Matrizen

Matrizen: Ein rechteckiges Zahlenschema der Form

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix} \tag{a}$$

nennt man eine $m \times n$-Matrix. Das Matrixelement $a_{i,j}$ [andere gebräuchliche Schreibweise: $(\boldsymbol{A})_{i,j}$] steht in der i-ten Zeile und in der j-ten Spalte.

Besondere Matrixformen: Ist die Zahl der Spalten und Zeilen gleich, liegt also eine $n \times n$-Matrix vor, spricht man von einer *quadratischen* Matrix.

Die Matrix $\boldsymbol{0}$, bei der alle Matrixelemente verschwinden, $a_{i,j} = 0$, heißt *Nullmatrix*.

Eine quadratische Matrix $\boldsymbol{D}$, bei der nur die Elemente auf der Hauptdiagonalen $d_{i,i}$ von Null verschieden sind,

$$\boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} d_{1,1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & d_{2,2} & & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & & d_{n-1,n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & d_{n,n} \end{pmatrix},$$

heißt *Diagonalmatrix*.

Die Diagonalmatrix $\boldsymbol{E}$ (manchmal auch $\mathbf{1}$ genannt), bei der alle Diagonalelemente den Wert $d_{i,i} = 1$ haben, heißt *Einheitsmatrix*.

Transponierte und adjungierte Matrizen: Vertauscht man in der Matrix $\boldsymbol{A}$ ihre Zeilen und Spalten, so erhält man die zu $\boldsymbol{A}$ *transponierte* Matrix, die den Namen $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ trägt. Im Beispiel aus Gleichung (a) erhält man:

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} a^{\mathrm{T}}_{1,1} & a^{\mathrm{T}}_{1,2} & \cdots & a^{\mathrm{T}}_{1,m} \\ a^{\mathrm{T}}_{2,1} & a^{\mathrm{T}}_{2,2} & \cdots & a^{\mathrm{T}}_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a^{\mathrm{T}}_{n,1} & a^{\mathrm{T}}_{n,1} & \cdots & a^{\mathrm{T}}_{n,m} \end{pmatrix} \overset{(a)}{=} \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{2,1} & \cdots & a_{m,1} \\ a_{1,2} & a_{2,2} & \cdots & a_{m,2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1,n} & a_{2,n} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

Man beachte, dass so aus einer $m \times n$- eine $n \times m$-Matrix wird. Für die einzelnen Elemente gilt entsprechend $a^{\mathrm{T}}_{i,j} = (\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})_{i,j} = a_{j,i} = (\boldsymbol{A})_{j,i}$. Man kann sich das Transponieren als Spiegelung der Matrixelemente an der Hauptdiagonalen vorstellen.

Im Fall komplexer Matrixelemente $a_{i,j}$ definiert man darüber hinaus die zu $\boldsymbol{A}$ *adjungierte* Matrix $\boldsymbol{A}^\dagger$, die zusätzlich zum Transponieren noch komplex konjugiert wird, $\boldsymbol{A}^\dagger = \bar{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{T}}$. Für ihre Elemente gilt $a^\dagger_{i,j} = (\boldsymbol{A}^\dagger)_{i,j} = \overline{a_{j,i}} = \overline{(\boldsymbol{A})_{j,i}}$.

Spur und Determinante: Für quadratische Matrizen $\boldsymbol{A}$ sind mit der Determinante $\det(\boldsymbol{A})$ und der Spur $\mathrm{Tr}(A)$ zwei wichtige Skalare definiert, die sich eindeutig aus der Matrix ergeben. Die Spur einer $n \times n$-Matrix $\boldsymbol{A}$ ist die Summe ihrer Hauptdiagonalelemente:

$$\mathrm{Tr}(\boldsymbol{A}) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$$

Symmetrische, antisymmetrische, hermitesche und antihermitesche Matrizen: Eine quadratische Matrix nennt man *symmetrisch*, wenn die Elemente $a_{i,j}$ und $a_{j,i}$, also die beiden Elemente, die bei einer Spiegelung an der Hauptdiagonalen vertauscht werden, gleich sind, $a_{i,j} = a_{j,i}$. Für symmetrische Matrizen gilt $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{A}$, das heißt die Matrix ist mit ihrer transponierten identisch.

Eine quadratische Matrix mit der Eigenschaft $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = -\boldsymbol{A}$ nennt man *antisymmetrisch* oder *schiefsymmetrisch*. Für ihre Elemente gilt $a_{i,j} = -a_{j,i}$. Daraus folgt sofort, dass alle Diagonalelemente verschwinden müssen $a_{i,j} = 0$.

Eine komplexe quadratische Matrix, die mit ihrer adjungierten identisch ist, $\boldsymbol{A}^{\dagger} = \boldsymbol{A}$, nennt man *hermitesch* oder *selbstadjungiert*. Für ihre Matrixelemente gilt $a_{i,j} = \overline{a_{j,i}}$. Entsprechend nennt man Matrizen mit der Eigenschaft $\boldsymbol{A}^{\dagger} = -\boldsymbol{A}$ oder $a_{i,j} = -\overline{a_{j,i}}$ *antihermitesch*.

Vektoren als Matrizen: Ein n-dimensionaler *Spaltenvektor*

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

kann als $n \times 1$-Matrix aufgefasst werden. Die zugehörige transponierte $1 \times n$-Matrix

$$\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$$

bezeichnet man als n-dimensionalen *Zeilenvektor*.

Gleichheit zweier Matrizen: Zwei Matrizen sind gleich, wenn alle ihre Elemente gleich sind.

Addition und Subtraktion: Zwei $m \times n$-Matrizen $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{B}$ werden addiert oder subtrahiert, indem man die Elemente, die sich an der gleichen Stelle befinden, aufaddiert oder von einander subtrahiert. Ein Beispiel ist:

$$\boldsymbol{A} \pm \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} \\ b_{2,1} & b_{2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1} \pm b_{1,1} & a_{1,2} \pm b_{1,2} \\ a_{2,1} \pm b_{2,1} & a_{2,2} \pm b_{2,2} \end{pmatrix}$$

Multiplikation einer Matrix mit einer Zahl: Wird eine Matrix mit einer Zahl multipliziert, so multipliziert man jedes Element mit dieser Zahl. Beispiel:

$$c\boldsymbol{A} = c \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ca_{1,1} & ca_{1,2} \\ ca_{2,1} & ca_{2,2} \end{pmatrix}$$

Multiplikation zweier Matrizen: Die $m \times n$-Matrix $\boldsymbol{A}$ und die $n \times p$-Matrix $\boldsymbol{B}$ lassen sich in der Form multiplizieren, dass als Produkt eine neue $m \times p$-Matrix $\boldsymbol{C}$ entsteht, deren Elemente

$$c_{i,j} = \sum_k a_{i,k} b_{k,j}$$

lauten.

Die Multiplikation merkt man sich am einfachsten, indem man die Matrizen – nach etwas Übung ganz automatisch in Gedanken – in Zeilen- und Spaltenvektoren aufteilt. Für die Matrix $\boldsymbol{A}$ erhält man m Zeilenvektoren der Dimension n:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_{Z1}^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{a}_{Z2}^{\mathrm{T}} \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_{Zm}^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}$$

Entsprechend kann man die Matrix $\boldsymbol{B}$ in p Spaltenvektoren der gleichen Dimension n aufteilen:

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & \cdots & b_{1,p} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & \cdots & b_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n,1} & b_{n,2} & \cdots & b_{n,p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{b}_{S1} & \boldsymbol{b}_{S2} & \cdots & \boldsymbol{b}_{Sp} \end{pmatrix}$$

Dann lassen sich die Elemente der Matrix $\boldsymbol{C}$ als Skalarprodukte dieser Vektoren verstehen:

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_{Z1} \cdot \boldsymbol{b}_{S1} & \boldsymbol{a}_{Z1} \cdot \boldsymbol{b}_{S2} & \cdots & \boldsymbol{a}_{Z1} \cdot \boldsymbol{b}_{Sp} \\ \boldsymbol{a}_{Z2} \cdot \boldsymbol{b}_{S1} & \boldsymbol{a}_{Z2} \cdot \boldsymbol{b}_{S2} & \cdots & \boldsymbol{a}_{Z2} \cdot \boldsymbol{b}_{Sp} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{a}_{Zm} \cdot \boldsymbol{b}_{S1} & \boldsymbol{a}_{Zm} \cdot \boldsymbol{b}_{S2} & \cdots & \boldsymbol{a}_{Zm} \cdot \boldsymbol{b}_{Sp} \end{pmatrix}$$

Natürlich schreibt man das nie in diesen Schritten auf, sondern stellt sich nur die entsprechenden Zeilen und Spalten vor und multipliziert diese im Kopf. Als Regel merkt man sich, dass Matrizen multipliziert werden, indem man Zeilen mit Spalten multipliziert.

Man beachte, dass das Matrixprodukt nicht kommutativ ist. Für das Produkt zweier Matrizen $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{B}$ heißt das im Allgemeinen $\boldsymbol{AB} \neq \boldsymbol{BA}$. Selbstverständlich sind die beiden Reihenfolgen nur dann möglich, wenn $\boldsymbol{A}$ eine $m \times n$-Matrix und $\boldsymbol{B}$ eine $n \times m$-Matrix sind.

Multiplikation einer Matrix mit einem Vektor: Eine Multiplikation eines n-dimensionalen Vektors mit einer $m \times n$-Matrix funktioniert exakt so wie die Multiplikation zweier Matrizen, wenn man einen n-dimensionalen Spaltenvektor $\boldsymbol{b}$ als $n \times 1$-Matrix auffasst:

$$\boldsymbol{Ab} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_{Z1}^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{a}_{Z2}^{\mathrm{T}} \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_{Zm}^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_{Z1} \cdot \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{a}_{Z2} \cdot \boldsymbol{b} \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_{Zm} \cdot \boldsymbol{b} \end{pmatrix}$$

Das Ergebnis ist ein m-dimensionaler Spaltenvektor. Analog gilt für einen m-dimensionalen Zeilenvektor $\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}$, den man als $1 \times m$-Matrix verstehen muss:

$$\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{A} = \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_{S1} & \boldsymbol{a}_{S2} & \cdots \boldsymbol{a}_{Sn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a}_{S1} & \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a}_{S2} & \cdots & \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a}_{Sn} \end{pmatrix}$$

Skalarprodukt als Matrixprodukt: Das Skalarprodukt $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ kann im Sinne des Matrixprodukts als Multiplikation des Zeilenvektors $\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}$ mit dem Spaltenvektor $\boldsymbol{b}$ verstanden werden:

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{b} \tag{b}$$

Dyadisches Produkt: Mit dem dyadischen Produkt

$$\boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}\boldsymbol{b}^T = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & \cdots & a_1 b_m \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & \cdots & a_2 b_m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n b_1 & a_n b_2 & \cdots & a_n b_m \end{pmatrix}$$

wird aus den Vektoren $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ eine Matrix gebildet. Dazu wird der n-dimensionale Spaltenvektor $\boldsymbol{a}$ mit dem m-dimensionalen Zeilenvektor $\boldsymbol{b}^T$ im Sinne des Matrixprodukts multipliziert. Es entsteht eine $n \times m$-Matrix

Inverse Matrix: Gibt es zu einer $n \times n$-Matrix $\boldsymbol{A}$ eine weitere $n \times n$-Matrix $\boldsymbol{B}$, für die gilt, dass das Produkt von $\boldsymbol{B}$ mit $\boldsymbol{A}$ die Einheitsmatrix $\boldsymbol{E}$ ergibt, so nennt man $\boldsymbol{B}$ die *Inverse* zu $\boldsymbol{A}$ und schreibt $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}^{-1}$. Es gilt also:

$$\boldsymbol{A}^{-1} \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A} \boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{E}$$

Nicht jede Matrix besitzt eine Inverse. Gibt es jedoch eine Inverse zu $\boldsymbol{A}$, nennt man $\boldsymbol{A}$ invertierbar. Wie man die Inverse berechnet, würde den Umfang dieses Blattes sprengen. Das kommt aber ganz sicher in den Mathematikvorlesungen vor. In ein paar Spezialfällen, die auf diesem Blatt vorkommen, erhält man die Inverse auf einem sehr einfachen Weg.

Inverse und Transponierte bei Produkten von Matrizen: Die Inverse eines Produktes $\boldsymbol{AB}$ von Matrizen ist

$$(\boldsymbol{AB})^{-1} = \boldsymbol{B}^{-1} \boldsymbol{A}^{-1} \; ,$$

wie sich leicht zeigen lässt, denn:

$$(\boldsymbol{AB})^{-1} \boldsymbol{AB} = \boldsymbol{B}^{-1} \underbrace{\boldsymbol{A}^{-1} \boldsymbol{A}}_{\boldsymbol{E}} \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}^{-1} \boldsymbol{E} \boldsymbol{B} = \underbrace{\boldsymbol{B}^{-1} \boldsymbol{B}}_{\boldsymbol{E}} = \boldsymbol{E}$$

Für die Transponierte des Produktes $\boldsymbol{AB}$ findet man mit etwas Überlegung:

$$(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} \tag{c}$$

Orthogonale Matrizen: Eine $n \times n$-Matrix

$$\boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} r_{1,1} & r_{1,2} & \cdots & r_{1,n} \\ r_{2,1} & r_{2,2} & \cdots & r_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{n,1} & r_{n,2} & \cdots & r_{n,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{r}_{S1} & \boldsymbol{r}_{S2} & \cdots \boldsymbol{r}_{Sn} \end{pmatrix}$$

nennt man orthogonal, wenn alle ihre Spaltenvektoren $\boldsymbol{r}_{Si}$ paarweise orthogonal aufeinander stehen und auf 1 normiert sind, wenn also $\boldsymbol{r}_{Si} \cdot \boldsymbol{r}_{Sj} = \delta_{i,j}$ für alle $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ gilt. Das gilt dann automatisch auch für ihre Zeilenvektoren. Ausgedrückt über das Matrixprodukt kann man diese Bedingung sehr einfach schreiben:

$$\boldsymbol{R}\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R} = \boldsymbol{E}$$

Das heißt also, das Produkt einer orthogonalen Matrix mit ihrer Transponierten ergibt die Einheitsmatrix. Oder anders ausgedrückt: Die Transponierte einer orthogonalen Matrix ist ihre Inverse.

Es lässt sich leicht beweisen, dass die Menge aller orthogonalen $n \times n$-Matrizen eine Gruppe bilden. Man nennt sie die orthogonale Gruppe $\mathrm{O}(n)$. Ebenfalls kann man einfach berechnen, dass eine orthogonale Matrix nur die Determinante $+1$ oder -1 haben kann. Die orthogonalen $n \times n$-Matrizen mit der Determinante $+1$ bilden eine eigene Gruppe, eine Untergruppe von $\mathrm{O}(n)$, die spezielle orthogonale Gruppe heißt und mit $\mathrm{SO}(n)$ bezeichnet wird.

Drehungen im Raum mit Matrizen aus $\mathrm{SO}(3)$: Die Matrizen aus $\mathrm{SO}(3)$ sind in der Mechanik besonders wichtig, weil sie Drehungen beschreiben. Wird ein Vektor $\boldsymbol{x}$ auf eine orthogonale Matrix $\boldsymbol{R}$ multipliziert, $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{R}\boldsymbol{x}$, ändert er nur seine Richtung, nicht seine Länge. Dass $\boldsymbol{x}'$ und $\boldsymbol{x}$ den gleichen Betrag haben, lässt sich sehr einfach berechnen. Dazu gehen wir vom Betragsquadrat aus und schreiben das Skalarprodukt wie oben als Matrixprodukt:

$$\boldsymbol{x}' \cdot \boldsymbol{x}' = (\boldsymbol{R}\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{R}\boldsymbol{x} \overset{\text{(b)}}{=} (\boldsymbol{R}\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}\boldsymbol{x} \overset{\text{(c)}}{=} \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \overset{\text{(b)}}{=} \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x}$$

Ein einfaches Beispiel für eine Drehung um den Winkel φ um die z-Achse ist die Matrix

$$\boldsymbol{R}_z(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Wählt man den Vektor $\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ und $\varphi = \pi/2$, sollte die Matrix den Vektor $\boldsymbol{a}$ gerade auf die y-Achse drehen. Kommt das so heraus?

$$\boldsymbol{R}_z(\pi/2)\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Schiefsymmetrische 3×3-Matrizen: Aus der Bedingung $a_{i,j} = -a_{j,i}$ für schiefsymmetrische Matrizen lässt sich ablesen, dass die Diagonalelemente $a_{i,i}$ verschwinden müssen, $a_{i,i} = 0$. In drei Dimensionen hat eine schiefsymmetrische Matrix

$$\boldsymbol{\Omega} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}$$

also nur drei Komponenten. Die Multiplikation einer solchen schiefsymmetrischen Matrix $\boldsymbol{\Omega}$ mit einem Vektor kann mit Hilfe des Vektorprodukts umgeschrieben werden in

$$\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{a} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{a} \; ,$$

wobei

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} .$$

Unitäre Matrizen: In Ergänzung zu den orthogonalen Matrizen sei noch angemerkt, dass ihre Entsprechung bei komplexen Matrizen die unitären Matrizen sind. Für unitäre Matrizen gilt:

$$\boldsymbol{U}\boldsymbol{U}^\dagger = \boldsymbol{U}^\dagger\boldsymbol{U} = \boldsymbol{E}$$

Symplektische Matrizen: Wesentlich wichtiger werden in der kanonischen Mechanik aber symplektische Matrizen werden.

Die reellen symplektischen $(2n \times 2n)$-Matrizen bilden ebenfalls eine Gruppe. Zu ihr gehören alle Matrizen $\boldsymbol{M}$, die

$$\boldsymbol{M}^\mathrm{T}\boldsymbol{J}\boldsymbol{M} = \boldsymbol{J}$$

mit der Matrix

$$\boldsymbol{J} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{0}_n & \boldsymbol{E}_n \\ -\boldsymbol{E}_n & \boldsymbol{0}_n \end{pmatrix}$$

erfüllen. Dabei sind $\boldsymbol{0}_n$ und $\boldsymbol{E}_n$ die $n \times n$-Null- und -Einheitsmatrizen. Symplektische Matrizen haben die Determinante $+1$ und die Inverse einer symplektischen Matrix lautet:

$$\boldsymbol{M}^{-1} = \boldsymbol{J}^{-1}\boldsymbol{M}^T\boldsymbol{J} \qquad \text{mit} \qquad \boldsymbol{J}^{-1} = \boldsymbol{J}^\mathrm{T} = -\boldsymbol{J}$$