzschildradius.

$$r = 0: \tau(0) = \frac{\pi R}{2c} \sqrt{\frac{R}{r_s}}$$

Das Teilchen erreicht nach endlicher Eigenzeit das Zentrum des Schwarzen Loches.

Einführung der Zyklidenkoordinate: η durch $r = \frac{R}{2}(1 + \cos \eta)$

Nun gilt: $r(\eta = 0) = R; r(\eta = \pi) = 0$

$$\tau(\eta) = \frac{r}{2c} \sqrt{\frac{R}{r_s}} (\eta + \sin \eta)$$

Das Teilchen passiert in seinem Ruhesystem den Schwarzschildradius ohne auf eine Singularität zu stoßen.

Was sieht ein weit entfernter äußerer Beobachter? (Zeit t)

$$t(r) = \int dt = - \int_R^r \frac{A}{c} \frac{1}{1 - \frac{r_s}{r'}} \frac{dr'}{\sqrt{A^2 - c^2 \left(1 - \frac{r_s}{r'}\right)}}$$

$A = c \sqrt{1 - \frac{r_s}{R}}$

$$= \sqrt{1 - \frac{r_s}{R}} \frac{1}{c} \int_R^r \frac{1}{1 - \frac{r_s}{r'}} \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{r_s}{R}\right) - \left(1 - \frac{r_s}{r'}\right)}} dr'$$

Singularität für $r' \rightarrow r_s$

Genauere Auswertung des Integrals (mit Zyklidenkoord. η):

$$t(\eta) = \frac{r_s}{c} \left(\ln \left(\frac{\sqrt{\frac{R}{r_s} - 1} + \tan \frac{\eta}{2}}{\sqrt{\frac{R}{r_s} - 1} - \tan \frac{\eta}{2}} \right) + \sqrt{\frac{R}{r_s} - 1} \left[\eta + \frac{R}{2r_s} (\eta + \sin \eta) \right] \right)$$

Nun sieht man dass $t \rightarrow \infty$ für $\sqrt{\frac{R}{r_s} - 1} = \tan \frac{\eta}{2} \Rightarrow \frac{R}{r_s} - 1 = \frac{1 - \cos \eta}{1 + \cos \eta} \Rightarrow \cos \eta = \frac{2r_s}{R} - 1$
 $\Rightarrow r = \frac{R}{2}(1 + \cos \eta) = r_s$

Für den Beobachter erreicht das Teilchen niemals den Schwarzschildradius r_s .

Konsequenzen:

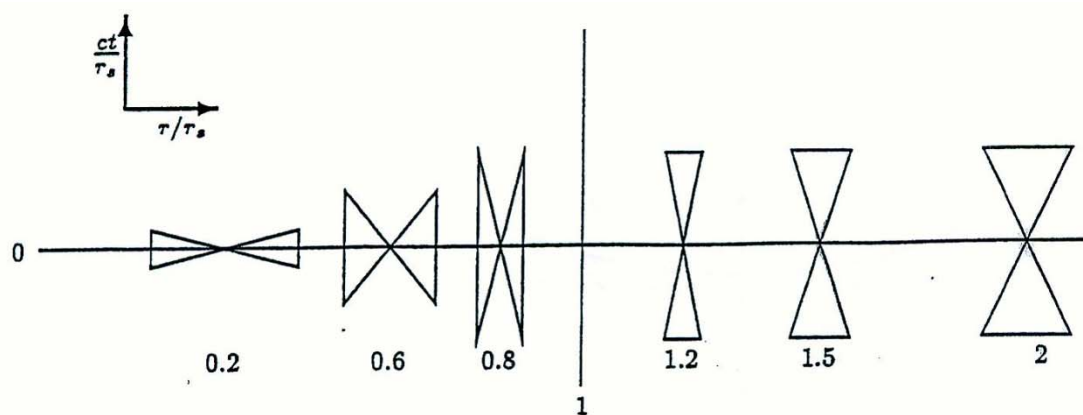
- r_s ist „Ereignishorizont“.
- Informationen über Ereignisse bei $r < r_s$ können den äußeren Beobachter nicht erreichen
- Gilt auch für Photonen (Licht):
Aus dem Bereich $r < r_s$ entweicht kein Licht („schwarzes Loch“).

Beobachtungen (Nachweis) schwarzer Löcher ist nur indirekt möglich.

Zur Schwarzschildmetrik:

- Bei Annäherung an den Schwarzschild-Radius tritt eine Singularität in ds^2 auf.
- Der Bereich $r \leq r_s$ ist in den Koordinaten (t,r) nicht zugänglich ($r = r_s$ ist Ereignishorizont).
- Im Eigensystem eines radial fallenden Beobachters tritt keine Singularität bei $r = r_s$ auf \Rightarrow Singularität ist koordinatenabhängig.
- Betrachte radialen Lichtkegel $ds^2 = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) c^2 dt^2 - \frac{1}{1 - \frac{r_s}{r}} dr^2 = 0$
 $\Rightarrow \frac{dr}{dt} = \pm c \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)$

$r > r_s$: Die Lichtkegel verengen sich bei Annäherung an en Schwarzschild-Radius. Für $r > r_s$ sind sie entlang der Zeitachse geöffnet. Für $r < r_s$ öffnen sich die Lichtkegel entlang der Raumachse, d.h. r wird zeitartige und t wird raumartige Koordinate.



Frage: Gibt es geeignetere Koordinaten zur Beschreibung geodätischer Linien?

7.1 Kruskal-Koordinaten

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) c^2 dt^2 - \frac{1}{1 - \frac{r_s}{r}} dr^2 - r^2 d\Omega^2 \stackrel{!}{=} \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) (c^2 dt^2 - dr^{*2}) - r^2 d\Omega^2$$

$$\Rightarrow dr^* = \frac{1}{1 - \frac{r_s}{r}} dr$$

Radiale Lichtstrahlen: $cdt = \pm dr^*$

Transformation: $(t, r^*) \rightarrow (v, u)$

Ansatz: $ds^2 = f^2(u, v)(dv^2 - du^2) - r^2(u, v)d\Omega^2$
 Hierbei ist v die zeitartige und u die raumartige Koordinate

Forderungen: $f^2(u, v)(dv^2 - du^2) = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) (c^2 dt^2 - dr^{*2})$

$$\left. \begin{aligned} u &= h(r^* + ct) + g(r^* - ct) \\ v &= h(r^* + ct) - g(r^* - ct) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} du &= \dots \\ dv &= \dots \end{aligned}$$

$$\Rightarrow dv^2 - du^2 = 4g'h'(c^2 dt^2 - dr^{*2}) \Rightarrow f^2 = \frac{1}{4g'h'} \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)$$

Ziel: f^2 positiv und frei von Singularitäten

Lösung:

$$\left. \begin{aligned} h(r^* + ct) &= \frac{1}{2} e^{\frac{r^* + ct}{2r_s}} \\ g(r^* - ct) &= \frac{1}{2} e^{\frac{r^* - ct}{2r_s}} \end{aligned} \right\} \Rightarrow f^2 = \frac{4r_s^3}{r} e^{-\frac{r}{r_s}} > 0$$

Singularität nur für $r=0$

$$\left[dr^* = \frac{1}{1 - \frac{r_s}{r}} dr \Rightarrow r^* = r + r_s \ln\left(\frac{r}{r_s} - 1\right) \right]$$

$$\left. \begin{aligned} u^2 - v^2 &= \left(\frac{r}{r_s} - 1\right) e^{\frac{r}{r_s}} \\ 2uv &= \left(\frac{r}{r_s} - 1\right) \sinh\frac{ct}{r_s} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} u &= \pm \sqrt{\frac{r}{r_s} - 1} e^{\frac{r}{2r_s}} \cosh\frac{ct}{2r_s} \\ v &= \pm \sqrt{\frac{r}{r_s} - 1} e^{\frac{r}{2r_s}} \sinh\frac{ct}{2r_s} \end{aligned} \quad \text{für } r > r_s$$

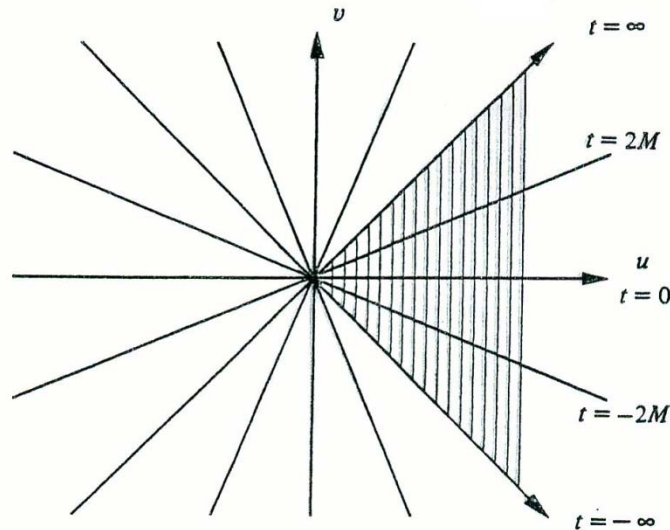
und

$$\left. \begin{aligned} u &= \pm \sqrt{1 - \frac{r}{r_s}} e^{\frac{r}{2r_s}} \sinh\frac{ct}{2r_s} \\ v &= \pm \sqrt{1 - \frac{r}{r_s}} e^{\frac{r}{2r_s}} \cosh\frac{ct}{2r_s} \end{aligned} \right\} \quad \text{für } r < r_s$$

$$ds^2 = \frac{4r_s^3}{r} e^{-\frac{r}{r_s}} (dv^2 - du^2) - r^2 d\Omega^2 \quad \text{mit } r = r(u, v)$$

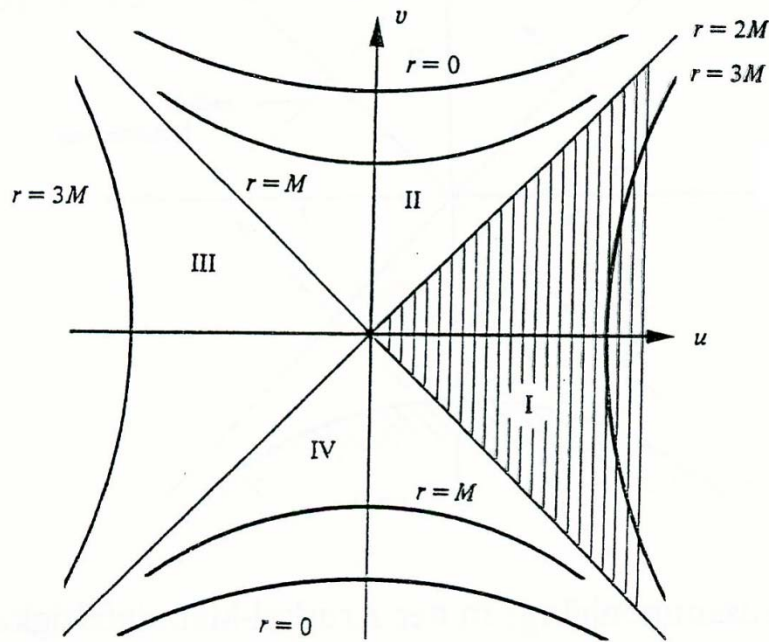
$$\frac{v}{u} = \tanh\frac{ct}{2r_s}$$

Kurven konstanter Koordinate t : $\frac{v}{u} = \tanh\frac{ct}{2r_s} = \text{const.}$: Geraden im (u,v)-Diagramm



Konstante Radialkomponente r : Hyperbeln im (u,v)-Diagramm

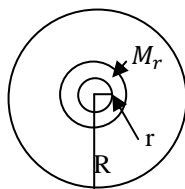
$$\begin{aligned} r = r_s; u^2 - v^2 = 0 &\Rightarrow u = \pm v && \text{(Geraden)} \\ r = 0; v^2 - u^2 = 0 &\Rightarrow v = \pm \sqrt{1 + u^2} && \text{hierbei ist das + ein schwarzes und das - ein weißes Loch} \end{aligned}$$



Zeitartige Weltlinien: $ds^2 > 0 \Rightarrow dr^2 > du^2 \Rightarrow dv > |du|$
 „Zukunft“

Jedes Teilchen, das den Schwarzschild-Radius durchquert ($r < r_s$) wird immer in der Singularität bei $r=0$ enden.

7.2 Gravitationskollaps: Elementare Theorie entarteter Sterne



$$F_r = -4\pi r^2 dp$$

$$\frac{GM_r dM_r}{r^2} = -4\pi r^2 dp$$

$$dM_r = \rho(r) 4\pi r^2 dr$$

$$\left| \frac{dp}{dr} = -GM_r \rho(r) / r^2 \right.$$

$$M_r = 4\pi \int_0^r \rho(r') r'^2 dr'$$

Stern: Gaskugel homogener Dichte, $\rho = konst.$, $M_r = \frac{4}{3}\pi\rho r^3$

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{4}{3}\pi G \rho^2 r \Rightarrow p = p_0 - \frac{2}{3}\pi G \rho^2 r^2 \text{ mit } p_0 = p(0)$$

$$R: \text{ Sternradius, } p(R)=0 \Rightarrow p_0 = \frac{2}{3}\pi G \rho^2 R^2$$

$$\Rightarrow \frac{p_0}{\rho c^2} = \frac{2}{3}\pi \frac{G\rho R^3}{Rc^2} = \frac{1}{4} \frac{r_s}{R} \text{ mit } r_s = \frac{2G}{c^2} \frac{4\pi}{3} \rho R^3$$

$$\frac{r_s}{R} \approx \frac{p}{\rho c^2}$$

Gleichgewichtsbedingung

Zustandsgleichungen

a) Normale Sterne: Gasdruck aufgebaut durch Fusionsprozesse

Allgemein: $\frac{p}{\rho c^2} = f(\rho, T)$

Ideale Gase: $pV = RT = nkT \Rightarrow p = \frac{N}{V} kT$

$$f = \frac{p}{\rho c^2} = \frac{kT}{m c^2} = \frac{v^2}{3c^2} \approx 10^{-6} \quad \frac{m}{2} v^2 = \frac{3}{2} kT$$

(m_p, H-Atom)

Brennstoff aufgebraucht => Abkühlung, Druck p kann Gravitation nicht mehr kompensieren

b) Entartete Sterne

$$\rho > 10^4 \frac{g}{cm^3}$$

$$\frac{p}{\rho c^2} = f(\rho, T) = \begin{cases} f(T) \text{ für ideales Gas} \\ f(\rho) \text{ für entartete Materie} \end{cases}$$

Entartete Materie: Keine Lokalisierung der Elektronen an Atome

Druck wird aufgebaut durch (freies) Elektronengas (Fermigas):

$p_F \cdot d \approx \hbar$, p_F : Fermi-Impuls, d: mittlerer Elektronenabstand

$$f = \frac{p}{\rho c^2} \cong \frac{E_F}{m c^2} \cong \begin{cases} \frac{1}{m c^2} \left(\frac{p_F^2}{m_e} \right) \text{ (nicht relativistisch) } p_F \lesssim m_e c \\ \frac{1}{m c^2} p_F c \text{ (relativistisch) } p_F \gtrsim m_e c \end{cases}$$

Übergang bei $p_f \approx m_e c$

$$p_F \approx m_e c \Rightarrow d \approx \frac{\hbar}{m_e c} = \lambda_c = 4 \cdot 10^{-11} cm \quad \text{Compton-Wellenlänge des } e^-$$

$$\rho_0 \approx \frac{m}{\lambda_c^3} = m \frac{m_e^3 c^3}{\hbar^3} \approx 3 \cdot 10^7 \frac{g}{cm^3}$$

Weißer Zwerge: $10^4 \frac{g}{cm^3} < \rho < 10^8 \frac{g}{cm^3}$

$$p_F = m_e c \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{\frac{1}{3}}; \quad \frac{p}{\rho c^2} = \frac{m_e}{m} \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{\frac{n}{3}} \text{ mit } n = \begin{cases} 2, \rho < \rho_0 \text{ nicht relativistisch} \\ 1, \rho > \rho_0 \text{ relativistisch} \end{cases}$$

$$\frac{r_s}{R} = \frac{GM}{c^2} \frac{\rho^{\frac{1}{3}}}{M^{\frac{1}{3}}} = \frac{GM^{\frac{2}{3}} \rho^{\frac{1}{3}}}{c^2} = f \Rightarrow M = \frac{c^3 f^{\frac{3}{2}}}{\rho^{\frac{1}{2}} G^{\frac{3}{2}}}$$

$M = M(\rho)$ im Gleichgewicht

$$M(\rho) = \begin{cases} \sqrt{\frac{\rho}{\rho_0}} M_c, & \rho < \rho_0 \\ M_c, & \rho > \rho_0 \end{cases} \quad \text{mit } M_c = m \left(\frac{c \hbar}{m^2 G} \right)^{\frac{3}{2}} \quad \text{Chandrasekhar-Grenzmasse}$$

$M_c \approx 1,8 M_{\text{Sonne}}$ (Korrekt: $1,2 M_{\text{Sonne}}$)

Radien weißer Zwerge: $R \approx 10^4 km$

$$\frac{r_s}{R} = \frac{3km}{10^4 km} \approx 3 \cdot 10^{-4}$$

c) Neutronensterne:

$\rho > 10^8 \frac{g}{cm^3}$: $p+e \rightarrow n+\nu_e$
 $10^8 \frac{g}{cm^3} - 10^{13} \frac{g}{cm^3}$: schwere Kerne
 ab $10^{11} \frac{g}{cm^3}$: freie Neutronen
 ab $10^{13} \frac{g}{cm^3}$: Übergang zu Neutronengas beendet, Druck aufgebaut durch Fermi-Druck der Neutronen mit Compton-Wellenlänge $\lambda_n = \frac{\hbar}{m_n c} = 2 \cdot 10^{-14} cm$

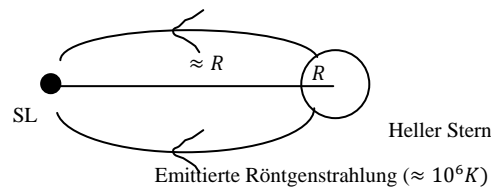
$$\rho_0 \rightarrow \rho_1 = \frac{m}{\lambda_n^3} \approx 10^{16} \frac{g}{cm^3}$$

$$M(\rho) = \begin{cases} \left(\frac{\rho}{\rho_1}\right)^{\frac{1}{2}} M_c, & \rho < \rho_1 \\ M_c, & \rho > \rho_1 \end{cases}$$

Radien der Neutronensterne: $R \approx 10 km \approx 3r_s$

Masse: $M \approx 1,5 M_{Sonne}$

d) Sterne mit Anfangsmassen $M > 10M_{Sonne}$, die es nicht zum Neutronenstern schaffen, werden zum „Schwarzen Loch“
 Suche nach schwarzen Löchern in Doppelsternsystemen



1972/73: Cygnus X₁: $M_{SL} \approx 14 M_{Sonne}, M_{HS} \approx 20 M_{Sonne}$

7.3 Kosmologie

Einzig bekannte langreichweitige Kraft, die nicht kompensiert werden kann: Gravitation (es gibt keine negativen Massen).

=> Entwicklung und Dynamik großer und weiträumig verteilter Materie (Kosmos) wird durch die Gravitation bestimmt.

Materie im Universum ist nicht gleichmäßig verteilt. Es gibt Sterne, Galaxien, Galaxiehaufen,...

Notwendig für die Entwicklung von Weltmodellen:

Vereinfachte Annahmen bei Betrachtung des Kosmos auf großen Skalen. Das einfachste Modell folgt aus dem Kosmologischen Prinzip:

Im Ruhesystem der Materie gibt es keinen ausgezeichneten Punkt (der Raum ist homogen) und es gibt keine ausgezeichnete Richtung (Der Raum ist isotrop). Die dreidimensionale Welt ist überall gleich beschaffen.

ART: Raum-Zeit beschrieben durch die Metrik $g_{\mu\nu}$ (ist Lösung der Einsteinschen Feldgleichungen)

Gesucht: Metrik des homogenen und isotropen Raumes

Forderungen: - Raum und Zeit entkoppelt, Raumkoordinaten hängen nicht von der Zeit ab und umgekehrt.

- Zeitlinien sind geodätische Linien.

- Homogenität des Raumes => Es gibt eine universelle Zeit, also:
 $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = c^2 dt^2 + g_{ij} dx^i dx^j; i, j = 1, 2, 3$
 $= c^2 dt^2 - dl^2$ mit l =invarianter räumlicher Abstand

Zweidimensionales Beispiel:

Allgemeinste Metrik für zweidimensionalen homogenen und isotropen Raum.
 Anschaulich: Räume mit konstanter Krümmung sind homogen und isotrop

- 1) Ebene (Krümmung 0) $dl^2 = dx^2 + dy^2$ (kartesisch)
- 2) Kugeloberfläche (Radius a , Krümmung $\frac{1}{a^2}$) beschreibbar durch sphärische

Polarkoordinaten (ϑ, φ)

$$dl^2 = a^2(d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2)$$

$$\text{Damit: } ds^2 = c^2 dt^2 - a^2(t)(d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2)$$

↑ beliebige Funktion von t

Einbettung der Kugeloberfläche im 3-dim. Raum

$$\begin{aligned} x_1 &= a \sin \vartheta \cos \varphi \\ x_2 &= a \sin \vartheta \sin \varphi \\ x_3 &= a \cos \vartheta \end{aligned}$$

Koordinatentransformation:

$$r = \sin \vartheta, dr = \cos \vartheta d\vartheta = \sqrt{1-r^2} d\vartheta, d\vartheta = \frac{1}{\sqrt{1-r^2}} dr; r \in [0,1,0]$$

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a^2(t) \left(\frac{1}{1-r^2} dr^2 + r^2 d\vartheta^2 \right): \text{ Robertson-Walker-Metrik in 3.dim. Raum-Zeit}$$

- 3) Fläche mit konstanter Krümmung $-\frac{1}{a^2}$: Hyperboloid $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = -a^2$

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= a \sinh \chi \cos \varphi \\ x_2 &= a \sinh \chi \sin \varphi \\ x_3 &= a \cosh \chi \end{aligned} \right\} \begin{aligned} r &= \sinh \chi, dr = \cosh \chi d\chi = \sqrt{1 + \sinh^2 \chi} dr \\ &\Rightarrow d\chi = \frac{1}{\sqrt{1+r^2}} dr \end{aligned}$$

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a^2(t) \left(\frac{1}{1+r^2} dr^2 + r^2 d\varphi^2 \right)$$

Zusammengefasst: Robertson-Walker-Metrik im 3-dim. Raum-Zeit:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a^2(t) \left[\frac{1}{1-kr^2} dr^2 + r^2 d\varphi^2 \right] \text{ mit } \begin{cases} -1: \text{ konstant neg. Krümmung (siehe 3)} \\ 0: \text{ flacher Raum (siehe 1)} \\ +1: \text{ konstant pos. Krümmung (siehe 2)} \end{cases}$$

Erweiterung auf dreidimensionalen Raum (4-dim. Raum-Zeit):

- o Kartesisch: $dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$

- o Konstante positive Krümmung: Einbettung: $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = a^2$

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= a \sin \chi \sin \vartheta \cos \varphi \\ x_2 &= a \sin \chi \sin \vartheta \sin \varphi \\ x_3 &= a \sin \chi \cos \vartheta \\ x_4 &= a \cos \chi \end{aligned} \right\} \begin{aligned} ds^2 &= c^2 dt^2 - a^2(t) [d\chi^2 + \sin^2 \chi (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2)] \\ r &= \sin \chi \end{aligned}$$

$$\Rightarrow ds^2 = c^2 dt^2 - a^2(t) \left[\frac{1}{1-r^2} dr^2 + r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2) \right]$$



- o Konstante negative Krümmung: Einbettung: $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 = -a^2$

$$x_1 = a \sinh \chi \sin \vartheta \cos \varphi \quad r = \sinh \chi$$

...

$$x_4 = a \cosh \chi$$

$$\Rightarrow ds^2 = c^2 dt^2 - a^2(t) \left[\frac{1}{1+r^2} dr^2 + \dots \right]$$

Robertson-Walker-Metrik in 4-dim. Raum-Zeit:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a^2(t) \left[\frac{1}{1-qr^2} dr^2 + r^2 [d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2] \right] \text{ mit } q = 0, \pm 1$$

flach
sphärischer
Raum
pseudosphärischer
Raum

$$g_{00} = c^2; g_{11} = -\frac{q^2(t)}{1-qr^2}; g_{22} = -a^2(t)r^2; g_{33} = -a^2(t)r^2 \sin^2 \vartheta;$$

$$g_{\mu\nu} = 0 \text{ für } \mu \neq \nu$$

Frage: In welcher Welt (Metrik) leben wir?

a(t) ergibt sich aus den Einsteinschen Feldgleichung:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \text{ bzw. } R = 4\Lambda - \kappa T \text{ mit } \kappa = \frac{8\pi G}{c^4}$$

$$T = g^{\mu\nu} T_{\mu\nu}; R_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} T g_{\mu\nu} \right) = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}^*$$

Ricci-Tensor Kosmologische
Konstante Energie-Impuls-
Tensor

Universum homogen gefüllt mit Materie: Dichte ρ

$$\Rightarrow T^{\mu\nu} = \sigma u^\mu u^\nu = \sigma \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}$$

Annahme:

Materie ruht (Mittelung über ungeordnete Bewegung)

(Bei zeitabhängiger a(t) in der RW-Metrik ändern sich die Abstände zwischen „ruhenden“ Punkten!)

$$\tau = ct \Rightarrow u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} = (1, 0, 0, 0) \Rightarrow T^{00} = \sigma: \text{ alle übrigen } T^{\mu\nu} = 0$$

$$g_{00} = c^2$$

$$T_{\mu\nu} = g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} T^{\alpha\beta} = \sigma g_{\mu 0} g_{\nu 0} = c^2 \sigma$$

$$T_{\mu\nu}^* = \frac{1}{2} c^2 \sigma \begin{pmatrix} c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -g_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -g_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -g_{33} \end{pmatrix}$$

Berechnung des Ricci-Tensors:

$$R_{\mu\nu} = \frac{\partial \Gamma_{\mu\alpha}^\alpha}{\partial x^\nu} - \frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^\alpha}{\partial x^\alpha} - \Gamma_{\sigma\alpha}^\alpha \Gamma_{\mu\nu}^\sigma + \Gamma_{\sigma\nu}^\alpha \Gamma_{\mu\alpha}^\sigma$$

Für die Robertson-Walker-Metrik liefert dies:

$$R_{00} = -3 \frac{\ddot{a}}{a}$$

$$R_{11} = \frac{1}{1-qr^2} \left[\frac{1}{c^2} (a\ddot{a} + 2\dot{a}^2) + 2q \right]$$

$$R_{22} = r^2 \left[\frac{1}{c^2} (a\ddot{a} + 2\dot{a}^2) + 2q \right]$$

$$R_{33} = r^2 \sin^2 \vartheta \left[\frac{1}{c^2} (a\ddot{a} + 2\dot{a}^2) + 2q \right]$$

$$R_{\mu\nu} = 0 \text{ für } \mu \neq \nu$$

Einsteinsche Feldgleichungen:

$$\begin{pmatrix} R_{00} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_{33} \end{pmatrix} - \Lambda \begin{pmatrix} c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -g_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -g_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -g_{33} \end{pmatrix} =$$

$$\frac{4\pi G}{c^2} \sigma \begin{pmatrix} c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -g_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -g_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -g_{33} \end{pmatrix}$$

Trivial erfüllt für $\mu \neq \nu$.

$$(I) \quad \mu = \nu = 0: \quad 3 \frac{\ddot{a}}{a} + \Lambda c^2 = -4\pi G \sigma$$

$$(II) \quad \mu = \nu = 1,2,3: \quad \frac{1}{c^2} (a\ddot{a} + 2\dot{a}^2) + 2q + \Lambda a^2 = \frac{4\pi G}{c^2} \sigma a^2$$

Aus (I) folgt durch umformen nach \ddot{a} :

$$\ddot{a} = -\frac{1}{3} (4\pi G \sigma + \Lambda c^2) a$$

Einsetzen in (II):

$$\dot{a}^2 - \frac{8\pi}{3} G \sigma a^2 - \frac{\Lambda c^2}{3} a^2 = -q c^2$$

Aus $T^{\mu\nu}_{;\nu} = 0$ folgt: $\sigma a^3 = \text{konst.} \equiv M$

$$\text{Damit: } \dot{a}^2 - \frac{8\pi G M}{3} \frac{1}{a} - \frac{\Lambda c^2}{3} a^2 = -q c^2$$

7.4 Die Friedmann-Universen (ohne kosmologische Konstante $\Lambda = 0$)

$$\text{Wir setzen } a_0 = \frac{4\pi G M}{3c^2} \Rightarrow \dot{a}^2 - 2 \frac{a_0}{a} c^2 = -q c^2$$

a) $q=0$

$$\dot{a} = (+) c \sqrt{2 \frac{a_0}{a}} = \frac{da}{dt} \Rightarrow \sqrt{a} da = c \sqrt{2a_0} dt$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3} a^{\frac{3}{2}} = c \sqrt{2a_0} (t - t_0) \quad \text{wobei } t_0 = 0 \text{ für } a(0) = 0$$

$$\Rightarrow a(t) = \left(3c \sqrt{\frac{a_0}{2}} \right)^{\frac{2}{3}} t^{\frac{2}{3}}$$

$$\text{Hubble-Zahl: } H(t) = \frac{\dot{a}}{a} = \frac{2}{3} \frac{1}{t}$$

[Urknall, flaches Universum:

$H(t \rightarrow \infty) = 0$, offenes Universum]

b) $q=+1$

$$\dot{a} = \frac{da}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2a_0}{a} - 1} c \Rightarrow \frac{da}{\sqrt{\frac{2a_0}{a} - 1}} = \pm c dt$$

$$\text{Ansatz: } a = a_0 (1 - \cos \eta), da = a_0 \sin \eta d\eta$$

$$x = \cos \eta$$

$$\pm c dt = \frac{a_0 \sin \eta d\eta}{\sqrt{\frac{2}{1-\cos \eta} - 1}} = a_0 \sqrt{\frac{1-\cos \eta}{1+\cos \eta}} \sin \eta d\eta = -a_0 \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} dx$$

$$\pm c(t - t_0) = -a_0(-\arccos x + \sqrt{1-x^2}) = a_0(\eta - \sin \eta)$$

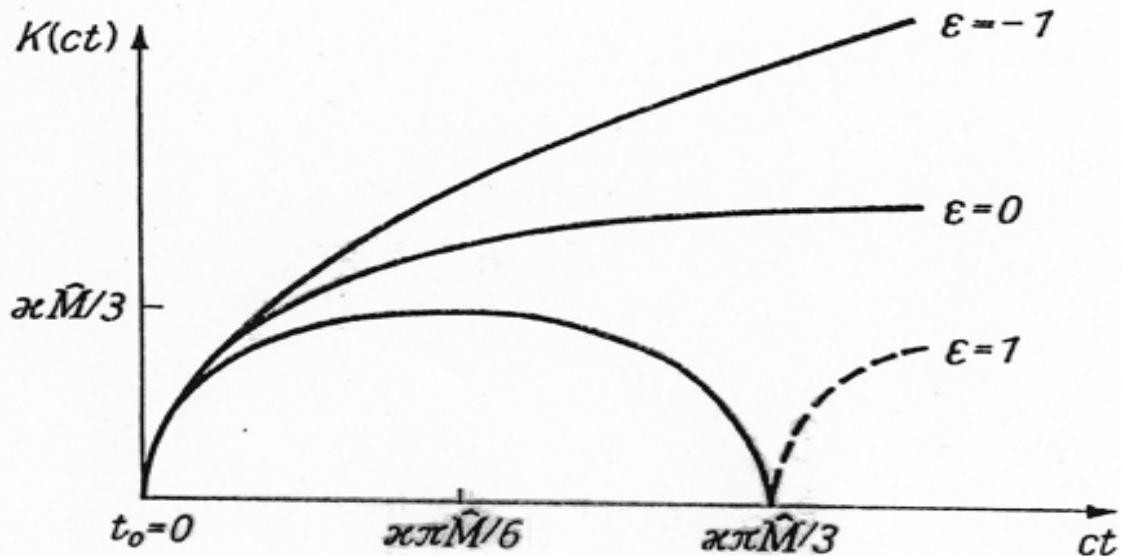
Randbedingung bei $t=0$: $a = 0 \Rightarrow \eta = 0 \Rightarrow t_0 = 0$

Parameterdarstellung: $\left. \begin{aligned} a &= a_0(1 - \cos \eta) \\ ct &= a_0(\eta - \sin \eta) \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{Gleichung der gewöhnlichen Zyklode,} \\ a_0: \text{Radius des rollenden Kreises, } \eta: \text{Winkel} \end{array}$

c) $q=-1$

$$\dot{a} = (+) \sqrt{2 \frac{a_0}{a} + 1} c \Rightarrow \frac{da}{\sqrt{2 \frac{a_0}{a} + 1}} = \pm c dt$$

Ansatz: $\left. \begin{aligned} a &= a_0(\cosh \eta - 1) \\ ct &= a_0(\sinh \eta - \eta) \end{aligned} \right\} \text{(analog zur b)}$



$q=0,-1$: Offenes Universum, $a(t) \rightarrow \infty$ für $t \rightarrow \infty$, unendliche Expansion
 $q=+1$: Geschlossenes (pulsierendes) Universum, $a(t)$ endlich und periodisch

Alle drei Modelle haben am Weltanfang $t = t_0 = 0$ eine Singularität. Dort geht der Skalenfaktor $a(t)$ gegen Null: „Urknall“

Frage: Welches Modell beschreibt unseren Kosmos; $q=0, \pm 1$?

Entscheidung möglich durch Beobachtung, z.B. Messung der Hubble-Zahl

$$H(t) = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \quad [\text{und Ableitungen von } H(t)] \text{ und der Massendichte } \sigma$$

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} = H^2 = \frac{8\pi}{3} G\sigma - g \frac{c^2}{a^2} \Rightarrow q \frac{c^2}{a^2} = \frac{8\pi}{3} G\sigma - H^2$$

$$\left[\begin{array}{l} > \\ \frac{8\pi}{3} G\sigma = H^2 \\ < \end{array} \Rightarrow q = \begin{cases} +1 \\ 0 \\ -1 \end{cases} \right]$$

7.4.1. Bestimmung der Hubble-Zahl: Die Rotverschiebung

Beobachtung (V. Slipher, 1915): Das Licht weit entfernter Galaxien kommt stark rotverschoben bei uns an.

Erwartung: Rein zufällig Verteilung der spektralen Doppler-Verschiebungen durch lokale Bewegungen der Galaxien.

Folgerungen: (E. Hubble, 1929): Galaxien entfernen sich von uns mit der Geschwindigkeit proportional zu ihrer Entfernung.

$$\text{RW-Metrik mit } q=+1: ds^2 = c^2 dt^2 - a(t)^2 (d\chi^2 + \sin^2 \chi (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2))$$

Zwei „Ruhende“ Objekte: Konstante Winkel $(\chi, \vartheta, \varphi)$, z.B.

$$\left. \begin{array}{l} P_1: (0,0,0) \\ P_2: (\chi, 0,0) \end{array} \right\} \text{ Abstand zur freien Zeit } t \text{ (dt=0) (Näherung!)}$$

$$ds^2 = a^2(t) d\chi^2 \Rightarrow ds = a(t) d\chi \Rightarrow s(t) = a(t) \chi$$

$$\dot{s} = \dot{a} \chi = \frac{\dot{a}}{a} s = Hs \quad (\text{Hubble-Gesetz})$$

\uparrow Fluchtgeschwindigkeit \uparrow Entfernung
 Hubble-Zahl (räumlich konstant)

$$H = \frac{\dot{a}}{a} = \frac{\dot{s}}{s}$$

Messung von \dot{s} mittels Doppler-Effekt:

λ_0 : Emittierte Wellenlänge einer (bekannten) Spektrallinie

λ_1 : bei uns empfangen

$$\text{Rotverschiebungsparameter: } Z \equiv \frac{\lambda_1 - \lambda_0}{\lambda_0} = \frac{\frac{c}{v_1} - \frac{c}{v_0}}{\frac{c}{v_0}} = \frac{v_0 - v_1}{v_1} = \frac{\omega_0 - \omega_1}{\omega_1}$$

$$\text{Relativistischer Doppler-Effekt: } \beta = \frac{v}{c}$$

$$\omega_0 = \omega_1 \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} \approx \omega_1 (1 + \beta) \Rightarrow Z = \frac{\omega_0 - \omega_1}{\omega_1} = \beta = \frac{v}{c}$$

$$\Rightarrow v = \dot{s} = cZ = Hs \Rightarrow H = c \frac{Z}{s} \quad (\text{gilt für } \chi \ll \pi, s \ll a, \dot{s} \ll c)$$

Problem: Bestimmung der Entfernung S (über scheinbare und absolute Welligkeit)

Helligkeits-Rotverschiebungs-Beziehung (ohne Herleitung):

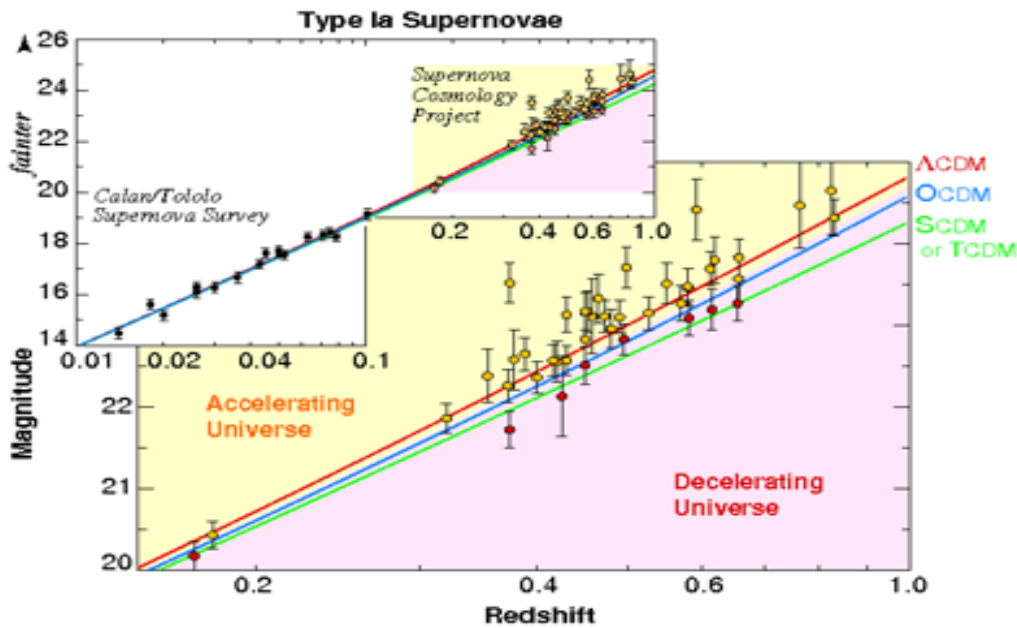
$$\text{Scheinbare Helligkeit } S = \frac{I_0 H^2}{4\pi c^2} \frac{1-(1-b)Z}{z^2} \text{ mit } Z = \frac{\lambda_1 - \lambda_0}{\lambda_0} \text{ Rotverschiebungsparameter}$$

I_0 : absolute Helligkeit
 $b = -\frac{\ddot{a}}{H^2 a}$: Verzögerungsparameter

Bestimmung der absoluten Helligkeit I_0 mittels „Standard-Kerzen“, d.h. Objekten, die alle dieselbe absolute Helligkeit besitzen.

Supernovae Typ Ia (Explosionen eines weißen Zwerges) erfüllen diese Bedingung annähernd.

Intensive Beobachtungen (Supernovae Cosmology Project)



Messungen favorisieren eine beschleunigte Expansion des Kosmos im Widerspruch zu den Friedmann-Modellen mit gebremster Expansion

7.4.2. Weltmodelle mit kosmologischer Konstante ($\Lambda \neq 0$)

$$\dot{a}^2 - \frac{8\pi}{3} G \underbrace{\sigma a^2}_{\frac{M}{a}} - \frac{\Lambda c^2}{3} a^2 = -qc^2$$

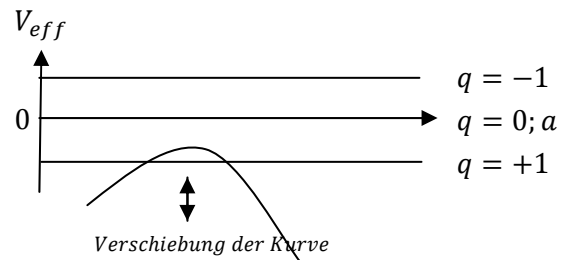
Diese Gleichung ist im allgemeinen nicht geschlossen lösbar.

$$\dot{a}^2 + V_{eff}(a) = -qc^2 \quad \text{mit} \quad V_{eff}(a) = -\frac{8\pi}{3} \frac{GM}{a} - \frac{\Lambda c^2}{3} a^2$$

[Analogie zu mechanischem System $\frac{m}{2} \dot{x}^2 + V(x) = E \Rightarrow \dot{x} = \pm \sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x))}$]

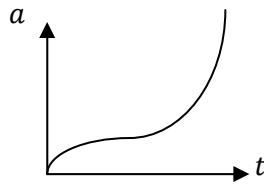
Diskussion möglicher Lösungen:

1. $\Lambda > 0 \Rightarrow V_{eff}(a) < 0$



a. $q=-1$: Potentialkurve immer unter „Gesamtenergie“ ($+c^2$),

Friedmann-Lemaître (Es gibt „Urknall“), ewige beschleunigte Expansion des Kosmos.



- b. $q=0$: ähnlich zu $q=-1$
- c. $q=+1$: siehe Übung
- 2. $\Lambda = 0$: Friedmann-Modelle (Standardmodelle)
- 3. $\Lambda < 0$: Geschlossenes Universum (unabhängig von q) es gibt in jedem Fall einen Urknall)

7.4.3. Fragen zum Kosmos

1. Leben wir in einem geschlossenen oder offenen Universum?
2. Ist die momentane Expansion des Raumes gebremst oder beschleunigt?
3. Ist der Raum flach oder gekrümmt?

Antworten erfordern Modellbildungen und Messungen:

Ω -Darstellung der Friedmann-Gleichung:

$$\dot{a}^2 - \frac{8\pi}{3} G \sigma_m a^2 - \frac{\Lambda c^2}{3} a^2 = -q c^2 \quad (\text{Einsteinsche Gleichung})$$

$$\Rightarrow H^2 = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi}{3} G \sigma_m + \frac{\Lambda c^2}{3} + \frac{q}{a^2} c^2 \quad (\text{Friedmann - Gleichung})$$

Normierung:

$$1 = \underbrace{\frac{8\pi G}{3H^2} \sigma_m}_{\Omega_m} + \underbrace{\frac{\Lambda c^2}{3H^2}}_{\Omega_\Lambda} - \underbrace{\frac{q c^2}{a^2 H^2}}_{\Omega_q} \quad \text{„Kosmologisches Dreieck“}$$

$$\Omega_m + \Omega_\Lambda + \Omega_q = 1 \text{ mit}$$

$$\Omega_m = \frac{\sigma_m}{\sigma_{crit}}: \text{Anziehende Materie (Baryonische und „dunkle“ Materie)}$$

$$\text{und } \sigma_{crit} = \frac{3H^2}{8\pi G} \approx 8 \cdot 10^{-27} \frac{kg}{m^3}$$

$$\Omega_\Lambda = \frac{\Lambda c^2}{3H^2} = \frac{\sigma_\Lambda}{\sigma_{crit}}: \text{„dunkle Energie“ [wirkt wie Materie mit konstanter Dichte und neg. Druck]}$$

Ω_q : Krümmungsterm

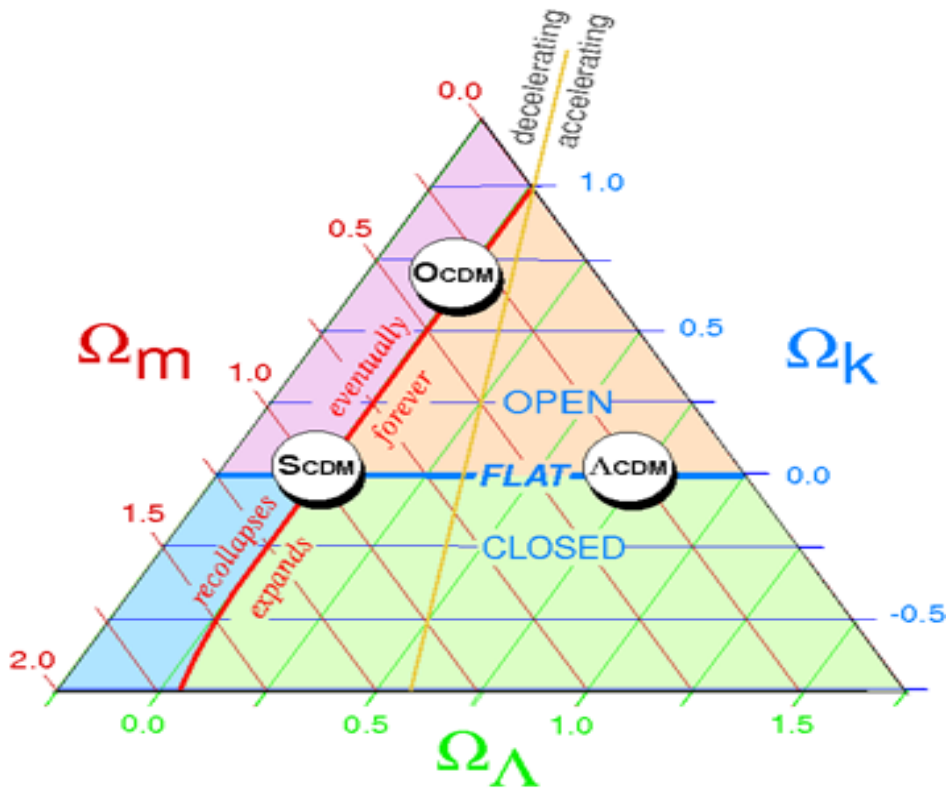
$$\text{zu 1.: } \Omega_q > 0 \triangleq \text{offenes Universum}$$

$$\Omega_q < 0 \triangleq \text{geschlossenes Universum}$$

$$\text{zu 2.: } \Omega_\Lambda > 0 \text{ (näherungsweise): } \begin{cases} \text{unendliche Expansion} \\ \text{Kollaps ist möglich} \end{cases}$$

zu 3.: $\Omega_q = 0 \triangleq \text{flacher Raum}$

1. Modelle:



Standard Cold Dark Matter: S_{CDM}

$$\Omega_m = 1, \Omega_\Lambda = \Omega_q = 0$$

↑
zu hoch

- Open Cold Dark Matter: O_{CDM}

$$\left. \begin{array}{l} \Omega_m \approx \frac{1}{3} \text{ (niedrige Massendichte)} \\ \Omega_\Lambda = 0 \text{ (keine "dunkle Energie")} \end{array} \right\} \Omega_q \approx \frac{2}{3} \text{ [Ausschluss durch Messung der} \\ \text{Hintergrundstrahlung } \Omega_q = 0]$$

- Modelle mit kosmologischer Konstante: Λ_{CDM}

$$\Omega_m \approx \frac{1}{3}, \Omega_q = 0 \Rightarrow \Omega_\Lambda \approx \frac{2}{3}: \text{„Dunkle Energie“}$$

Gibt es genug Masse für ein geschlossenes Universum?

Bestimmung von Ω_m (einschließlich der Dunklen Materie!)

Verschieden Beobachtungen führen alle auf $\Omega_m < 1$.

a) Masse/Licht Methode:

Erfordert Bestimmung der Masse großer Galaxienhaufen durch

- Bewegung der Galaxien innerhalb der Cluster
- Temperatur des intergalaktischen Gases
- Gravitationslinien-Effekte
[Objekte „hinter“ den Galaxiehaufen erscheinen doppelt]

$$\Rightarrow \Omega_m = 0,2 \pm 0,1$$

b) Bestimmung des Anteils baryonischer Materie

Urknallmodelle und beobachtete Verteilung der Nuklide

$$\Rightarrow \sigma_b \approx 3,5 \cdot 10^{-28} \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \approx 0,045 \sigma_{\text{crit}} \Rightarrow \sigma_b = 0,045 \quad \Omega_b \in \Omega_m$$

Damit: Bestimmung von $\frac{\Omega_b}{\Omega_m}$ liefert Ω_m

$$\frac{\Omega_b}{\Omega_m} = \frac{\text{Baryonische Massen eines Galaxiehaufens}}{\text{Gesamtmasse}} \approx 0,15$$

$$\Rightarrow \Omega_m \approx 0,3 \pm 0,1$$

Zusammenfassung aller Verfahren für Galaxiehaufen (Cluster):

$$\Omega_m \approx \frac{1}{3}$$

2. Ist die Expansion des Universums gebremst oder beschleunigt?

Erinnerung: Helligkeitsrotverschiebungs-Beziehung:

$$-2,5 \log \left(\frac{4\pi c^2}{I_0 H^2} S \right) = 5 \log Z + \underbrace{\frac{5}{2} \log(e)}_{1,086} (1 - b) Z$$

mit $Z = \frac{\lambda_1 - \lambda_0}{\lambda_0}$ Rotverschiebungsparameter

$b = -\frac{\ddot{a}}{H^2 a}$ Verzögerungsparameter

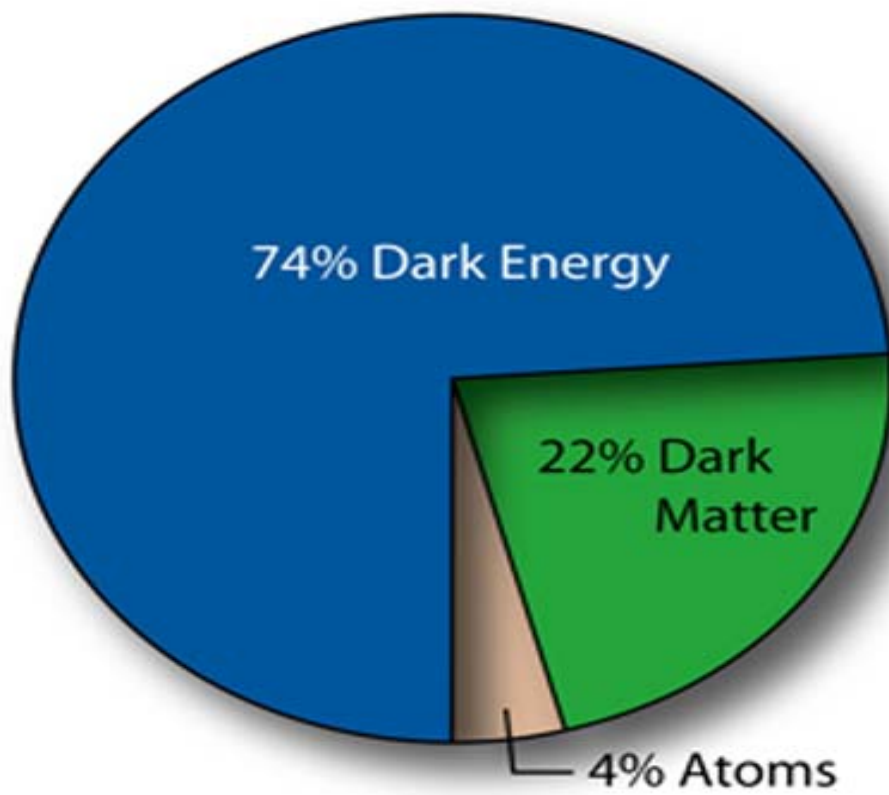
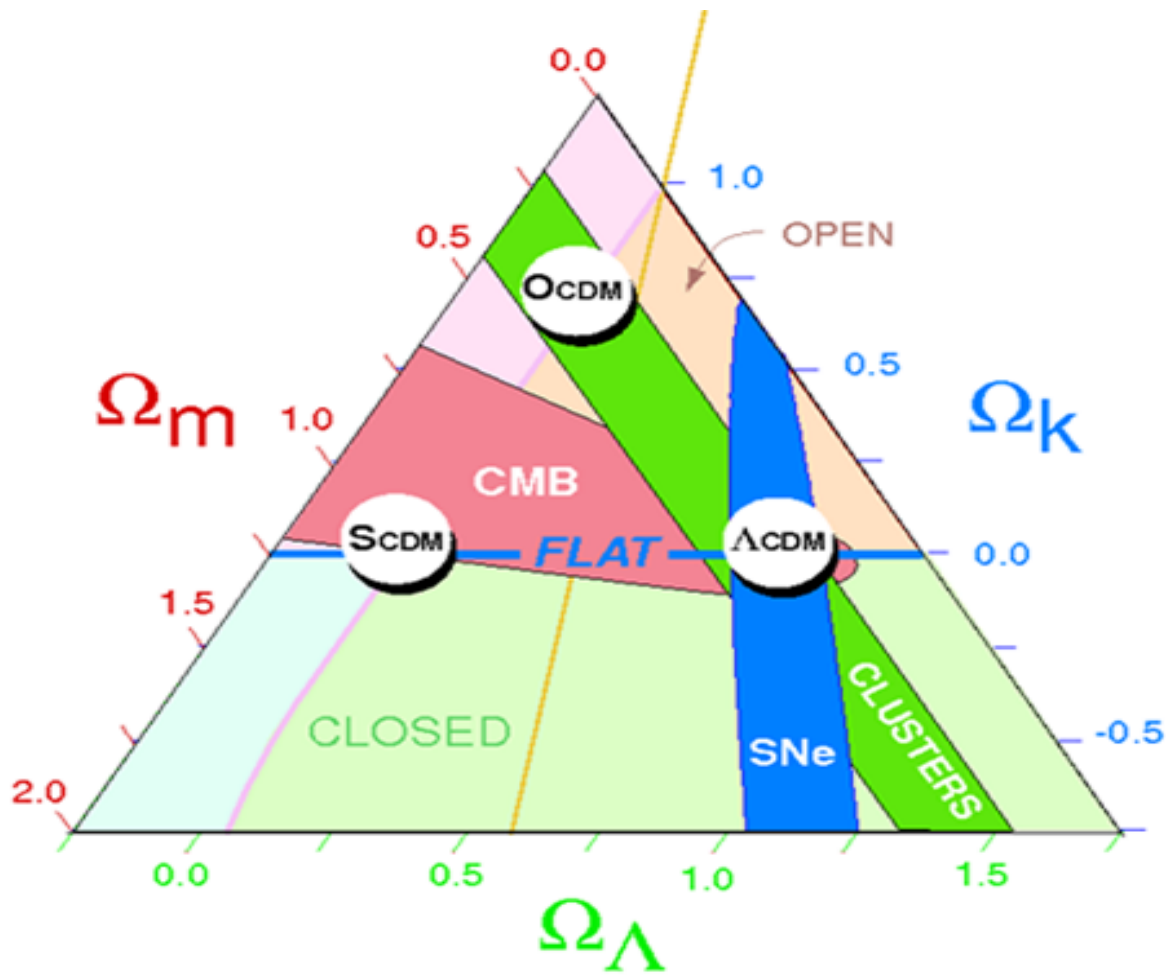
Absolute Helligkeit I_0 erforderlich. Bestimmung über „Standardkerzen“, Supernovae Typ Ia.

3. Diskussion: Kosmisches Dreieck

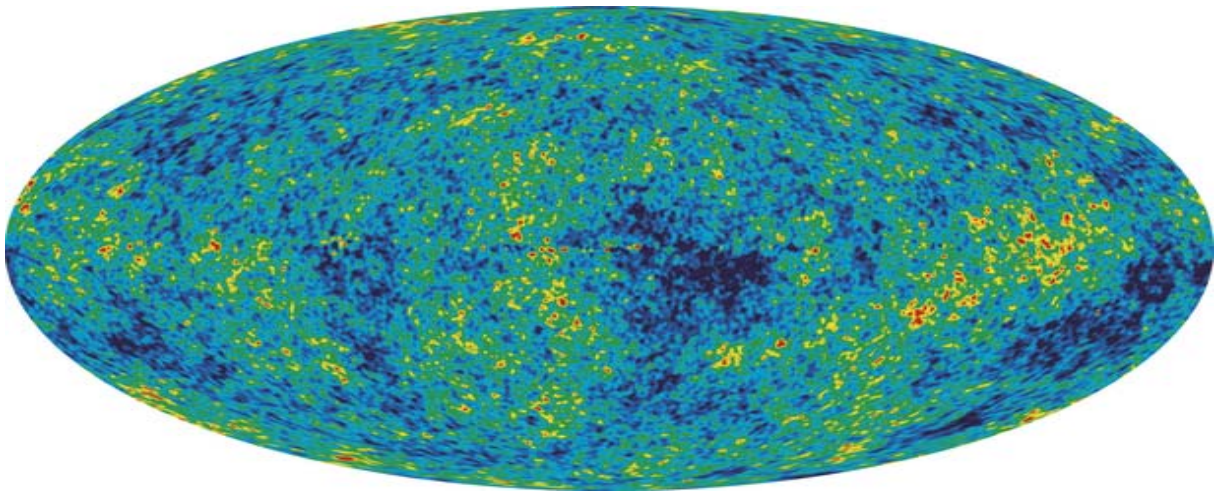
$$\left. \begin{array}{l} \Omega_\Lambda \approx \frac{2}{3} \\ \Omega_m \approx \frac{1}{3} \end{array} \right\} \text{ am Kreuzungspunkt (Cluster, Supernovae-Kosmologie Projekt SNe)}$$

$\Rightarrow \Omega_q \approx 0$: also am Kreuzungspunkt: Flacher Raum!

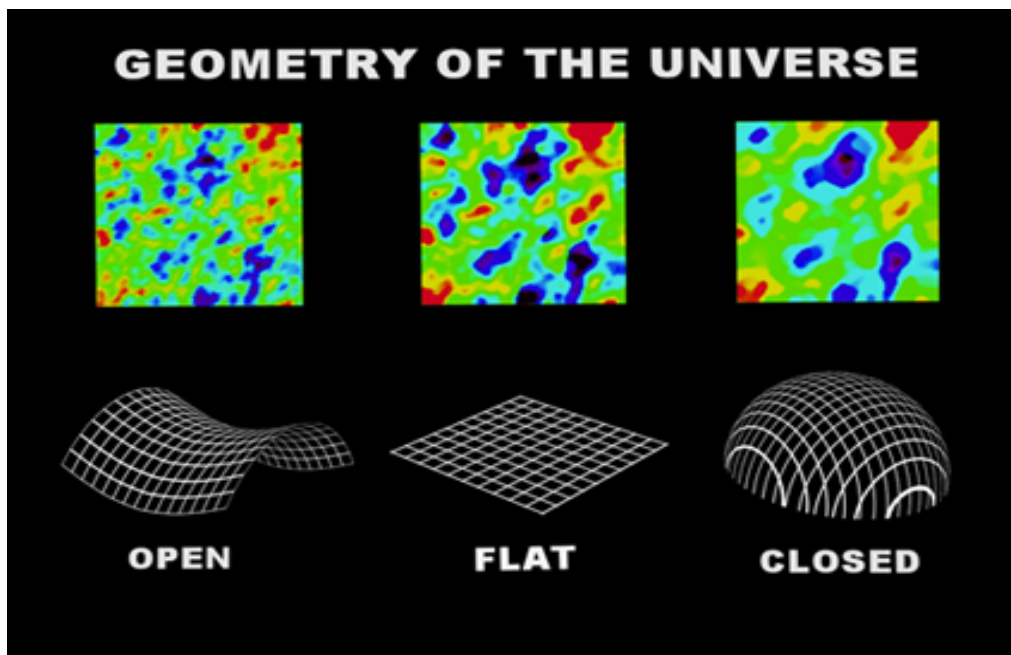
Frage: Lässt sich $\Omega_q \approx 0$ unabhängig bestimmen?



7.4.4. Anisotropie der kosmischen Hintergrundstrahlung



Das Bild zeigt die minimalen Schwankungen der Temperatur der Hintergrundstrahlung



„Akustische Oszillationen“: Qualitatives Bild:

Materie besteht aus: - dunkler Materie (unterliegt nur der Gravitation)
- Baryonische Materie (Gravitation und WW mit Strahlung)

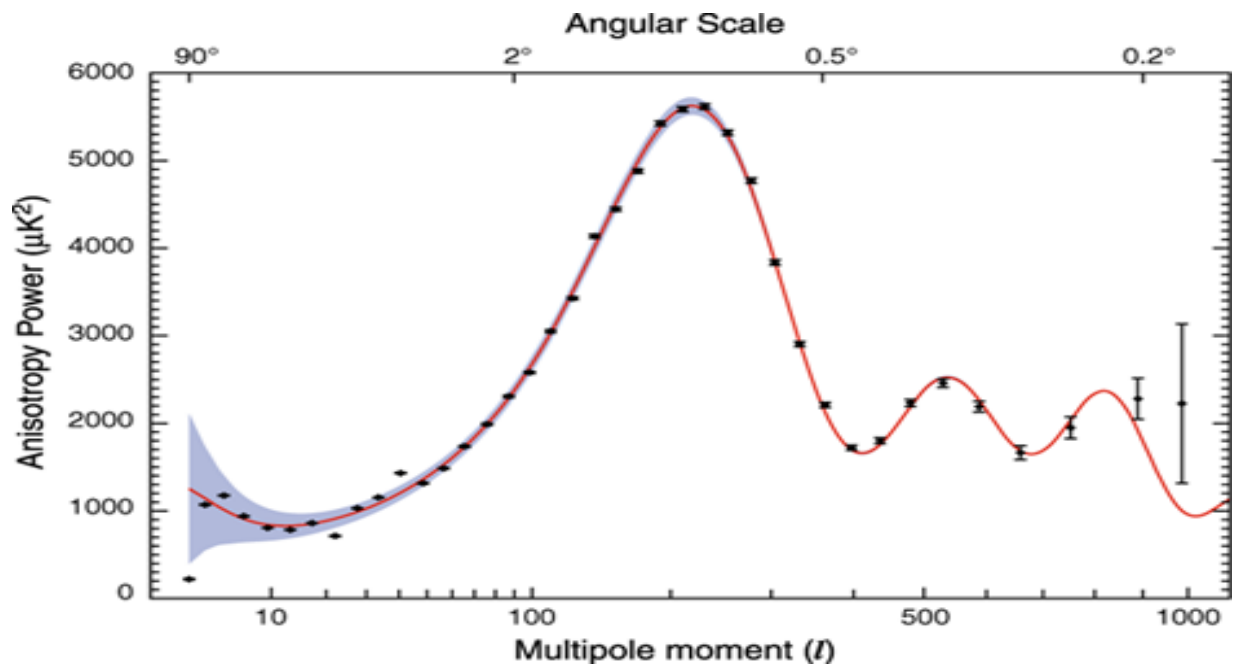
Nach der Inflation ist die Materie nicht absolut homogen verteilt, es gibt Anfangsfluktuationen.

Die baryonische Materie beginnt zu oszillieren. Mechanismus (vor der Entkopplung):

Durch Gravitation wird die baryonische Materie in Gebieten mit höherer Materie dunkler Materie hineingezogen. Bei zunehmender Dichte der Baryonen steigt dann der Photonendruck und bewirkt eine Abnahme der Baryonendichte.

Dichtestörungen breiten sich ähnlich wie Schallwellen aus (deswegen „akustische Oszillation“)

Der Mechanismus bricht zusammen bei der Entkopplung von Strahlung und Materie, die baryonische Materie unterliegt nur noch der Gravitation, die Photonen „behalten“ die Information (in Form der Temperatur) über die Dichte der Baryonen an ihrem Entstehungsort zum Zeitpunkt der Entkopplung (380.000 Jahre nach dem Urknall)



Siehe hierzu:

<http://space.mit.edu/home/tegmark> und dort CMB movies

8. Gravitationswellen

Näherung: Betrachtung kleiner Störungen der Raum-Zeit => Linearisierung der Folgegleichungen. Rückwirkung der Energie der Wellen auf die Raum-Zeit werden vernachlässigt: Behandlung der linearisierten Feldgleichungen erfolgt analog zu elektromagnetischen Wellen in der Elektrodynamik.

1. Linearisierung der Feldlinien (Schwachfeldnäherung)

$$\text{Feldgleichung: } R_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}^* \quad \text{mit } T_{\mu\nu}^* = T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} T g_{\mu\nu}$$

Metrik für flache Raum-Zeit mit kleinen Störungen:

$$g_{\mu\nu} = \underbrace{\eta_{\mu\nu}}_{SRT} + \underbrace{h_{\mu\nu}}_{\text{symmetrisch}} \quad \text{mit } |h_{\mu\nu}| \ll 1 \text{ und } |\partial_\lambda h_{\mu\nu}| \ll 1$$

⇒ Christoffel-Symbole:

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mu\nu}^\lambda &= \frac{1}{2} \eta^{\alpha\kappa} \left(\frac{\partial h_{\kappa\mu}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial h_{\nu\kappa}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial h_{\mu\nu}}{\partial x^\kappa} \right) + O(h^2) \\ &= \frac{1}{2} (\partial_\nu h_\mu^\lambda + \partial_\mu h_\nu^\lambda - \partial^\lambda h_{\mu\nu}) = O(h) \end{aligned}$$

⇒ Ricci-Tensor:

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} &= \partial_\lambda \Gamma_{\mu\nu}^\lambda - \partial_\nu \Gamma_{\lambda\mu}^\lambda + O(h^2) \quad [\Gamma_{\cdot\cdot} \cdot \Gamma_{\cdot\cdot} = O(h^2)] \\ &= \frac{1}{2} \left(\cancel{\partial_\lambda \partial_\nu h_\mu^\lambda} + \partial_\lambda \partial_\mu h_\nu^\lambda - \underbrace{\partial_\lambda \partial^\lambda h_{\mu\nu}}_{\equiv \square = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta} - \partial_\nu \partial_\mu h_\lambda^\lambda - \cancel{\partial_\lambda \partial_\nu h_\mu^\lambda} \right) \\ &= -\frac{1}{2} (\square h_{\mu\nu} - \partial_\lambda \partial_\mu h_\nu^\lambda - \partial_\lambda \partial_\nu h_\mu^\lambda + \partial_\mu \partial_\nu h_\lambda^\lambda) \end{aligned}$$

Damit ergibt sich die linearisierte Feldgleichung zu: $R_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}^*$

$$\boxed{-\square h_{\mu\nu} + \partial_\mu (\partial_\lambda h_\nu^\lambda - \frac{1}{2} \partial_\nu h_\lambda^\lambda) + \partial_\nu (\partial_\lambda h_\mu^\lambda - \frac{1}{2} \partial_\mu h_\lambda^\lambda) = \frac{16\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}^*}$$

Es gibt Freiheit bei der Wahl des Koordinatensystems (solange die Form $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ erhalten bleibt). Gesucht: Koordinaten in denen die Feldgleichungen möglichst einfach werden [(...) in den Feldgleichungen sollen verschwinden].

$$\begin{aligned} \partial_\lambda h_\nu^\lambda - \frac{1}{2} \partial_\nu h_\lambda^\lambda &= 0 \quad \text{„Eichbedingung“, vgl. E-dynamik } A^\mu \text{ in Lorentzzeichnung} \\ \partial_\mu A^\mu &= 0 \end{aligned}$$

(Freiheit bei Wahl des Koordinatensystems in der ART \triangleq Eichfreiheit für die Potentiale in der Elektrodynamik)

Koordinatentransformation: $x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \epsilon^\mu(x)$ mit $|\partial_\nu \epsilon^\mu| \ll 1$ (aber ϵ beliebig groß)

⇒ $g'_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h'_{\mu\nu}$ mit Schwachfeldnäherung

$$\text{für } h'_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \underbrace{\partial_\mu \epsilon_\nu - \partial_\nu \epsilon_\mu}_{O(h)}$$

Konkrete Wahl: Harmonische Koordinaten definiert durch

$$g^{\mu\nu} \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \equiv \Gamma^\lambda = 0$$

Es gilt:

$$g^{\mu\nu}\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = (\eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu}) \frac{1}{2} (\partial_\nu h_\mu^\lambda + \partial_\mu h_\nu^\lambda - \partial^\lambda h_{\mu\nu})$$

$$= \frac{1}{2} (\partial^\mu h_\mu^\lambda + \partial_\mu h^{\lambda\mu} - \partial^\lambda h_\mu^\mu) = \partial_\mu h^{\lambda\mu} - \frac{1}{2} \partial^\lambda h_\mu^\mu$$

λ herunterziehen und umbenennen:

=> Die harmonischen Koordinaten erfüllen die Eichbedingungen!

Ohne Beweis: Harmonische Koordinaten lassen sich immer einführen mit ϵ^λ gegeben durch

$$\square \epsilon^\lambda = \Gamma^\lambda \quad \text{(ungestrichenes) altes Koordinatensystem}$$

2. Lösung der linearisierten Feldgleichung

In harmonischen Koordinaten: $\square h_{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}^*$

Analogie zur Elektrodynamik: $A^\mu = \frac{4\pi}{c} j^\mu$ ← Viererstrom

$\frac{1}{\mu_0}$

↙ Elektrodyn. Potentiale in Lorentz-Eichung

$T_{\mu\nu}^*$: Quellen für die Erzeugung von Gravitationswellen

Gravitationswellen breiten sich mit Lichtgeschwindigkeit aus.

a) Retardierte Lösung der inhomogenen Gleichung:

$$h_{\mu\nu}(\vec{x}, t) = \frac{4G}{c^4} \int \frac{T_{\mu\nu}^* \left(\vec{x}', t - \frac{|\vec{x} - \vec{x}'|}{c} \right)}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3 x'$$

b) Lösung der homogenen Gleichung (Ausbreitung der Gravitationswellen im Vakuum)

$$\square h_{\mu\nu} = 0 \text{ mit } \partial_\mu h_\nu^\mu - \frac{1}{2} \partial_\nu h_\mu^\mu = 0;$$

Ansatz: $h_{\mu\nu}(\vec{x}, t) = \underbrace{e_{\mu\nu}}_{\text{Amplitudentensor (16 Parameter)}} e^{ik_\lambda x^\lambda} + e_{\mu\nu}^* e^{-ik_\lambda x^\lambda}$ (16+4=20 Parameter)

Amplitudentensor (16 Parameter)

Einsetzen: $\square k_{\mu\nu} = \partial_\lambda \partial^\lambda h_{\mu\nu} = -k_\lambda k^\lambda h_{\mu\nu} = 0 \Rightarrow k_\mu k^\mu = 0$ k_μ lichtartig

Eichbedingungen: $k_\mu e_\nu^\mu - \frac{1}{2} k_\nu e_\mu^\mu = 0$ (4 Bedingungen) } 6 Freiheitsgrade für $e_{\mu\nu}$

$k_{\mu\nu}$ symmetrisch => $e_{\mu\nu} = e_{\nu\mu}$ (6 Bedingungen)

Weitere Ausnutzung der Freiheiten bei der Wahl der Koordinaten (innerhalb der bereits gewählten harm. Koordinaten): TT- Eichung (transversal und traceless)

$\underbrace{e_\mu^\mu}_{\text{spur}} = 0; e_0^\mu = 0; e_i^\mu = 0$ für GW in Richtung \vec{e}_i (1)

Ausbreitung der Gravitationswellen in z- Richtung: $k_\mu = \frac{\omega}{c} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow k_\mu x^\mu = \omega t - \underbrace{k}_{\frac{\omega}{c}} z$$

Damit in TT-Eichung:

$$e_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e_{11} & e_{12} & 0 \\ 0 & e_{12} & -e_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{nur 2 Freiheitsgrade } e_{11} \text{ und } e_{22}) \text{ aus (1)}$$

Zwei Polarisationsensoren (für lineare Polarisation):

$$e_{\mu\nu}^+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; e_{\mu\nu}^x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$k_{\mu\nu}(\vec{x}, t) = (A^+ e_{\mu\nu}^+ + A^x e_{\mu\nu}^x) e^{i(\omega t - \frac{\omega}{c} z)} + \text{komp. konjugierte}$$

Setze: $h = A^+ \cos(\omega t - \frac{\omega}{c} z)$
 $k = A^x \cos(\omega t - \frac{\omega}{c} z)$

Wegelement: $ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 + h(dx^2 - dy^2) + 2k dx dy$

Betrachtung Raumdrehung um Achse in Ausbreitungsrichtung (z-Achse)

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} h' \\ k' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & -\sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & \cos 2\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$$

$z = z'$ und $t = t'$

h und k (und damit die Polarisation der GW) drehen sich doppelt so schnell wie das Koordinatensystem. Man sagt, die GW besitzt die Helizität 2.

3. Teilchen im Feld einer GW

Frage: Wirkung einer GW (in z-Richtung) auf „ruhendes“ Teilchen
Geodätengleichung:

$$\frac{d^2 x^\sigma}{d\tau^2} = \Gamma_{\mu\nu}^\sigma \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0$$

Zum Zeitpunkt $\tau = 0$ ruhendes Teilchen: $\frac{dx^i}{d\tau} = 0$

Damit: $\frac{d^2 x^\sigma}{d\tau^2} + \underbrace{\Gamma_{00}^\sigma}_{\text{...}} \frac{dx^0}{d\tau} \frac{dx^0}{d\tau} = 0 \Rightarrow \frac{d^2 x^\sigma}{d\tau^2} = 0 \Rightarrow x^i(\tau) = \text{const.}$

$$\frac{1}{2} (\partial_0 \underbrace{h_{00}^\sigma}_{=0} + \partial_0 \underbrace{h_{00}^\sigma}_{=0} - \partial^\sigma \underbrace{h_{00}}_0)$$

Die Koordinaten des Teilchens bleiben konstant. Aber: Die Abstände Δl zwischen den Teilchen ändern sich aufgrund der Zeitabhängigkeit der Metrik.

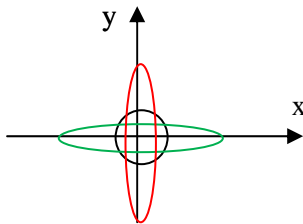
$$(\Delta l)^2 = -(\Delta s)^2 = (1 - h)\Delta x^2 + (1 + h)\Delta y^2 - 2k\Delta x\Delta y$$

Beispiel: Teilchen auf Kreis in (x,y)-Ebene: $\begin{cases} x = R \cos \varphi \\ y = R \sin \varphi \end{cases}$

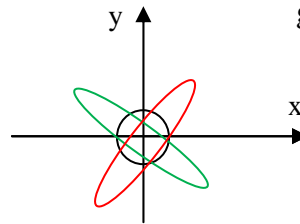
Abstände zum Ursprung:

$$\begin{aligned} (\Delta l)^2 &= (1 - h)R^2 \cos^2 \varphi + (1 + k)R^2 \sin^2 \varphi - 2kR^2 \sin \varphi \cos \varphi \\ &= R^2(1 - h \cos 2\varphi - k \sin 2\varphi) \end{aligned}$$

Polarisation + (k=0)



Polarisation x (h=0): wie + aber um $\varphi = \frac{\pi}{4}$ gedreht



Bei beiden ist $\omega t = 0$; $\omega t = \frac{\pi}{2}$; $\omega t = \pi$

4. Die Quadropolnähungen

Retardierte Lösung der inhomogenen Feldgleichungen

$$h_{\mu\nu}(\vec{x}, t) = \frac{4G}{c^4} \int d^3x' \frac{T_{\mu\nu}^*(\vec{x}', t - \frac{|\vec{x} - \vec{x}'|}{c})}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$$

Sei R die Ausdehnung zur Quelle mit Schwerpunkt bei $\vec{x} = 0$.

Annahme:

Für die Geschwindigkeit der Quelle gelte $v \ll c \Rightarrow R \ll \lambda$ (Wellenlänge der GW)
Dann lässt sich $h_{\mu\nu}(\vec{x}, t)$ für $|\vec{x}| = r \gg \lambda \gg R$ (Fernfeld) in eine Multipolreihe entwickeln

Ergebnis:

- kein Monopolterm (analog zur E-Dyn.)
- keinen Dipolterm (im Gegensatz zur E-Dyn.)
- Niedrigste nicht verschwindender Term ist der Quadropolterm

$$h_{jk}(\vec{x}, t) = \frac{2G}{c^6 r} \frac{d^2}{dt^2} I_{jk}(t - \frac{v}{c}) \quad \text{mit } I_{jk} = \int T^{00} \left(x^j x^k - \frac{1}{3} \delta_{jk} r^2 \right) d^3x$$

Das reduzierte Quadropolmoment der Quelle

Die Quadropolnähung erlaubt Berechnung der Energieabstrahlung durch GW.