Skript zur Vorlesung

Spezielle Relativitätstheorie

gelesen von: Apl. Prof. Dr. rer. nat. Jörg Main

Skript von : Michael Klas

Inhaltsverzeichnis

1. Einführung

Fundamentale Begriffe in der Physik: Raum und Zeit
3 Raum- und eine Zeitdimension sind uns vertraut

Unsere (klassische) Vorstellung:

Jeder Raumpunkt beschreibbar durch Koordinaten $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ in einem (beliebig) gewählten Koordinatensystem. Jeder Zeitpunkt beschreibbar durch eine Zeit t relativ zu einem gewählten Zeitnullpunkt. (z.B. Greenwich-Zeit)

1.1. Physik in dieser Raum-Zeit

1.1.1. Klassische Newtonsche Mechanik

Bewegung eines Punktteilchens mit Masse m:

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\ddot{\vec{x}} \;\rightarrow\; \ddot{\vec{x}}(t) = \frac{1}{m}F(x,t) \rightarrow Bahnkurve\ x(t)$$

Die Gesetze der Newtonschen Mechanik gelten in jedem Inertialsystem (≙unbeschleunigtes System)
Wechsel des Inertialsystems in ein mit Geschwindigkeit $\vec{v}$ beschleunigtes System:

$$\vec{x} \rightarrow \vec{x}' = \vec{x} - \vec{v}t$$

Allgemeinste mögliche Transformation zwischen Inertialsystemen:

Galilei-Transformation:

$\vec{x}' = \underline{\underline{D}}\vec{x} - \vec{v}t - \vec{x}_0$
$t' = t - t_0$

$\underline{\underline{D}}$ = Drehmatrix orthogonal
$\vec{v}$ = Relativgeschwindigkeit zwischen den Inertialsystemen
$\vec{x}_0, t_0$= Verschiebung des Ursprungs
bilden eine 10-parametrige Gruppe

$$\boxed{\text{Klassische Mechanik ist invariant unter der Galilei-Transformation}}$$

1.1.2. Elektrodynamik

Grundgleichungen der Elektrodynamik sind die Maxwellschen Gleichungen

$$\frac{1}{\mu_0}\nabla x\vec{B} - \epsilon_0\dot{\vec{E}} = \vec{j}$$

$$\nabla x\vec{E} + \dot{\vec{B}} = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0}\rho$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

Maxwellsche Gl. ist ein DGL-System zur Bestimmung der elektrischen und magnetischen Felder $\vec{E}(\vec{x},t), \vec{B}(\vec{x},t)$ bei gegebener Verteilung der elektrischen Ladungen und Ströme $\rho(\vec{x},t), \vec{j}(\vec{x},t)$

Mögliche Lösungen sind statische Felder (Elektrostatik, Magnetostatik) oder elektromagnetische Wellen, die sich im Vakuum mit der Geschwindigkeit $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = 299.792.458 \frac{m}{s}$ ausbreiten.

Problem: Die Maxwellschen Gleichungen sind nicht invariant unter Galilei-Transformation.

Betrachte Ausbreitung einer ebenen elektromagnetischen Welle in x-Richtung. In einem bewegten System mit $\vec{x}' = \vec{x} - v\,\vec{e}_x t$ breitet sich die Welle mit der Geschwindigkeit $c' = c + v \neq c$ aus.
Diese Welle mit der Geschwindigkeit c‘ ist keine Lösung der Maxwellschen Gleichungen.

Was ist die Konsequenz?

Möglichkeit 1: (falsch)
Die Maxwellschen Gleichungen gelten nicht in beliebigen sondern nur in einem ausgezeichneten Inertialsystem.
Experimente zeigen:
Es gibt keinen „Weltäther“. Die Maxwellschen Gleichungen gelten in jedem Inertialsystem. Die Vakuum-Lichtgeschwindigkeit ist in allen Inertialsystemen gleich.

Möglichkeit 2: (wahr)
Die Maxwellschen Gleichungen gelten in allen Inertialsystemen, aber der Wechsel zwischen Inertialsystemen erfolgt nicht über die Galilei-Transformation!

2. Lorentztransformation

Bereits vor Einstein war bekannt, dass die Maxwellschen Gleichungen invariant unter der Lorentztransformation sind.

„Herleitung“ (Motivation) der Lorentztransformation:

Wir gehen aus von einem Spezialfall der Galilei-Transformation: $\overline{\overline{D}} = E, \vec{v} = v\vec{e}_x, \vec{x}_0 = t_0 = 0$
Daraus ergibt sich: $\vec{x}' = \vec{x} - \vec{v}t,\ y' = y,\quad z' = z,\quad t' = t$

Betrachtet man nun einen im Raum-Zeit-Ursprung $(\vec{x}_0 = 0, t_0 = 0)$startenden Lichtstrahl so muss gelten:

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2 \qquad \text{und} \qquad x'^2 + y'^2 + z'^2 = \underbrace{c^2}_{\text{Lichtgeschwindigkeit konstant}} t'^2$$

Also: $x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2 \stackrel{!}{=} x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2$

Galilei: $x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2 = (x - vt)^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 - \underbrace{2xvt + v^2 t^2}_{\text{Versuch: Term beseitigen durch Transformation der Zeit}}$

Ansatz: (1.Versuch)

$$x' = x - vt; y' = y; z' = z; t' = t - \alpha$$

Einsetzen der Transformation:

$$x'^2+y'^2+z'^2-c^2t'^2 = x^2+y^2+z^2\underbrace{-2xvt+v^2t^2+2\alpha tc^2-c^2\alpha^2}-c^2t^2$$

Setze $\alpha = \frac{xv}{c^2}$

➔ $\underline{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}x^2+y^2+z^2+\underline{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}c^2t^2$

Faktoren beseitigen!

Ansatz: (2.Versuch)

$$x' = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}(x-vt);\ y'=y\,;z'=z$$
$$t' = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\left(t-\frac{xv}{c^2}\right)$$

Dies ist die Spezielle Lorentz-Transformation. Wenn man sie einsetzt passt die Transformation.

Bemerkungen:

1. Für $v \ll c$ geht die Lorentz-Transformation (LT) in die Galilei-Transformation (GT) über.
2. Die Größe $s^2 := x^2+y^2+z^2-c^2t^2$ ist invariant unter LT.
3. Die Formeln für die spezielle LT gelten analog auch für $v = v\vec{e}_y$ und $v = v\vec{e}_z$.
4. Die Maxwellschen Gleichungen sind invariant unter LT. In der Notation wie oben wird diese Invarianz nicht deutlich. Die Gleichungen lassen sich aber auf eine mathematisch sehr elegante Form bringen (→Kovariante Formulierung der Elektrodynamik) bei der die Lorentz-Invarianz klar zu erkennen ist.

Definitionen und Schreibweisen der SRT:

$\beta = \frac{v}{c}$ und $\gamma = \frac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$

Zusammenfassung von Ort und Zeit zu 4-dimensionaler Raum-Zeit:

$x^0 = ct;\ \ x^1 = x;\ \ x^2 = y;\ \ x^3 = z$ $x^\mu \in \mathbb{R}^4$ mit $\mu = 0,1,2,3$:Vierervektor

$$\left.\begin{aligned} t' &= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\left(t-\frac{v}{c^2}x\right) \\ x' &= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}(x-vt) \\ y' &= y \\ z' &= z \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} x^{0\prime} &= \gamma(x^0-\beta x^1) \\ x^{1\prime} &= \gamma(x^1-\beta x^0) \\ x^{2\prime} &= x^2 \\ x^{3\prime} &= x^3 \end{aligned}$$

Die LT ist eine lineare Transformation in den Raum-Zeit-Koordinaten:

$$\begin{pmatrix} x^{0\prime} \\ x^{1\prime} \\ x^{2\prime} \\ x^{3\prime} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}; \qquad (x^\mu)' = \Lambda x^\mu$$

Die anderen LT erhält man durch Vertauschung der entsprechenden Indizes. Also bei einer Transformation in y Richtung sind $\Lambda_{13} = \Lambda_{31} = -\beta\gamma$ und $\Lambda_{11} = \Lambda_{33} = \gamma$ und die anderen Diagonalelemente 1.

Es gilt wenn D eine Drehmatix ist:
$D^t D = D D^t = E$

Die LT lassen sich miteinander verknüpfen, wobei dann die Hintereinanderausführung der LTs einer Matrixmultiplikation entspricht.

Beispiel:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{v_x}{v} & -\frac{v_y}{v} & 0 \\ 0 & \frac{v_y}{v} & \frac{v_x}{v} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{Drehung}} \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{v_x}{v} & \frac{v_y}{v} & 0 \\ 0 & -\frac{v_y}{v} & \frac{v_x}{v} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma\frac{v_x}{v} & -\beta\gamma\frac{v_y}{v} & 0 \\ -\beta\gamma\frac{v_x}{v} & 1+(1+\gamma)\frac{v_x^2}{v^2} & (\gamma-1)\frac{v_x v_y}{v^2} & 0 \\ -\beta\gamma\frac{v_y}{v} & (\gamma-1)\frac{v_x v_y}{v^2} & 1+(\gamma-1)\frac{v_y^2}{v^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

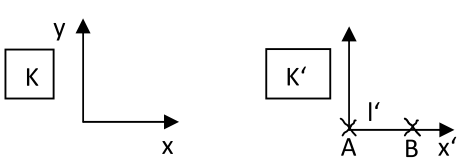
Die Elektrodynamik transformiert mit der Lorenz-Transformation.
Transformiert dann die Klassische Mechanik mit der Galilei-Transformation? Nein!

Einsteins Verdienst:
Die Erkenntnis, dass LT nicht auf E-Dynamik beschränkt ist, sondern eine Allgemeine Eigenschaft von Raum und Zeit ist.
Die (mit der LT verbundenen) uns vertrauten Eigenschaften von Raum und Zeit (z.B. Existenz einer absoluten Zeit) gelten in der Relativitätstheorie nicht mehr.

2.1. Revolutionäre Konsequenzen aus der Lorentz-Transformation

2.1.1. Lorentz-Kontraktion bewegter Maßstäbe

Wir betrachten zwei Koordinatensysteme K und K‘, die sich relativ zueinander mit der Geschwindigkeit $\vec{v} = v\,\vec{e}_x$ bewegen.



$$x'_A = 0 \overset{!}{=} \gamma(x_A - vt) \Rightarrow x_A(t) = vt$$

$$x'_B = l' \overset{!}{=} \gamma(x_B - vt) \Rightarrow x_B(t) = \frac{l'}{\gamma} + vt$$

In K ergibt sich der Abstand zwischen beiden Punkten zu $l = x_B(t) - x_A(t)$

$$= \frac{1}{\gamma} l' = \underbrace{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}_{\leq 1} l' < l'$$

Längenkontraktion:

Bewegte Maßstäbe erscheinen in Bewegungsrichtung um den Faktor $\frac{1}{\gamma} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ verkürzt.

2.1.2. Bewegte Uhren: Zeitdilatation

Wir positionieren 2 baugleiche Uhren im Koordinatenursprung von K und K‘. In K‘ ruhende Uhr zeigt Zeit t‘ am Ort x‘=0.
Im System K bewegt sich diese Uhr mit der Geschwindigkeit v:

$$x' = 0 \overset{\text{LT}}{\overset{!}{=}} \gamma(x - vt) => x(t) = vt$$

$$t' =^! \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right) = \gamma\left(t - \frac{v^2}{c^2}t\right) = \frac{1-\frac{v^2}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}t = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\, t < t'$$

Zeitdilatation: Bewegte Uhren gehen langsamer.

Beispiel: Bewegte Elementarteilchen
Viele Elementarteilchen haben (in ihrem Ruhesystem) eine kurze mittlere Lebensdauer (z.B. $\mu^-: \tau = 2 \cdot 10^{-6} s$). Ohne Zeitdilatation: Mittlere Reichweite maximal $c \cdot \tau = 600m$. Mit Zeitdilatation: Mittlere Reichweite maximal: $c_\gamma \tau = 6km\ bei\ v = 0{,}995c$
In Teilchenbeschleunigern haben kurzlebige Teilchen (in ihrem Ruhesystem) eine lange Lebensdauer → Zwillingsparadoxon

2.1.3. Verlust der Gleichzeitigkeit

Betrachte 2 Systeme K und K‘. In K‘ mögen 2 Ereignisse gleichzeitig stattfinden.
„Ereignis“ gegeben durch Ort und Zeit (Vierervektor)

$P_1: (x_1', t')$ wobei $x_1' \neq x_2'$
$P_2: (x_2', t')$

Uns interessieren die Zeitkoordinaten in K

$$t'_{(1,2)} \overset{\text{LT}}{=} \gamma\left(t_1 - \frac{v}{c^2}x_1\right) = \gamma\left(t_2 - \frac{v}{c^2}x_2\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} x_1' \overset{\text{LT}}{=} \gamma(x_1 - vt_1) => x_1 = \frac{1}{\gamma}x_1' + vt_1 \\ x_2' = \gamma(x_2 - vt_2) => x_2 = \frac{1}{\gamma}x_2' + vt_2 \end{array}\right\} t' = \gamma t_1 - \frac{v}{c^2}x_1' - \gamma\frac{v^2}{c^2}t_1$$

$$= \frac{1}{\gamma}t_1 - \frac{v}{c^2}x_1'$$

$$= \frac{1}{\gamma}t_2 - \frac{v}{c^2}x_2'$$

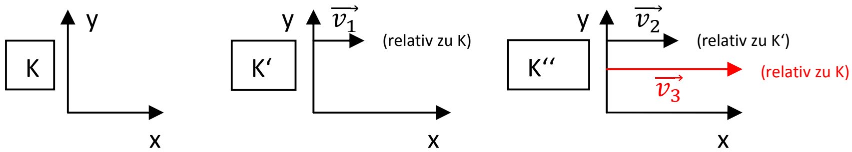
$$\underbrace{\left.\begin{array}{l} t_1 = \gamma\left(t' + \frac{v}{c^2}x_1'\right) \\ t_2 = \gamma\left(t' + \frac{v}{c^2}x_2'\right) \end{array}\right\}}_{\text{Inverse LT}} \quad t_2 - t_1 = \gamma\frac{v}{c^2}\,(x_2' - x_1') \neq 0$$

Inverse Lorentz-Transformation:

$$x = \gamma(x' + vt')$$
$$t = \gamma\left(t' + \frac{v}{c^2}x'\right) \qquad y = y' \qquad z = z'$$

$$\Lambda^{-1} = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2.1.4. Additionstheorem der Geschwindigkeiten



Wie bewegt sich das System K'' relativ zum System K?
Galilei: $v_3 = v_1 + v_2$
SRT: $\Lambda_3 = \Lambda_2 \Lambda_1$

$$\Lambda_3 = \begin{pmatrix} \gamma_2 & -\beta_2\gamma_2 \\ -\beta_2\gamma_2 & \gamma_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \gamma_1 & -\beta_1\gamma_1 \\ -\beta_1\gamma_1 & \gamma_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_1\gamma_2(1+\beta_1\beta_2) & -\gamma_1\gamma_2(\beta_1+\beta_2) \\ -\gamma_1\gamma_2(\beta_1+\beta_2) & \gamma_1\gamma_2(1+\beta_1\beta_2) \end{pmatrix}$$
$$\overset{!}{=} \begin{pmatrix} \gamma_3 & -\beta_3\gamma_3 \\ -\beta_3\gamma_3 & \gamma_3 \end{pmatrix}$$

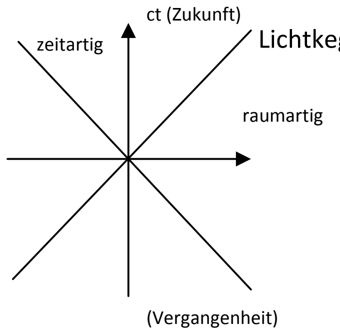
$$\Rightarrow \quad \gamma_3 = \gamma_1\gamma_2(1+\beta_1\beta_2) = \frac{1+\beta_1\beta_2}{\sqrt{1-\beta_1^2}\sqrt{1-\beta_2^2}} = \frac{1+\beta_1\beta_2}{\sqrt{(1-\beta_1^2-\beta_2^2+\beta_1^2\beta_2^2+2\beta_1\beta_2-2\beta_1\beta_2)}}$$

$$= \frac{1+\beta_1\beta_2}{\sqrt{(1+\beta_1\beta_2)^2-(\beta_1+\beta_2)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\underbrace{\left(\frac{\beta_1+\beta_2}{1+\beta_1\beta_2}\right)}_{=\beta_3}^2}}$$

$\beta_3 = \frac{\beta_1+\beta_2}{1+\beta_1\beta_2}$ => Additionstheorem der Geschwindigkeit

$v_3 = \frac{v_1+v_2}{1+\frac{v_1 v_2}{c^2}}$ also bei $v_1 = v_2 = c \Rightarrow v_3 = c$
Dies ist gerade die Konstanz der Lichtgeschwindigkeit

2.2. Raum-Zeit-Diagramme



Lichtkegel: $x^2 + y^2 + z^2 = c^2t^2$

$s^2 \equiv c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2$

$s^2 > 0$: zeitartig

$s^2 = 0$: lichtartig

$s^2 < 0$: raumartig

Raumartige Punkte können nicht kausal verbunden sein (keine Signalausbreitung mit v>c möglich)

3. Konsequenzen der SRT

Längenkontraktion und Zeitdilatation widersprechen unseren gewohnten Vorstellungen. Kritiker haben versucht widersprüchliche Aussagen aus der Theorie zu gewinnen und sie so „ad absurdum“ zu führen.

3.1 Paradoxa der SRT

3.1.1. Das Stab-Rahmen-Paradoxon

Wir betrachten einen bewegten Stab der Länge l und einen ruhenden Rahmen mit der derselben Länge. Wegen der Längenkontraktion passt der Stab bequem in den Rahmen.

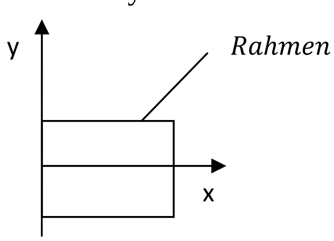
Kritiker: „Im Bezugssystem des Stabes erfährt der Rahmen eine Längenkontraktion. Der Stab passt nicht in den Rahmen. Widerspruch zur Beobachtung im Bezugssystem des Rahmens.“

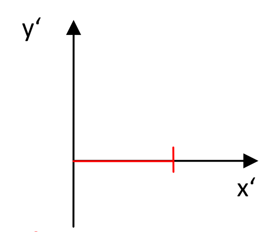
Sprechweise: „passt in den Rahmen“ entspricht Anfangs- und Endpunkt des Stabes befinden sich gleichzeitig innerhalb des Rahmens.

Stab bewegt sich mit der Geschwindigkeit $\vec{v}$ in x-Richtung

K: Ruhesystem des Rahmens

K‘: Ruhesystem des Stabes





$x_1 = 0$ $\quad x_2 = l \quad$ $x_{1,2}$: Anfangs-/Endpunkt des Rahmens $\qquad x'_A = 0 \quad x'_B = l$

Wir wählen den Zeitnullpunkt in K so, dass der Anfangspunkt zur Zeit t=0 den Anfangspunkt des Rahmens erreicht : $x_A(t=0)=0$

a) Wir betrachten das Geschehen im System K

Rahmen: $x_1(t)=0\,,x_2(t)=l$

Stab: $x'_A \overset{\text{LT}}{=} \gamma(x_A - vt) = 0 => x_A(t) = vt$

$x'_B \overset{\text{LT}}{=} \gamma(x_B - vt) = l => x_B(t) = \frac{1}{\gamma} l + vt$

Bei $t_1 = 0$ erreicht der Anfangspunkt des Stabes den Anfangspunkt des Rahmens.

$$x_B(t) = \frac{1}{\gamma} l + vt = x_2 = l \;\; => t = \frac{1}{v}\left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) l$$

Also erreicht der Endpunkt des Stabes bei $t_2 = \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right)\frac{l}{v} > 0$ den Endpunkt des Rahmens.

<u>Fazit</u>: Im Zeitintervall $t_1 = 0 < t < t_2 = \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right)\frac{l}{v}$ befindet sich der Stab vollständig innerhalb des Rahmens!

b) Wir betrachten das Geschehen im System K‘:

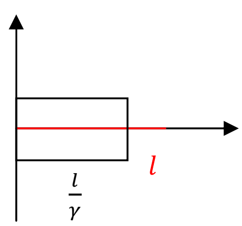
Stab: $x'_A(t') = 0\,, x'_B(t') = l$

Rahmen: $x_1 \overset{\text{Inv. LT}}{=} \gamma(x'_1 + vt') = 0 \;\; => x'_1(t') = -vt'$

$x_2 \overset{\text{Inv. LT}}{=} \gamma(x'_2 + vt') = l \;\; => x'_2(t') = \frac{1}{\gamma} l - vt'$

Bei $t'_1 = 0$ erreicht der Anfangspunkt des Rahmens (x'_1) den Anfangspunkt des Stabes(x'_A). Der Endpunkt des Rahmens befindet sich zu diesem Zeitpunkt bei $x'_2(t'_1 = 0) = \frac{1}{\gamma} l < l$. (durch die Längenkontraktion des <u>Rahmens</u>!)

Skizze zu diesem Zeitpunkt:



Der Endpunktes des Rahmens (x'_2) und Stabes (x'_B) treffen einander wenn:

$$x'_2(t'_2) = \frac{1}{\gamma} l - vt'_2 = x'_B = l \;\; => t'_2 = \underbrace{\left(\frac{1}{\gamma} - 1\right)}_{<0}\frac{l}{v} < 0$$

Es gilt: $t'_2 < t'_1$, also befindet sich der Stab zu keinem Zeitpunkt vollständig innerhalb des Rahmens.

Steht dies im Widerspruch zur Beobachtung im System K? Nein!

In K erreicht der Endpunkt des Stabes x_B den Punkt x_2 des Rahmens bei $t_2 = \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right)\frac{l}{v} > 0, x_2 = l$.

Wenn man dieses Ergebnis durch eine LT in K‘ überträgt ergibt sich:

$x_2' = \gamma(x_2 - vt_2) = \gamma l - (\gamma - 1)l = l$ (Position der Stabspitze in K, Endpunkt des Stabes)

$t_2' \overset{\text{LT}}{=} \gamma \left(t_2 - \frac{v}{c^2} x_2\right) = (\gamma - 1)\frac{l}{v} - \gamma \frac{v}{c^2} l = \left(\frac{1}{\gamma} - 1\right)\frac{l}{v} < 0$

Die Lösung des Paradoxons liegt in der Transformation der Zeit und dabei in einer möglichen Umkehr der zeitlichen Abfolge raumartiger Ereignisse.

LT

System K:
Ereignis 1: $x_A = x_1 = 0$ bei $t_1 = 0$
Ereignis 2: $x_B = x_2 = l$ bei $t_2 = \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right)\frac{l}{v} > t_1$

System K‘:
Die beiden Reeignisse vertauschen die zeitliche Abfolge
Ereignis 2: $x_2' = x_B' = l \; bei \; t_2' = \left(\frac{1}{\gamma} - 1\right)\frac{l}{v} < 0$
vor Ereignis 1: $x_1' = x_A'$ bei $t_1' = 0 > t_2'$

Wir zeigen nun, dass der Abstand der beiden Ereignisse raumartig ist.

„Abstand“ zwischen den beiden Ereignissen 1 und 2:

$(\Delta s)^2 = c^2(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 = c^2 \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right)^2 \left(\frac{l}{v}\right)^2 - l^2 = \cdots = -\frac{2}{\gamma+1} l^2 < 0$ => Abstand ist raumartig

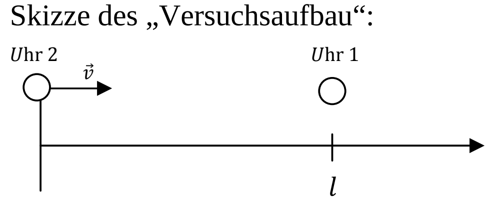
Das bedeutet, dass kein kausaler Zusammenhang zwischen den beiden Ereignissen besteht.

3.1.2 Das Uhrenparadoxon

Wir betrachen 2 (baugleiche) Uhren. Uhr 1 steht, Uhr 2 bewegt sich mit $\vec{v}$. Uhr 2 läuft langsamer als Uhr 1 (Zeitdilatation).

Kritiker: Im Ruhesystem von Uhr 2 bewegt sich Uhr 1 und erfährt eine Zeitdilatation, also Uhr 1 läuft langsamer als Uhr 2. Das ist doch ein Widerspruch.

Skizze des „Versuchsaufbau“:



System K: (Ruhesystem Uhr 1)
$x_1(t) = l$: Uhr 1 ruht bei $x_1 = l$
$x_2(t) = vt$: Uhr 2 bewegt sich mit v.

	Uhr 1 in K	Uhr 2 in K
E_1:	(x=l,t=0)	(x=0,t=0)

E_2: $(x=l, t = \frac{l}{v})$ $(x=l, t = \frac{l}{v})$

$\Delta t_1 = \frac{l}{v}$ =Anzeige Uhr 1 bei Kollision $\Delta t_2 = \frac{l}{v}$

$\xrightarrow{LT}$ $x' = \gamma(x - vt),\ t' = \gamma(t - \frac{x}{c^2} v)$

	Uhr 1 in K‘	Uhr 2 in K‘
E_1:	$(x' = \gamma l, t' = -\gamma \frac{vl}{c^2})$	(x‘=0, t‘=0)
E_2:	$(x' = 0, t' = \frac{1}{\gamma}\frac{l}{v})$	$(x' = 0, t' = \frac{1}{\gamma}\frac{l}{v})$
	$\Delta t_1' = \frac{1}{\gamma}\frac{l}{v} + \gamma\frac{vl}{c^2} = \gamma\frac{l}{v}$	$\Delta t_2' = \frac{1}{\gamma}\frac{l}{v}$ =Anzeige Uhr 2 bei Kollision

Auflösung des Widerspruchs: Der Zeitnullpunkt wird verschoben.

Zeitdilatation von Uhr 2 in K:

$$\frac{Eigenzeit\ der\ in\ K'\ ruhenden\ Uhr\ 2}{Zeitdifferenz\ der\ Ereignisse\ Uhr\ 2\ im\ System\ K} = \frac{\Delta t_2'}{\Delta t_2} = \frac{1}{\gamma} < 1$$
$$= \frac{\Delta t_2'}{\Delta t_1} = \frac{Anzeige\ von\ Uhr\ 2\ bei\ Kollision}{Anzeige\ von\ Uhr\ 1\ bei\ Kollision}$$

=> „bewegte Uhr geht langsamer“

Zeitsilatation von Uhr 1 in K‘:

$$\frac{Eigenzeit\ der\ in\ K\ ruhenden\ Uhr\ 1}{Zeitdiff.der\ Ereignisse\ Uhr\ 1\ im\ System\ K'} = \frac{\Delta t_1}{\Delta t_1'} = \frac{1}{\gamma} < 1$$: bewegte Uhr geht langsamer
$$\neq \frac{\Delta t_1}{\Delta t_2'} = \frac{Anzeige\ Uhr\ 1}{Anzeige\ Uhr\ 2} = \gamma$$

Die in K‘ vergangene Zeit zwischen den Ereignissen E_1 und E_2 ist nicht die von Uhr 2 angezeigte Zeit.

Welche Uhr schneller oder langsamer geht, hängt von der Wahl des Bezugssystems ab.

3.1.3 Zwillingsparadoxon

Ein Zwilling bleibt auf der Erde, der andere reist mit hoher Geschwingdigkeit und kehrt zur Erde zurück. Auf der Erde ist mehr Zeit vergangen als im Raumschiff

Paradoxon: Vom Raumschiff aus betrachtet bewegt sich der Zwilling auf der Erde mit hoher Geschwindigkeit, also Zeitdilatation auf der Erde.

Lösung: Start und Ende der Reise ist die Erde, diese ist das gewählte Bezugssystem, wobei im Raumschiff die Zeitdilatation auftritt.

4. Mathematische Formulierung der SRT

Es ist bereits bekannt:
Vierervektor: $x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z)$
Lorenztransfortmation:

$$x'^\mu = \sum_{\nu=0}^{3} \Lambda^\mu_\nu x^\nu \qquad \text{(Matrix-Vektor-Multiplikation)}$$

Fällt aufgrund der Einsteinschen Summenkonvention weg

Beispiel: $$\Lambda^\mu_\nu = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ spezielle LT mit $\vec{v} = v\vec{e}_x$

Es gilt: $c^2t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 = c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2$
bzw.: $(x'^0)^2 - (x'^1)^2 - (x'^2)^2 - (x'^3)^2 = (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2$

Bei postitiven Vorzeichen in der zweiten Gleichung: $\|x'\|^2 = \|x\|^2$ Erhaltung der Norm, dann:

Λ als Drehmatrix würde die Norm erhalten

4.1. Minkowski-Raum

Definition: Der Minkowski-Raum ist ein vierdimensionaler reeller Vektorraum mit folgendem Skalarprodukt:
Seien a^μ, b^μ Vierervektoren, so ist das Skalarprodukt gegeben durch:

$$\begin{aligned}(\vec{a}, \vec{b}) = \sum_{\mu=0}^{3} a_\mu b^\mu &= a_0 b^0 + a_1 b^1 + a_2 b^2 + a_3 b^3 \\ &= a^0 b^0 - a^1 b^1 - a^2 b^2 - a^3 b^3 \\ &= \eta_{\mu\nu} a^\mu b^\nu\end{aligned}$$

$$\text{mit } \eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Hierbei gilt:
$b^\mu = (b^0, b^1, b^2, b^3)$: kontravarianter Vektor (hochgestellter Indix)
$a_\mu = (a_0, a_1, a_2, a_3)$: kovarianter Vektor (tiefgestellter Index)
$\eta_{\mu\nu} = (a^0, -a^1, -a^2, -a^3)$

Beachte:
Das Skalarprodukt im Minkowski-Raum ist nicht positiv definit.
Euklidischer Raum: $(\vec{x}, \vec{x}) > 0$ für alle $\vec{x} \neq 0$, $(\vec{x}, \vec{x}) = 0 \Rightarrow \vec{x} = 0$
(Skalarprodukt positiv definit)

4.1.1. Schreibweisen im euklidischen und Minkowski-Raum

a) Skalarprodukt:

$(\vec{a}, \vec{b}) = \sum_i a_i b_i$	$a_\mu b^\mu = \eta_{\mu\nu} a^\mu b^\nu$

b) Matrix-Vektor-Multiplikation:

$$\vec{y} = \underline{\underline{A}}\vec{x},\ y_i = \sum_j A_{ij} x_j \qquad y^\mu = A^\mu_\nu x^\nu$$

c) Matrixmultiplikation:

$$\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}},\ c_{ij} = \sum_k a_{ik} b_{kj} \qquad c^\mu_\nu = A^\mu_\lambda B^\lambda_\nu$$

d) Transponierte Matrix:

$$(A^T)_{ij} = A_{ji} \qquad \left(A^\mu{}_\nu\right)^T = A_\nu{}^\mu = \eta_{\nu\alpha}\eta^{\mu\beta}A^\alpha{}_\beta$$

Die Matrix $\eta_{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ ermöglicht das herauf- und herunterziehen von Indizes.

4.1.2. Lorenztransformationen im Minkowski-Raum

Definition:

Die LT sind die Drehungen (orthogonale Transformationen) im Minkowski-Raum:

$$\underbrace{\Lambda_\lambda{}^\mu}_{(\Lambda^\mu{}_\lambda)^T} \Lambda^\lambda{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu$$

$$\Lambda_\lambda{}^\mu = \eta_{\lambda\alpha}\eta^{\mu\beta}\Lambda^\alpha{}_\beta$$

Beispiel:

a) $\Lambda^\alpha{}_\beta = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Heraufzeihen des zweiten Index:

$$\Lambda^{\alpha\mu} = \eta^{\beta\mu}\Lambda^\alpha{}_\beta = \Lambda^\alpha{}_\beta\eta^{\beta\mu} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & -\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Herunterziehen des ersten Index:

$$\Lambda_\lambda{}^\mu = \eta_{\lambda\alpha}\Lambda^{\alpha\mu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & -\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Damit gilt:

$$\Lambda_\lambda{}^\mu \Lambda^\lambda{}_\nu = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & -\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \gamma^2(1-\beta^2) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma^2(1-\beta^2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E_4 = \delta^\mu{}_\nu$$

b) $\Lambda^\alpha{}_\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}$ mit $DD^* = D^*D = E$

=> $\Lambda_\lambda{}^\mu \Lambda^\lambda{}_\nu = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & D^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} = \delta^\mu{}_\nu$

4.1.3. Kontra- und kovariante Vektoren

Sei $a^\mu \in V$ ein kontravarianter Vektor. Dann ist $a_\mu = \eta_{\mu\nu} a^\mu \in V^*$ein kovarianter Vektor und ein Element des Drehraums V^* der 1-Formen $\varphi_a : V \rightarrow \mathbb{R}$ lineare Abbildung $a_\mu : b^\mu \rightarrow (\vec{a}, \vec{b}) = a_\mu b^\mu \in \mathbb{R}$.

Defintion: Kontravarianter Vierervektor
Jede vierkomponentige Größe a^μ, die sich unter Lorenz-Transformation mit der Lorentz-Matrix transformierenen gemäß $a'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu a^\nu$, nennt man einen kontravarianten Tensor 1. Stufe (kontravarianter Vierervektor/ Lorenzvektor)

Sei a^μein kontravarianter Vektor mit $a'^\mu = \underbrace{\Lambda^\mu{}_\nu}_{\text{LT}} a^\nu$

$$a'_\mu = \eta_{\mu\alpha} a'^\alpha = \eta_{\mu\alpha} \Lambda^\alpha{}_\nu \underbrace{a^\nu}_{\eta^{\nu\beta} a_\beta} = \underbrace{\eta_{\mu\alpha} \eta^{\nu\beta} \Lambda^\alpha{}_\nu}_{\Lambda_\mu{}^\beta} a_\beta = \underbrace{\Lambda_\mu{}^\nu}_{\text{Inv. LT}} a_\nu$$

Definition: Kovarianter Vierervektor
Jede vierkomponentige größe a_μ, die sich mit der inversen LT transformiert gemäß $a'_\mu = \Lambda_\mu{}^\nu a_\nu$ heißt kovarianter Tensor 1. Stufe.

4.1.4. Transformation der Differentiale und Koordinatenableitungen

Sei x^μ ein kontravarianter Vektor, $x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$ => $dx'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu dx^\nu$

Die Differentiale dx^μ transformieren sich wie kontravariante Vektoren.

Sei $f = f(x^\mu)$ eine skalare Funktion, dann ist $df = \frac{\partial f}{\partial x^\mu} dx^\mu$
$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$ => $x^\mu = (\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu x'^\mu$
Wenn man nun diese Beziehung in die Beziehung für df einsetzt ergibt sich:

∂_ν

$$df = \frac{\partial f}{\partial x'^{\mu}} dx'^{\mu} = \frac{\partial f}{\partial x^{\nu}} \underbrace{\frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}}}_{(\Lambda^{-1})^{\nu}{}_{\mu}} dx'^{\mu} = \underbrace{\left[(\Lambda^{-1})^{\nu}{}_{\mu} \frac{\partial}{\partial x^{\nu}}\right]}_{\text{Transformation}} f\, dx'^{\mu}$$

Die Koordinatenableitungen: $\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \equiv \partial_{\mu}$ transformieren sich wie <u>kovariante</u> Vektoren.

4.1.5. <u>Lorenz-Skalar</u>

Ein Lorentz-Skalar ist eine reelle Größe, die <u>invariant</u> bleibt unter LT.

Beispiele:

a) Skalarprodukt zwischen Lorentz-Vektoren:
$S = a_{\mu} b^{\mu}$
$S = a_{\alpha} \underbrace{\Lambda_{\mu}{}^{\alpha} \Lambda^{\mu}{}_{\beta}}_{\delta_{\alpha}^{\beta}} b^{\beta} = a_{\alpha} b^{\beta} \delta_{\alpha}^{\beta} = a_{\mu} b^{\mu} = S$

b) Eigenzeit τ
$ds^2 = dx_{\mu} dx^{\mu} = c^2 dt^2 - (d\vec{x})^2$ ist invariant unter LT (Lorenz-Skalar)
$d\tau = \frac{1}{c} ds = \frac{1}{c} \sqrt{dx_{\mu} dx^{\mu}}$ ist invariant unter LT. Damit ist auch die Eigenzeit $\tau = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau$ ein Lorenz-Skalar.

4.2. <u>Tensoralgebra</u>

<u>Definition</u>: Ein Tensor vom Typ $\binom{r}{s}$ ist eine Multilineare Abbildung.

$$T: \underbrace{V^* x V^* x \dots x V^*}_{\text{r-mal}} x \underbrace{V x V x \dots x V}_{\text{s-mal}} \to \mathbb{R}$$

$$\underbrace{(\varphi, \chi, \dots, \omega)}_{\text{r-mal}}; \underbrace{(\mu, \nu, \dots, w)}_{\text{s-mal}} \mapsto T(\varphi, \chi, \dots, \omega, \mu, \nu, \dots, w) \in \mathbb{R}$$

<u>Bezeichnung</u>:
T heißt r-fach kontra- und s-fach kovarianter Tensor.
Multilinear. Linear in jedem Argument (bei Festhalten der Übrigen)
Die Menge aller Tensoren des Typs $\binom{r}{s}$bildet einen Vekotrraum V_s^r.

<u>Indexschreibweise</u>:
$T^{\alpha_1,\dots,\alpha_r}{}_{\beta_1,\dots,\beta_2}: T^{\alpha_1,\dots,\alpha_r}{}_{\beta_1,\dots,\beta_2} \varphi_{\alpha_1} \chi_{\alpha_1} \dots \omega_{\alpha_r} \mu^{\beta_1} \nu^{\beta_2} \dots w^{\beta_s} \in \mathbb{R}$

<u>Tensorprodukt (direktes Produkt)</u>:
$T \in V_s^r; S \in V_{s'}^{r'}$
T$\boxtimes$ S‘$\in V_s^r x V_{s'}^{r'} = V_{s+s'}^{r+r'}$
$T_{\beta_1 \dots \beta_s}^{\alpha_1 \dots \alpha_r} S^{\alpha_1' \dots \alpha_r'}{}_{\beta_1' \dots \beta_s'} = U_{\beta_1 \dots \beta_s, \beta_1' \dots \beta_s'}^{\alpha_1 \dots \alpha_r, \alpha_1' \dots \alpha_r'}$

Tensorverjüngung (Kontraktion):
In Komponenten dargestellt: Summation über gleiche Indices

$$T^{\alpha_1 \dots \alpha_r}{}_{\beta_1 \dots \beta_s} \in V_s^r; \quad \underset{\text{k-ter kontravarianter und j-ter kovarianter Index wird gleichgesetzt und aufsummiert}}{T^{\overset{\text{kte Position}}{\alpha_1 \dots \beta_j \dots \alpha_r}}{}_{\beta_1 \dots \beta_j \dots \beta_s}} = Sp_j^k T \in V_{s-1}^{r-1}$$

Beispiele:
Seien a^μ, b^μ Vierervektoren so gilt:

$a^\mu \; und \; b^\mu \in V_0^1$	(kontravaritante Vektoren)
$a_\mu = \eta_\mu^\nu a_\nu \in V_1^0$	(kovarianter Vektor)
$a^\mu b^\nu \in V_0^2$	(direktes Produkt, kontravarianter Tensor 2.Stufe)
$c_\nu^\mu = a^\mu b_\nu \in V_1^1$	(1-fach kovarianter 1-fach kontravarianter Tensor)
$c_\mu^\mu \in V_0^0 = \mathbb{R}$	(Kontraktion, Tensor 0.ter Stufe)

4.2.1. Tensor Transformationen

Sei die Transformation der kovarianten und kontravarianten Basisvektoren gegeben durch: $e_{\alpha'} = A_{\alpha'}^{\alpha} e_\alpha; \quad \omega^{\beta'} = A_\beta^{\beta'} \omega^\beta$

$$T = T^{\alpha_1 \dots \alpha_r}{}_{\beta_1 \dots \beta_s} e_{\alpha_1} \dots e_{\alpha_r} \omega^{\beta_1} \dots \omega^{\beta_s}$$
$$= T^{\alpha'_1 \dots \alpha'_r}{}_{\beta'_1 \dots \beta'_s} e_{\alpha'_1} \dots e_{\alpha'_r} \omega^{\beta'_1} \dots \omega^{\beta'_s}$$

Durch gleichsetzen der zwei Zeilen und Einsetzen der Definition erhält man

$$T^{\alpha'_1 \dots \alpha'_r}{}_{\beta'_1 \dots \beta'_s} = T^{\alpha_1 \dots \alpha_r}{}_{\beta_1 \dots \beta_s} A^{\alpha'_1}{}_{\alpha_1} \dots A^{\alpha'_r}{}_{\alpha_r} A_{\beta'_1}{}^{\beta_1} \dots A_{\beta'_s}{}^{\beta_s}$$

A beziehungsweise A^{-1} für jeden Ko- bzw. Kontravarianten Index.

4.2.2. Lorentz-Tensoren

- Vektoren aus $\mathbb{R}^4$(Vierervektoren)
- $A^\mu{}_\nu = \Lambda^\mu{}_\nu$ ist die LT
- Metrischer Tensor ist: $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$
- $x_\mu = \eta_{\mu\nu} x^\nu$
- Infinitisimales Wegelement: $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = dx_\mu dx^\mu$
- Differentialoperator: $\partial_\mu = \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial (ct)}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$ ist der Vierergradient

  Wenn man ihn nun auf einen Lorentz-Skalar φ anwendet:
  $\partial_\mu \varphi \equiv \varphi_\mu$ ist kovarianter Vektor.
  Anwendung auf einen Vierervektor a^μ:
  a) $\partial_\mu a^\mu$ ist Lorentz-Skalar (Viererdivergenz) $\quad \left[div \, \vec{A} = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} \; in \; \mathbb{R}^3\right]$
  b) $\partial_\nu a_\mu - \partial_\mu a_\nu$ ist anitsymetrischer kovarianter Tensor 2. Stufe (Viererrotation) $\left[rot \, \vec{A} = \vec{\nabla} x \, \vec{A} \; in \; \mathbb{R}^3\right]$

4.2.3. Das Differential der Eigenzeit

Im Ruhesysichen eines in einem Inertialsystem ungleichförmig bewegten Teilchen gilt:

$$dx = dy = dz = 0 \Rightarrow ds^2 = c^2 d\tau^2$$

ds^2 ist Lorentz-invariant, im Inertialsystem lautet es:

$$\begin{aligned} ds^2 = dx_\mu dx^\mu &= c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \\ &= c^2dt^2 - v^2(t)dt^2 \\ &= c^2\left(1 - \frac{v^2(t)}{c^2}\right)dt^2 \\ &\overset{!}{=} c^2 d\tau^2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow d\tau = \sqrt{1-\beta^2(t)}dt = \frac{dt}{\gamma(t)}$$

Integration liefert Eigenzeit:

$\int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1-\beta^2(t)}\, dt < t_2 - t_1$

Eigenzeit ist Lorentz-Skalar aber wegabhängig!

5. Relativistische Mechanik

Newton'sche Mechanik ist nich kovariant unter LT.

Beispiel: konst. Beschleunigung a => $v(t) = at > c$ für $t > \frac{c}{a}$

Ziel: Formulierung der Lorentzkovarianten Mechanik, die für $v \ll c$ in die Newton'sche Mechanik übergeht.

Wir betrachen ein Punktteilchen in der 4-dimensionalen Raumzeit: $x^\mu(t) = \begin{pmatrix} ct \\ \vec{x}(t) \end{pmatrix}$ ist kontravarianter Vierervektor.

5.1. Vierervektoren

5.1.1 Vierergeschwindigkeit

t ist kein Lorentz-Skalar => $\frac{dx^\mu}{dt}$ ist nicht Lorentz-kovariant (kein Vierervektor)

Eigenzeit τ ist Lorentz-Skalar => $u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$ ist kontravarianter Vierervektor (Lorentzskalar 1. Stufe)

$$u^\mu = \gamma(t)\frac{dx^\mu}{dt} = \gamma\begin{pmatrix} c \\ \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix}$$

$$u_\mu = \eta_{\mu\nu} u^\nu = \gamma \begin{pmatrix} c \\ -\dot{x} \\ -\dot{y} \\ -\dot{z} \end{pmatrix}$$

<u>Kontraktion:</u>
$u_\mu u^\mu = \gamma^2 c^2 - \gamma^2 \vec{v}^2 = \gamma^2 c^2 (1 - \beta^2) = c^2 > 0$ ist Lorentz-Skalar

$u_\mu u^\mu > 0 \Rightarrow u^\mu$ ist zeitartiger Vektor.

5.1.2 <u>Viererbeschleunigung</u>

$b^\mu = \frac{du^\mu}{d\tau} = \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2}$ (kontravarianter Vierervektor)

$$b^\mu = \gamma \frac{du^\mu}{dt} = \gamma \frac{d}{dt}\left(\gamma \begin{pmatrix} c \\ \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} \right) = \gamma\dot{\gamma} \begin{pmatrix} c \\ \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} + \gamma^2 \begin{pmatrix} 0 \\ \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix}$$

Wobei für $\dot{\gamma}$ gilt:
$\dot{\gamma} = \frac{d}{dt} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \gamma^3 \vec{\beta} \cdot \dot{\vec{\beta}} = \gamma^3 \, \frac{\vec{v} \cdot \dot{\vec{v}}}{c^2}$

Wenn man dies oben einsetzt ergibt sich:
$$b^\mu = \gamma^4 \frac{\vec{v}\cdot\dot{\vec{v}}}{c^2} \begin{pmatrix} c \\ \vec{v} \end{pmatrix} + \gamma^2 \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{\vec{v}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma^4 \frac{\vec{v}\cdot\dot{\vec{v}}}{c^2} \\ \gamma^2 \dot{\vec{v}} + \gamma^4 \frac{\vec{v}\cdot\dot{\vec{v}}}{c^2} \cdot \vec{v} \end{pmatrix}; \qquad b^\mu \xrightarrow{v \ll c} \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{\vec{v}} \end{pmatrix}$$

5.1.3 <u>Vierer-Impuls</u>

Die (Ruhe-)Masse m eines Teilchens ist Lorentz-Sklalar
$p^\mu = m u^\mu = m\gamma \begin{pmatrix} c \\ \vec{v} \end{pmatrix}$

<u>**Nicht**</u>: $m(\gamma) = m_0 \cdot \gamma = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$

5.1.4 <u>Vierer-Kraft</u>

Newton: $\vec{F}^N = \dot{\vec{p}}$
$$F^\mu = \frac{dp^\mu}{d\tau} = \gamma \underbrace{\frac{dp^\mu}{dt}}_{\begin{pmatrix} \frac{dp^0}{dt} \\ \dot{\vec{p}}^N = \vec{F}^N \end{pmatrix}} = m b^\mu = \begin{pmatrix} \frac{m}{c} \gamma^4 \vec{v}\dot{\vec{v}} \\ m\gamma^2 \dot{\vec{v}} + m\gamma^4 \frac{\vec{v}\cdot\dot{\vec{v}}}{c^2} \cdot \vec{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{m}{c} \gamma^4 \vec{v}\dot{\vec{v}} \\ \gamma \vec{F}^N \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{c} \gamma \vec{v} \cdot \vec{F}^N = \gamma^2 \frac{m}{c} \vec{v}\dot{\vec{v}} + \gamma^4 \frac{v}{c^2} \frac{m}{c} \, \vec{v}\dot{\vec{v}} = [\gamma^2 + \gamma^4 \beta^2] \frac{m}{c} \, \vec{v}\dot{\vec{v}} = \gamma^4 \frac{m}{c} \vec{v}\dot{\vec{v}} = F^0$$

$$F^\mu = \begin{pmatrix} \gamma \frac{\vec{v}\vec{F}^N}{c} \\ \gamma \vec{F}^N \end{pmatrix} = mb^\mu = \begin{pmatrix} \frac{m}{c}\gamma^4 \vec{v}\dot{\vec{v}} \\ \gamma^2 m\, \dot{\vec{v}} + \gamma^4 \frac{\vec{v}\cdot\dot{\vec{v}}}{c^2} m\vec{v} \end{pmatrix} \quad \text{Viererkraft}$$

⇨ Relativistische Bewegungsgleichung

$\vec{F}^N = \vec{F}(\vec{x}, \vec{v}, t) => DGL\ f\text{ür}\ \vec{x}(t)$

Es gilt:

$F^0 = m\frac{du^0}{d\tau} = \frac{m\gamma d}{dt}(\gamma c) = \gamma \frac{\vec{v}\vec{F}^N}{c}$

5.1.5 Beispiel: Lösung der relativistischen Bewegungsgleichung

Eine Rakete, die in ihrem Ruhesystem konstant beschleunigt wird, mit a=g.
Inertialsystem: K(Erde)
Ruhesystem der Rakete: K‘

$$b^\mu = \begin{pmatrix} 0 \\ g \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} => b^\mu = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} b'^\mu$$

$$b_x = \gamma \cdot g = \frac{d}{d\tau} u_x = \frac{d}{d\tau}(\gamma v) => g = \frac{d}{dt}(\gamma v)$$

Anfangsbedingung: $x(t=0) = 0, v(t=0) = 0$

$$\gamma v = gt = \gamma \frac{dx}{dt} => \frac{dx}{dt} = c\,\beta = \sqrt{1-\beta^2}gt \qquad |^2$$

$$c^2\beta^2 = (1-\beta^2)g^2t^2$$

$$(c^2 + gt^2)\beta^2 = g^2t^2$$

$$\beta = \frac{gt}{\sqrt{c^2+g^2t^2}} = \frac{v}{c} => v(t) = \frac{gt}{\sqrt{1+\frac{g^2t^2}{c^2}}} < c$$

$$=> x(t) = \int_0^t v(\tilde{t})d\tilde{t} = \left[c\sqrt{t^2+\frac{c^2}{g^2}}\right]_0^t = c\sqrt{t^2+\frac{c^2}{g^2}} - \frac{c^2}{g} = \frac{c^2}{g}\left[\sqrt{1+\left(\frac{gt}{c}\right)^2} - 1\right] \approx \frac{g}{2}t^2$$

5.2 Relativistische Energie

Es gilt:

$\frac{dW}{dt} = \vec{F}^N \cdot \frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{v}\cdot\vec{F}^N = \frac{d}{dt}(m\gamma c^2)$

Damit ergibt sich:

$W = \gamma mc^2 = E$ (relativistische Energie!)

Hierbei wird die Integrationskonstante so gewählt, dass die Energie des ruhenden Teilchens =mc²

$E = \gamma mc^2 = cp^0 => p^0 = \frac{E}{c}$

$p^\mu = \begin{pmatrix} \frac{E}{c} \\ m\gamma\vec{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{E}{c} \\ \vec{p} \end{pmatrix}$ Energie-Impuls-Vektor

$p_\mu p^\mu = \frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^2$ =[im Ruhesystem des Teilchens] $= m^2c^2$
$=> E^2 = m^2c^4 + c^2p^2$
$E = \sqrt{m^2c^4 + c^2p^2}$ (relativistischer Energiesatz)

Taylorreihe für kleine Impulse:
$$E = mc^2\sqrt{1 + \frac{\vec{p}^2}{m^2c^2}} \approx mc^2\left(1 + \frac{p^2}{2m^2c^2} + \cdots\right) = \underbrace{m^2c^2}_{\text{Ruheenergie}} + \underbrace{\frac{p^2}{2m}}_{\text{Kin. Energie}} + O(p^4)$$

$m > 0 => E \xrightarrow{v\to c} \infty$
⇨ Teilchen mit nicht-verschwindender Ruhemasse bewegen sich langsamer als Licht.

<u>Photonen</u>: Photonen haben keine Ruhemasse (m=0)
$$p_\mu p^\mu = \frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^2 \overset{!}{=} 0 => E = c|\vec{p}| = \hbar\omega = \frac{hc}{\lambda}$$
$$\vec{p} = \hbar\vec{k}; \qquad E = \hbar\omega = h\nu$$
$$p^\mu = \begin{pmatrix} \frac{\hbar\omega}{c} \\ \hbar\vec{k} \end{pmatrix} = \hbar\underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\omega}{c} \\ \vec{k} \end{pmatrix}}_{:=k^\mu} = \hbar k^\mu$$
rel. Wellenvektor

Ohne äußere Kraft ist der Viererimpuls (Energie-Impuls-Vektor) erhalten:
$$\frac{d}{d\tau}p^\mu = \frac{d}{d\tau}\begin{pmatrix} \frac{E}{c} \\ \vec{p} \end{pmatrix} = F^\mu = 0$$

Für Stöße zwischen zwei Teilchen:
$p_1^\mu + p_2^\mu = p_1'^\mu + p_2'^\mu$ Impulserhaltungssatz (gilt auch für Photonen => Compton-Streuung)

5.2.1 <u>Äquivalenz von Masse und Energie</u>

$$p^\mu = \begin{pmatrix} \frac{E}{c} \\ \vec{p} \end{pmatrix} \; mit\; \vec{p} = m\gamma\vec{v}$$
p^μ ist ein Vierervektor, also gelten die Lorentztransformationen (wie für x^μ)
Spezielle LT in x-Richtung:

$x^\mu => ct = \gamma(ct' + \beta x')$
$x = \gamma(x' + \beta ct')$
$p^\mu => \frac{E}{c} = \gamma(\frac{E'}{c} + \beta p_x')$
$p_x = \gamma(p_x' + \beta\frac{E'}{c})$

Im Ruhesystem des Teilchens gilt: $p'_x \overset{!}{=} 0 \rightarrow E'_0 = E_0$

$=> E = \gamma E_0$

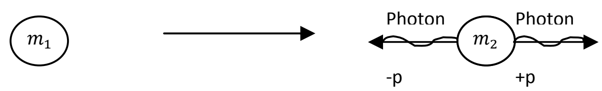
Rel. Impuls

$$p_x = \gamma\beta \frac{E_0}{c} = \gamma \frac{vE_0}{c^2} = \gamma m v$$

$$E_0 = mc^2$$

Ruheenergie (Energie im Ruhesystem)
Keine Integrationskonstante möglich!!!!

Betrachte Teilchen mit Masse m_1, das 2 Photonen im entgegengesetzter Richtung emittiert (so dass kein Rückstoß möglich):



Erhaltung des Viererverktors:

$$\begin{pmatrix} \frac{E_1}{c} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |\vec{p}| \\ -\vec{p} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{E_2}{c} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} |\vec{p}| \\ \vec{p} \end{pmatrix} => E_2 = E_1 - 2c|\vec{p}| < E_1$$

$$m_2 c^2 = m_1 c^2 - 2c|\vec{p}|$$

$$m_2 = m_1 - 2\frac{|\vec{p}|}{c}$$

$$= m_1 - 2\frac{E_{Photon}}{c^2}$$

Abgstrahlte Energie (Photon = elektromagnetische Strahlung) verringert die Ruhemasse der Teilchen (z.B. angeregtes Atom)
Jede Form von Energie kann einer trägen Masse zugeordnet werden, nach der Vorschrift:

$$E = mc^2$$

<u>Beispiele:</u>

1) Angeregte Atome/Moleküle sind schwerer als Atome/Moleküle im Grundzustand!
   Proton und Elektron:

   $$m_p + m_e = 1{,}67261 \cdot 10^{-27} kg + 9{,}11 \cdot 10^{-31} = 1{,}67352 \cdot 10^{-27} kg$$

   Für das Wasserstoffatom im Grundzustand gilt:

   $$m_H = m_p + m_e - \frac{13{,}6ev}{c^2} = 1{,}67352 \cdot 10^{-27} kg - \underbrace{2{,}42 \cdot 10^{-35} kg}_{\approx 10^{-8} m_p}$$

2) Massendefekt im Atomkern:
   Gesamtmasse von Atome ist kleiner als die Summe der Massen der Protonen und Neutronen. Massendefekt ist $\frac{Bindungsenergie}{c^2}$ der starken Wechselwirkung.

   $$m(A,Z) = Z \cdot m_P + (A - Z) m_N + \frac{E_{Bind}}{c^2} \rightarrow E_{Bind} < 0$$

   ^{12}C: A=12, Z=6, N=6

   $\frac{1}{12} m(^{12}C) = 1{,}6605 \cdot 10^{-27} kg$ (atomare Masseneinheit)

$\frac{1}{12}(6m_P + 6m_N) = \frac{1}{2}(1{,}67261 \cdot 10^{-27} + 1{,}67482 \cdot 10^{-27}) = 1{,}67372 \cdot 10^{-27} kg$

Das bedeutet, dass 0,8% der Masse von ^{12}C die Bindungsenergie ist.

3) Paarerzeugung/Vernichtung von Teilchen und Antiteilchen unter Vernichtung/Entstehung von Photonen (γ)

$e^+ + e^- \leftrightarrow 2\gamma$; $E_\gamma = m_e c^2 = 8{,}2 \cdot 10^{-14} J = 512 keV$

Dieser Betrag ist üblicherweise größer, wenn die beiden Teilchen auch noch kinetische Energie haben.
Hier wird 100% der Masse in Energie umgewandelt

5.3 Drehimpulstensor und Drehmoment

Klassiche Mechanik: $\vec{L} = \vec{r} x \vec{p}$
Wenn man dies in Komponenten (kontravariant) schreibt ergibt sich:

$L^i = x^j p^k - x^k p^j$ mit (i,j,k)=(1,2,3) und zyklische Permutationen

Definition eines Lorentz-kovarianten Drehimpulses:

$L^{\mu\nu} = x^\mu p^\nu - x^\nu p^\mu = -L^{\nu\mu}$ (antisym. kontravarianter Tensor 2.Stufe)

klassisches Drehmoment: $\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} x \vec{F}^N$

kovariant: $\frac{d}{d\tau} L^{\mu\nu} = \frac{d}{d\tau}(x^\mu p^\nu - x^\nu p^\mu)$

$$= \cancel{u^\mu \underbrace{p^\nu}_{mu^\nu}} + x^\mu \underbrace{\frac{dp^\nu}{d\tau}}_{\vec{F}} - \cancel{u^\nu p^\mu} - x^\nu \underbrace{\frac{dp^\mu}{d\tau}}_{F^\mu} = x^\mu F^\nu - x^\nu F^\mu$$

$$M^{\mu\nu} := \frac{d}{d\tau} L^{\mu\nu} = x^\mu F^\nu - x^\nu F^\mu \text{ mit } F^\mu = \gamma \begin{pmatrix} \vec{F}^N \cdot \frac{\vec{v}}{c} \\ \vec{F}^N \end{pmatrix}$$

Dies ist ein kontravarianter Tensor 2. Stufe.

5.4 Relativistische Rrhaltungssätze

Wir betrachten ein System aus N Massenpunkten, die keinen äußeren Kräften unterliegen:

Erhaltungsgrößen in der klassischen Mechanik: Gesamtimpuls, -drehimpuls, -energie

Erhaltungsgrößen in der SRT: $\sum_{i=1}^N p_i^\mu = const. => E = \sum_{i=1}^N E_i = const.$

$$P = \sum_{i=1}^N \vec{F_i} = \sum_{i=1}^N m_i x_i \vec{v_i} = const.$$

6. Kovariante Formulierung der Elektrodynamik

Newtonsche Mechanik ist Galilei-invariant => Rel. Mechanik erfordert Modifikationen der Bewegungsgleichungen.
Maxwell-Gleichungen (E-Dynamik) sind Lorentz-invariant. Dies kommt jedoch bei der Formulierung

$\underbrace{\vec{E}, \vec{B}, \vec{j},}_{\substack{keine \\ Vierervektoren}}$ ρ nicht explizit zum Ausdruck.

kein Lorentz-Skalar

Wie transformieren sich die el. und magn. Felder, Ladungen und Ströme?

6.1 Grundlagen der klassischen Elektrodynamik

Das elektrische Feld $\vec{E}$ ist definiert über die Kraft $\overrightarrow{F_{el}}$, die auf eine (ruhende) kleine Probeladung q wirkt:

$$\overrightarrow{F_{el}}(\vec{r}) = q \cdot \vec{E}(r)$$

Die magnetische Induktion ist definiert über die Kraft $\vec{F}_{mag}$, die auf eine sich mit der Geschwindigkeit $\vec{v}$ bewegte Probeladung q wirkt:

$$\vec{F}_{mag} = q\left(\vec{v}x\vec{B}(\vec{r})\right)$$

Lorentz-Kraft (Kraft auf Probeladung q im elektromagnetische Feld):

$$\vec{F} = q\left(\vec{E}(\vec{r}) + \vec{v}x\vec{B}(\vec{r})\right)$$

Für das elektrische und magnetische Feld gelten Nebenbedingungen (innere Feldgleichungen)

6.2 Maxwell-Gleichungen

6.2.1 Homogene Maxwell-Gleichungen

$$\vec{\nabla}x\vec{E} + \dot{\vec{B}} = 0$$

=> $\int_F \left(\vec{\nabla}x\vec{E}\right)d\vec{f} = \int_{\partial f} \vec{F}\, d\vec{s} = U_{ind} = -\int_F \dot{\vec{B}}d\vec{f} = -\dot{\Phi}$ (Induktionsgesetz)

mit $\Phi = \int_F \vec{B}d\vec{f}$ als der magnetische Fluss durch die Fläche F.

$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ bedeutet, dass es keine magn. Monopole gibt.

=> Vektoranalysis: $\vec{B}$ darstellbar als Rotation eines Vektorpotentials: $\vec{B} = \vec{\nabla}x\vec{A}$

Damit: $\vec{\nabla}x\vec{E} + \vec{\nabla}x\dot{\vec{A}} = \vec{\nabla}x\left(\vec{E} + \dot{\vec{A}}\right) = 0$

Vektoranalysis: Verschwindet die Rotation eines Vektorfeldes, dann lässt sich dieses als Gradient eines skalaren Feldes darstellen.

=> $\vec{E} + \dot{\vec{A}} = -\vec{\nabla}\varphi$ φ: elektrodynamisches Potential

Konvention

$=> \vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi - \dot{\vec{A}}$ (hierbei hat $\vec{A}$ 3 Komponenten und φ eine)

Sowohl das skalare Potential als auch das Vektorpotential sind nicht eindeutig (Eichfreiheit):

$$\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\chi => \vec{\nabla}x\vec{A}' = \vec{\nabla}x\vec{A} + \underbrace{\vec{\nabla}x(\vec{\nabla}\chi)}_{=0} = \vec{\nabla}x\vec{A} = \vec{B}$$

$\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi - \dot{\vec{A}}' + \vec{\nabla}\dot{\chi} = -\vec{\nabla}\underbrace{(\varphi - \dot{\chi})}_{\varphi'} - \dot{\vec{A}}'$ hierbei ist $\chi(\vec{r}, t)$ die Eichfunktion

$(\vec{A}, \varphi) \to (\vec{A}', \varphi')$:Eichtransformation

6.2.2 Inhomogene Maxwellgleichungen (Erregungsgleichungen) (im Vakuum)

$$\vec{\nabla}x\vec{B} = \mu_0\left(\vec{j} + \epsilon_0\dot{\vec{E}}\right)$$
$$\frac{1}{\mu_0}\vec{\nabla}x\vec{B} - \epsilon_0\dot{\vec{E}} = \vec{j}$$
$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Einsetzen der Potentiale:

$$\vec{\nabla}x\left(\vec{\nabla}x\frac{1}{\mu_0}\vec{A}\right) + \epsilon_0\left(\vec{\nabla}\dot{\varphi} + \ddot{\vec{A}}\right) = \vec{j}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\left(-\vec{\nabla}\varphi - \dot{\vec{A}}\right) = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$=> \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\frac{1}{\mu_0}\vec{A}\right) - \frac{1}{\mu_0}\Delta\vec{A} + \epsilon_0\vec{\nabla}\dot{\varphi} + \epsilon_0\ddot{\vec{A}} = \vec{j}$$
$$=> \epsilon_0\ddot{\vec{A}} - \frac{1}{\mu_0}\Delta\vec{A} + \vec{\nabla}\left(\epsilon_0\dot{\varphi} + \frac{1}{\mu_0}\vec{\nabla}\cdot\vec{A}\right) = \vec{j}$$

Eichfreiheit (Lorentzeichung):
Die Potentiale können so gewählt werden, dass

$$\underbrace{\epsilon_0\mu_0}_{\frac{1}{c^2}}\dot{\varphi} + \vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 0$$

Eichfuntkion $\chi(\vec{x}, t)$ ist Lösung der DGL

$$\frac{1}{c^2}\ddot{\chi} - \Delta\chi = g(\vec{x}, t) = \frac{1}{c^2}\dot{\varphi} + \vec{\nabla}\vec{A}$$
$$=> \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\frac{\varphi}{c} + \vec{\nabla}\vec{A} = 0$$

6.2.3 Viererpotential und kovariante Ableitung

Viererpotenital: $A^\mu := \begin{pmatrix} \frac{\varphi}{c} \\ \vec{A} \end{pmatrix}$

Kovariante Ableitungen:

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \begin{pmatrix} \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \end{pmatrix}$$

Lorentz-Eichung: $\partial_\mu A^\mu = 0$

Die Lorentz-Eichung kann in jedem Bezugssystem gewählt werden; damit ist $\partial_\mu A^\mu = 0$ ein Lorentz-Skalar.

=> A^μ ist kontravarianter Lorentz-Tensor 1. Stufe (=Vierervektor)

Beispiel: Spezielle LT in x-Richtung

$$\begin{aligned} ct' &= \gamma(ct - \beta x) & \rightarrow \quad \frac{1}{c}\varphi' &= \gamma\left(\frac{1}{c}\varphi - \beta A_x\right) \\ x' &= \gamma(x - \beta ct) & A'_x &= \gamma\left(A_x - \beta\frac{1}{c}\varphi\right) \\ y' &= y & A'_y &= A_y \\ z' &= z & A'_z &= A_z \end{aligned}$$

Annahme: System K: nur statisches E-Feld $\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi$, aber kein $\vec{B}$-Feld
System K‘: Der Beobachter im bewegten System sieht auch ein $\vec{B}$-Feld
$\vec{B} = \vec{\nabla} x \vec{A}$ (falls φ auch von y oder z abhängt)

K: $\varphi = -E_0 z => \vec{E} = E_0\vec{e}_z, \vec{A} = 0$
K‘: $A'_x = -\gamma\beta\frac{1}{c}\varphi = \gamma v E_0 z = \gamma v E_0 z'$
$=> \vec{B}' = \vec{\nabla} x \vec{A}' = \gamma v\, E_0 \vec{e}_y = \frac{vE_0}{\sqrt{1-\beta^2}}\vec{e}_y$ => v ist die Relativgeschwindigkeit der Systeme

in Lorentz-Eichung:
$$\partial_\mu A^\mu = 0 = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\frac{\varphi}{c} + \vec{\nabla}\cdot\vec{A}$$

$$\underbrace{-\vec{\nabla}\cdot\dot{\vec{A}}}_{\frac{1}{c^2}\ddot{\varphi}} - \Delta\varphi = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{\varphi}{c} - \Delta\frac{\varphi}{c} = \underbrace{\partial_\mu\partial^\mu}_{:=\Box}\frac{\varphi}{c} = \Box\frac{\varphi}{c} = \frac{1}{c\epsilon_0}\rho = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon_0}}\rho \qquad \Box := \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2$$

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\vec{A} + \overset{\text{Ist 0}}{(\dots)} = \partial_\mu\partial^\mu\vec{A} = \Box\vec{A} = \mu_0\vec{j}$$

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right) A^\mu = \Box A^\mu = \begin{pmatrix} \frac{\mu_0}{\epsilon_0}\rho \\ \mu_0 \vec{j} \end{pmatrix} = \mu_0 \begin{pmatrix} c\rho \\ \vec{j} \end{pmatrix} \coloneqq \mu_0 j^\mu$$

Viererstrom:
Kontravarianter Tensor 1. Stufe
(Vierervektor)

Viererstrom: $j^\mu \coloneqq \begin{pmatrix} c\rho \\ \vec{j} \end{pmatrix}$ (Vierervektor)

=> $\partial_\mu j^\mu = \dot{\rho} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j}$ ist Lorentzskalar.

$$\vec{\nabla} x \vec{B} = \mu_0 (\vec{j} + \epsilon_0 \dot{\vec{E}})$$

$$=> \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} x \vec{B}) = 0 = \mu_0 \left(\vec{\nabla} \vec{j} + \epsilon_0 \underbrace{\vec{\nabla} \dot{\vec{E}}}_{=\frac{1}{\epsilon_0}\dot{\rho}} \right)$$

<u>Kontinuitätsgleichung:</u>

$\partial_\mu j^\mu = \dot{\rho} + \vec{\nabla} \vec{j} = 0$ gilt in allen Inertialsystemen

6.3. <u>Kovariante Formulierung der E-Dynamik</u>

6.3.1. <u>Vierervektoren in der E-Dynamik</u>

- Viererpotential A^μ in der Lorentzeichung:
  $A^\mu = \begin{pmatrix} \frac{\varphi}{c} \\ \vec{A} \end{pmatrix}$

  mit $\partial_\mu A^\mu = \frac{1}{c^2}\dot{\varphi} + \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ (Lorentz-Skalar)

- Viererstrom j^μ:
  $j^\mu = \begin{pmatrix} c\rho \\ \vec{j} \end{pmatrix}$

  wobei ρ: Ladungsdichte
  $\vec{j} = \rho \cdot \vec{v}$: Stromdichte (nicht relativistisch)
  $j^\mu = \rho_0 u^\mu = \rho_0 \gamma \begin{pmatrix} c \\ \vec{v} \end{pmatrix}$
  j^μ: Lorentz-Vektor: => $\partial_\mu j^\mu = \dot{\rho} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$ (Lorentz-Skalar gilt in allen IS)

Kontinuitätsgleichung

6.3.2 <u>Kovariante Form der Maxwell-Gelichungen für die Potentiale</u>

$$\underbrace{-\vec{\nabla} \cdot \dot{\vec{A}}}_{\frac{1}{c^2}\ddot{\varphi}} - \Delta\varphi = \frac{1}{\epsilon_0}\rho => \frac{1}{c^2}\frac{d^2}{dt^2}\frac{\varphi}{c} - \frac{\Delta\varphi}{c} = \underbrace{\partial_\mu \partial^\mu}_{:=\Box} \frac{\varphi}{c} = \Box \frac{\varphi}{c} = \frac{1}{c\epsilon_0}\rho = \mu_0 c \rho$$

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{A} - \Delta\vec{A} = \partial_\mu\partial^\mu\vec{A} = \mu_0\vec{j}$$

=> Äquivalent zu den 4 Maxwellschen Gleichungen:

$$\partial_\mu\partial^\mu A^\nu = \Box A^\nu = \mu_0\begin{pmatrix} c\rho \\ \vec{j}\end{pmatrix} = \mu_0 j^\nu$$

Im Vakuum ($j^\mu = 0$): $\Box A^\nu = 0$

Lösung der Wellengleichung: Superposition ebener Wellen:

$f(x^\mu) = e^{-ik_\mu x^\mu} = e^{i(\vec{k}\vec{x}-\omega t)}$ mit $k_\mu = \begin{pmatrix} \frac{\omega}{c} \\ \vec{k}\end{pmatrix}$ kovarianter Wellenvektor

denn $\Box f(x^\mu) = \left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right) f(x^\mu) = \underbrace{\frac{\omega^2}{c^2} - \vec{k}^2}_{=0} f(x^\mu) \stackrel{!}{=} 0$

$\omega = c|\vec{k}|$ => k^μ ist lichtartig

$$A^\nu(x^\mu) = \int_{\mathbb{R}^4} \underbrace{\tilde{A}^\nu(k^\mu)}_{\substack{frei \\ wählbar}} \cdot \delta\left(k_0^2 - \vec{k}^2\right) \cdot e^{-ik_\mu x^\mu} d^4k$$

6.3.3. Elektrisches und magnetisches Feld

$$\left.\begin{aligned} \vec{E} &= -\left(\vec{\nabla}\varphi + \dot{\vec{A}}\right) \\ \vec{B} &= \vec{\nabla} x \vec{A} \end{aligned}\right\}$$ nicht Lorentz-Kovariant

Frage: Können wir die Maxwellgleichungen auch für die Felder in kovariante Form schreiben?

Ja, aber wir benötigen Lorentz-Tensoren 2. Stufe:

6.4 Lorentz Tensoren 2. Stufe in der E-Dynamik

6.4.1 Der Feldstärketensor

$F_{\mu\nu} = \underbrace{\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu}_{\substack{Viererrotation \\ des\,Vektorpot.}}$ ist antitsymmetrischer kovarianter Lorentz-tensor 2.Stufe

$$A_\nu = \eta_{\mu\nu}A^\mu = \begin{pmatrix} \frac{\varphi}{c} \\ -\vec{A}\end{pmatrix}$$

In Komponenten:

$F_{00} = F_{11} = F_{22} = F_{33} = 0$

$F_{i0} = \partial_i A_0 - \partial_0 A_i = \frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial x^i} + \frac{1}{c}\dot{A}_i = -\frac{1}{c}E_i = -F_{0i}$

$F_{12} = -\frac{\partial A_2}{\partial x^1} + \frac{\partial A_1}{\partial x^2} = -B_3 = -F_{21}$

$F_{13} = B_2 = -F_{31}$

$F_{23} = -B_1 = -F_{32}$

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{E_x}{c} & \frac{E_y}{c} & \frac{E_z}{c} \\ -\frac{E_x}{c} & 0 & -B_z & B_y \\ -\frac{E_y}{c} & B_z & 0 & -B_x \\ -\frac{E_z}{c} & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{(Tensor 2. Stufe)}$$

6.4.2. <u>Transformation des Feldstärketensors</u>

$$F'_{\mu\nu} = (\Lambda^{-1})^{\alpha}_{\mu} (\Lambda^{-1})^{\beta}_{\nu} \cdot F_{\alpha\beta}$$

Beim Wechsel zwischen Inertialsystemen transformieren sich die elektrischen <u>und</u> magnetischen Felder.

<u>Kontravarinter Feldsträrketensor</u>

$$F^{\mu\nu} = \eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta}F_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{E_x}{c} & -\frac{E_y}{c} & -\frac{E_z}{c} \\ \frac{E_x}{c} & 0 & -B_z & B_y \\ \frac{E_y}{c} & B_z & 0 & -B_x \\ \frac{E_z}{c} & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

<u>Invarianten des Feldstärketensors:</u>

a) $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = -\frac{2}{c^2}(\vec{E}^2 - c^2\vec{B}^2)$ ist Lorentz-Skalar
b) $\vec{E} \cdot \vec{B}$ ist Pseudoskalar (immer invariant außer bei Spiegelung)

<u>Schlussfolgerungen:</u>

1) Gilt $\vec{E} \cdot \vec{B} = 0$ (also E senkrecht auf B) in einem Inertialsystem, dann ist $\vec{E} \cdot \vec{B} = 0$ in allen Inertialsystemen.
2) Gilt zusätzlich $\vec{E}^2 - c^2\vec{B}^2 > 0$, dann gibt es ein System mit $\vec{B}' = 0$ (B-Feld lässt sich wegtransformieren).
   Gilt $\vec{E}^2 - c^2\vec{B}^2 < 0$, dann gibt es ein System mit $\vec{E}' = 0$ (E-Feld lässt sich wegtransformieren).
3) $\vec{E} \cdot \vec{B} \neq 0$ in einem System, dann in allen.
4) $\vec{E}^2 - c^2\vec{B}^2 = 0$ in einem System, dann $|\vec{E}| = c|\vec{B}|$ in allen Systemen. Falls zusätzlich $\vec{E} \cdot \vec{B} = 0$, dann bilden $\vec{E}, \vec{B}$ und $\vec{k}$ ein Orthogonalsystem

6.4.3 Kovariante Form der Erregungsgleichung

$$\boxed{\partial_\nu F^{\mu\nu} = -\mu_0 j^\mu}$$

$$\mu = 0 => \partial_\nu F^{0\nu} = -\frac{1}{c}\vec{\nabla}\vec{E} = -\mu_0 c\rho => \vec{\nabla}\vec{E} = \mu_0 \underbrace{c^2}_{\frac{1}{\epsilon_0\mu_0}} \rho = \frac{1}{\epsilon_0}\rho$$

$$\mu = 1 => \partial_\nu F^{1\nu} = \frac{1}{c^2}\dot{E_x} + \underbrace{\frac{\partial B_y}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial y}}_{=-(\vec{\nabla}x\vec{B})_x}$$

$$\mu = i => \partial_\nu F^{i\nu} = \frac{1}{c^2}\dot{\vec{E}} - (\vec{\nabla}x\vec{B}) = -\mu_0\vec{j} => \frac{1}{\mu_0\vec{\nabla}x\vec{B}} - \epsilon_0\dot{\vec{E}} = \vec{j}$$

Also: $\partial_\nu F^{\mu\nu} = -\mu_0 j^\mu$ ist kovariante Form der beiden Erregnungsgleichungen
$\vec{\nabla}\vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0}\rho$ und $\frac{1}{\mu_0}\vec{\nabla}x\vec{B} - \epsilon_0\dot{\vec{E}} = \vec{j}$

6.4.4 Kovariante Form der inneren Feldgleichungen

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0; \quad \vec{\nabla}x\vec{E} + \dot{\vec{B}} = 0$$

Definition: (Total anitsymmetrischer Levi-Civita-Tensor)

$$\epsilon^{k\lambda\mu\nu} := \begin{cases} 1 & , k\lambda\mu\nu \; gerade \; Permutation \; von \; \{0,1,2,3\} \\ -1 & , k\lambda\mu\nu \; ungerade \; Permutation \; von \; \{0,1,2,3\} \\ 0 & sonst \end{cases}$$

Tensor 4. Stufe bei LT aber Pseudo-Tensor bei Raumspiegelungen
$\Lambda^\alpha_k \Lambda^\beta_\lambda \Lambda^\gamma_\mu \Lambda^\delta_\nu \epsilon^{k\lambda\mu\nu} = \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$

Definition: (Dualer Feldstärketensor)

$$\hat{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & -B_x & -B_y & -B_z \\ B_x & 0 & \frac{E_z}{c} & -\frac{E_y}{c} \\ B_y & -\frac{E_z}{c} & 0 & \frac{E_x}{c} \\ B_z & \frac{E_y}{c} & -\frac{E_x}{c} & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{(Pseudotensor)}$$

Nachtrag: $F_{\mu\nu}\hat{F}^{\mu\nu} = -\frac{1}{4}\vec{E}\cdot\vec{B}$ ist Pseudo-Skalar

Innere Feldgleichungen:

$$\boxed{\partial_\nu \hat{F}^{\mu\nu} = 0}$$

$$\mu = 0: \partial_\nu \hat{F}^{0\nu} = -\vec{\nabla}\vec{B} = 0$$

$$\mu = 1: \partial_\nu \hat{F}^{1\nu} = \frac{1}{c}\dot{B_x} + \frac{1}{c}\underbrace{\left(-\frac{\partial E_y}{\partial z} + \frac{\partial E_z}{\partial y}\right)}_{+(\vec{\nabla}x\vec{E})_x}$$

$\mu = i: \partial_\nu \hat{F}^{i\nu} = \frac{1}{c}\left(\dot{\vec{B}} + \vec{\nabla} x \vec{E}\right) = 0$

6.4.5. Kovariante Form der Maxwellgleichungen

$$\boxed{\begin{aligned} \partial_\nu \hat{F}^{\mu\nu} &= 0 \\ \partial_\nu F^{\mu\nu} &= -\mu_0 j^\mu \end{aligned}}$$

6.4.6. Lorentz-Kraft (auf geladenes Punktteilchen)

$\vec{F} = \dot{\vec{p}} = q(\vec{E} + \vec{v} x \vec{B})$

Kovariante Form der Lorentz-Kraft:
$\frac{d}{d\tau} p^\mu = q \cdot F_{\mu\nu} \cdot u^\mu$

$\mu = i: \frac{d}{d\tau} p_i = \gamma \frac{d}{dt} p_i = -\gamma q\left(\vec{E} + \vec{v} x \vec{B}\right) = -\frac{d}{d\tau} p^i$
$\mu = 0: \frac{d}{d\tau} p_0 = \frac{d}{d\tau}(m\gamma c) = \gamma \frac{q}{c} \vec{E} \cdot \vec{v}$
$=> \frac{d}{d\tau}\left(\underbrace{\gamma m c^2}_{E_{id}}\right) = q\vec{E} \cdot \vec{v} = \frac{d}{dt}\vec{E} \cdot \vec{v} = \frac{d}{dt} E_{id} = \frac{d}{dt} W = q \cdot \vec{E} \frac{d\vec{s}}{dt}$
$dW = q\vec{E} d\vec{s}$ Energiezuwachs ist gleich der vom E-Feld geleisteten Arbeit

$\frac{d}{d\tau} p^\mu = F^\mu = q \cdot \eta^{\mu\alpha} F_{\alpha\nu} u^\nu$ hierbei ist F^μ die Minkowskikraft

Defintion (Minkowski-Kraft-Dichte):
$q \rightarrow \rho_0$
$q u^\nu \rightarrow \rho_0 u^\nu = j^\nu$

$$f^\mu = \eta^{\mu\alpha} F_{\alpha\nu} j^\nu = \begin{pmatrix} \frac{1}{c} \vec{j} \cdot \vec{E} \\ \rho \vec{E} + \vec{j} x \vec{B} \end{pmatrix}$$

Klassische E-Dynamik:

$$\left.\begin{aligned} &\text{Energiedichte:} && w = \frac{1}{2}\left(\epsilon_0 \vec{E}^2 + \frac{1}{\mu_0}\vec{B}^2\right) \\ &\text{Poynting-Vektor:} && \vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} x \vec{B} \end{aligned}\right\} \text{Nicht Lorentz-Invariant}$$

(Energiestrom)

6.5. Energie-Impuls-Tensor des el.mag. Felds

$$T_\mu^\nu := \frac{1}{\mu_0}\left(F_{\mu\alpha} F^{\alpha\nu} + \frac{1}{4} \eta_\mu^\nu F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}\right)$$

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{\mu_0}\left(\eta^{\mu\beta}F_{\beta\alpha}F^{\alpha\nu} + \frac{1}{4}\eta^{\mu\nu}\underbrace{F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}}_{=-2\left(\frac{\vec{E}^2}{c^2}-\vec{B}^2\right)}\right)$$

Komponenten von $F_{\mu\alpha}F^{\alpha\nu}$:

$\mu = \nu = 0 \qquad \to F_{0\alpha}F^{\alpha 0} = \frac{\vec{E}^2}{c^2}$

$\mu = 0, \nu = i; \quad \to F_{0\alpha}F^{\alpha i} = \frac{1}{c}\left(\vec{E}x\vec{B}\right)_i = \frac{\mu_0}{c}\vec{S}_i$

=> $T_0^0 = \frac{1}{\mu_0}\left(\frac{1}{c^2}\vec{E}^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{\vec{E}^2}{c^2} - \vec{B}^2\right)\right) = \frac{1}{2\mu_0}\left(\frac{\vec{E}^2}{c^2} + \vec{B}^2\right) = w$

$T_0^i = \frac{1}{c}\vec{S}_i = -T_i^0$

$T_i^j =$ Maxwellscher Spannungstensor

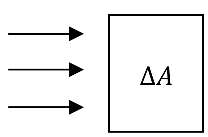
$$T_\mu^\nu = \left(\begin{array}{c|c} w & \frac{1}{c}\cdot\vec{S} \\ \hline -\frac{1}{c}\cdot\vec{S} & T_i^j \end{array}\right)$$

$$T^{\mu\nu} = \left(\begin{array}{c|c} w & \frac{1}{c}\vec{S} \\ \hline \frac{1}{c}\vec{S} & T^{ij} = -T_i^j \end{array}\right)$$

$T_\mu^\mu = 0$

<u>Zur Interpretation des Energie-Impuls Tensors</u>:

Wir betrachten einen Quader in einem elektromagnetischen Feld, das sich in x-Richtung ausbreitet, d.h. $\vec{S} = S_x$.



Arbeit die pro Zeiteinheit Δt <m Volumenelement geleistet wird:

$\Delta W = S_x \cdot \Delta\text{A} \cdot \Delta t = F_x \Delta x = F_x c \Delta t$

$=> \frac{F_x}{\Delta A} \coloneqq \underset{\downarrow\ \text{Strahlungsdruck}}{p_s} = \frac{1}{c}S_x = \frac{\Delta p_x}{\Delta A \Delta t} = c\,\frac{p_x}{\underbrace{\Delta V}}$

Strahlungsdruck Impulsdicht π_x

Impulsdichte: $\vec{\pi} = \frac{1}{c^2}\vec{S}$

Maxwellscher Spannungstensor T_{ij} bestimmt den Druck, den eine el.mag. Kraft auf das Volumenelement (Quader) ausübt.

$\frac{\vec{F}}{\Delta A} = -\underline{\underline{T}}\vec{u}$ (hierbei ist $\vec{u}$ der Normalenvektor)

$\to \vec{F} = \underline{\underline{T}}\underbrace{d\vec{f}}_{\vec{u}dA}$ $\quad [T^{\mu\nu}] = \frac{Energie}{Volumen} = \frac{Kraft}{Fläche} = Druck$

<u>Eigenschaften des Energie-Impuls-Tensors</u>:

$\partial_\nu F^{\mu\nu} = -\mu_0 j^\mu$

$\to \partial_\nu T_\mu^\nu = \frac{1}{\mu_0}\left(-\mu_0 E_{\mu\alpha} j^\alpha\right) = -F_{\mu\alpha} j^\alpha$

$\partial_\nu T^{\mu\nu} = -\eta^{\mu\beta} F_{\beta\alpha} j^\alpha = -\varphi^\mu$ (Minkowski-Kraft-Dichte)

In Komponenten:

$\mu = 0 \rightarrow \frac{\partial\omega}{\partial t} + \vec{\nabla}\vec{S} = -\vec{j}\vec{E}$

$\mu = i \rightarrow \frac{1}{c^2}\frac{\partial S_i}{\partial t} + \vec{\nabla}\vec{T}^{(i)} = \rho E_i + (\vec{j}x\vec{B})_i$

Spezialfall im Vakuum:

$j^\mu = 0 \;\; => f^\mu = 0$

$\partial_\nu T^{\mu\nu} = 0$

6.6. Vier Kontinuitätsgleichungen (Vakuum)

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{S} = 0$$

$$\underbrace{\frac{1}{c^2}\frac{\partial S_i}{\partial t}}_{\frac{\partial \Pi_i}{\partial t}} + \vec{\nabla}\cdot\vec{T}^{(i)} = 0$$ T^{ij}beschriebt Impulsstromdichte

Aufspaltung: $T^{\mu\nu} = T^{\mu\nu}_{el.mag.} + T^{\mu\nu}_{Materie}$ Materie: Ladungen, Ströme,…
(Teilchenfelder, Gravitationsfelder..)

7. Der relativistische Doppler-Effekt

El-mag. Welle im Vakuum:

$$\left.\begin{aligned}\vec{E}(\vec{r},t) &= \vec{E}_0\cdot e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)}\\ \vec{B}(\vec{r},t) &= \vec{B}_0\cdot e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)}\end{aligned}\right\}\text{ Ebene Wellen: } \vec{E}_0 \perp \vec{B}_0 \perp \vec{k}$$

Vierer-Wellenvektor: $k^\mu = \begin{pmatrix}\frac{\omega}{c}\\ \vec{k}\end{pmatrix} = \frac{p^\mu}{\hbar}$

$$k_\mu = \eta_{\mu\nu}k^\nu = \begin{pmatrix}\frac{\omega}{c}\\ -\vec{k}\end{pmatrix}$$

$$e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)} \rightarrow e^{ik_\mu x^\mu}$$

Welche Welle sieht ein Beobachter in einem bewegten Bezugsystem?
→ Doppler-Effekt

Lorentz-Transformation in x-Richtung: $\vec{v} = v\hat{e}_x,\ \vec{k}$ beliebig

$k^{0'} = \gamma(k^0 - \beta k^1)$ $\rightarrow \omega' = \gamma(\omega - vk_x) = \frac{\omega - vk_x}{\sqrt{1-\beta^2}} = \omega\cdot\frac{1-\beta_{u_x}}{\sqrt{1-\beta^2}}$

$k^{1'} = \gamma(k^1 - \beta k^0)$ mit $\vec{n} = \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|} = \frac{c}{\omega}\vec{k}$

$k^{2'} = k^2$ $k_\mu k^\mu = 0 => |\vec{k}| = \frac{\omega}{c}$

$k^{3'} = k^3$ $k'_x = \frac{k_x - \beta\frac{\omega}{c}}{\sqrt{1-\beta'}}$

a) <u>Der longitundinale Doppler-Effekt</u>:

$$\vec{k} = \pm k \cdot \vec{e}_x \quad \rightarrow n_x = \pm 1, \quad k = \frac{\omega}{c}$$
$$\omega' = \omega \cdot \frac{1 \mp \beta}{\sqrt{1-\beta^2}} = \omega \cdot \frac{1 \mp \beta}{\sqrt{(1+\beta)(1-\beta)}} = \omega \cdot \sqrt{\frac{1 \mp \beta}{1 \pm \beta}}$$
$$\pm k' = \frac{\pm k - \beta k}{\sqrt{1-\beta^2}} = \cdots = k \cdot \sqrt{\frac{1 \mp \beta}{1 \pm \beta}} = \frac{\omega'}{c}$$

<u>Frequenzverschiebung</u>:
$$\frac{\Delta\omega}{\omega} = \frac{\omega' - \omega}{\omega} = \sqrt{\frac{(1 \mp \beta)}{1 \pm \beta}} - 1$$

<u>Wellenlängenverschiebung</u>: $\lambda = \frac{2\pi}{\omega} \cdot c$
$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{\lambda' - \lambda}{\lambda} = \sqrt{\frac{1 \pm \beta}{1 \mp \beta}} - 1$$

<u>Nichtrelativistische Näherung</u>: $v \ll c; \beta \ll 1$
$$\frac{\Delta\omega}{\omega} = [Taylor] = \left(1 \mp \beta + \frac{1}{2}\beta^2 \mp \cdots\right) - 1 \approx \mp\beta$$
$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \left(1 \pm \beta + \frac{1}{2}\beta^2 \pm \cdots\right) - 1 \approx \pm\beta$$

<u>Definition</u>: (Rotverschiebungsparameter)
$$Z \coloneqq \frac{\Delta\lambda}{\lambda}$$

b) <u>Der transversale Dopplereffekt</u>: $\vec{k} \perp \vec{v} \rightarrow n_x = 0$

$$\omega' = \frac{\omega}{\sqrt{1-\beta^2}} \approx \omega\left(1 + \frac{1}{2}\beta^2 + O(\beta^4)\right)$$

Annahme: $\vec{k} = k \cdot \vec{e}_z$

$$k'_x = \frac{-\beta \overbrace{k}^{\frac{\omega}{c}}}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad k'_y = k_y = 0 \qquad k'_z = k_z = k$$

Für einen bewegten Beobachter erscheint die Wellenfront gekippt um den Winkel α, gegeben durch:

$$\tan\alpha = \frac{k'_x}{k'_z} = -\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad \underline{\text{Aberration}}$$

Im nicht-rel. Grenzfall:
$$\tan\alpha \approx -\beta = -\frac{\omega}{c}$$

8. <u>Zur Kraft in der SRT</u>

Wir hatten:
$F^{\mu} := mb^{\mu} = m\frac{d}{d\tau}u^{\mu} = \frac{d}{d\tau}p^{\mu}$ ist Vierervektor

Welche Kräfte wirken auf ein Teilchen?
E-Dyn: Auf Teilchen mit Ladung q wirkt Lorentz-Kraft:
$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v}x\vec{B})$

Kovariante Formulierung:
$F_{\mu} = qF_{\mu\nu}u^{\nu} => F^{\mu} = q \cdot \eta^{\mu\alpha}F_{\alpha\nu}u^{\nu}$

Relativistische Mechanik als Erweiterung der newtonschen Mechanik:

$$F^{\mu} = \begin{pmatrix} \gamma\vec{v} \cdot \vec{F}\frac{\omega}{c} \\ \gamma\vec{F}^{N} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{m}{c}\gamma^{4}\vec{v} \cdot \dot{\vec{v}} \\ \gamma\vec{F}^{N} \end{pmatrix}$$

<u>Elementare Kräfte</u>:

$$\left.\begin{array}{l} \text{- Starke Wechselwirkung (Kernkräfte)} \\ \text{- Schwache Wechselwirkung} \end{array}\right\} \text{kurzreichweitig}$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{- Elektromagnetische Kraft} \\ \text{- Gravitation} \end{array}\right\} \text{langreichweitig}$$

Newtonsche Gravitationskraft $\vec{F}^{N}$ auf ein Teilchen mit Masse m:

$$\vec{F}^{N}(\vec{x}) = -m\vec{\nabla}\Phi(\vec{x})$$

mit $\Phi(\vec{x})$ Gravitationspotential; Lösung der Poisongleichung

$$\Delta\Phi = 4\pi \cdot G \cdot \rho(\vec{x})$$

Wir brauchen kovariante Formulierung der Gravitationskraft analog zur el-mag. Kraft (Lorentz-Kraft)

Einfacher Ansatz: $\Phi(x^{\mu})$ ist lorentzinvariantes skalares Feld
$F^{\mu} = m\frac{d}{d\tau}u^{\mu} = m\partial^{\mu}\Phi$
⇨ $\frac{d}{d\tau}u^{\mu} = \partial^{\mu}\Phi$ (Bewegungsgleichung)

<u>Kovariante Feldgleichung für $\Phi(\vec{x}, t)$:</u>

$$\square\Phi = \left(\frac{1}{c^{2}}\frac{\partial^{2}}{\partial t^{2}} - \Delta\right)\Phi(\vec{x}, t) = -4\pi G\rho(\vec{x}, t)$$

vgl. statische Newtonsche Lsg.

Probleme:
- Gleichung lierfert unphysikalische Gravitationswellenlösungen im Vakuum
- $\frac{d\Phi}{d\tau} = \frac{\partial\Phi}{\partial x^{\mu}}\frac{\partial x^{\mu}}{\partial\tau} = \left(\frac{d}{d\tau}u_{\mu}\right)u^{\mu} = \frac{1}{2}\frac{d}{d\tau}\left(\underbrace{u_{\mu}u^{\mu}}_{=c^{2}}\right) = 0 => \Phi = const.$

Nächster naheliegender Versuch: Viererpotential $A^{\mu} = \begin{pmatrix} \frac{\Phi}{c} \\ \vec{A} \end{pmatrix}$

In Anlehnung an die E-Dynamik mit Viererstrom $j^{\mu} = \begin{pmatrix} \frac{\rho}{c} \\ \vec{j} \end{pmatrix}$ füt die Massen.

Diesen Ansatz hat bereits Maxwell versucht.

<u>Probleme</u>: Bei der Gravitation gibt es nur anziehende Kräfte => neg. Energie des Gravitationsfeldes

M. Abraham (1912): Gravitierender Oszillator erfährt keine Strahlungsdämpfung, sondern die Schwingung würde durch Abstrahlung von Gravitationswellen noch angefacht. Unphysikalisch!

Einstein: Gravitation beeinflusst die Metrik des Raumes (Lichtablenkung im Gravitationsfeld; Gravitationsrotverschiebung)

SRT → ART