

4 Festkörpertheorie: Lassen sich Majorana-Zustände in topologisch trivialen Supraleitern nachweisen?

P. San-Jose et al.: Majorana bound states from exceptional points in non-topological superconductors, Sci-Rep. 6, 21427 (2016)

#### 4.1 Majorana-Fermionen

##### 4.1.1 Ursprung in der Elementarteilchentheorie

Fermionen werden beschrieben durch die Dirac-Gleichung:

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - \frac{mc}{\hbar}) \psi = 0 \quad (4.1)$$

mit den Dirac-Matrizen

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \underline{1} & \underline{0} \\ \underline{0} & -\underline{1} \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} \underline{0} & \underline{\sigma}^i \\ -\underline{\sigma}^i & \underline{0} \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

$$\underline{\sigma}^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{\sigma}^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{\sigma}^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

- Für eine konsistente Beschreibung der Natur müssen u. a. negative Energie-Zustände der Dirac-Gleichung vermieden werden

→ Feldtheorie

- Übergang zu Feldoperatoren

$$\hat{\psi} = \int d^3p \sum_{s=1}^4 \hat{a}_{sp} \psi_{sp}(\mathbf{x}, t) \quad (4.4)$$

Summe über alle 4 Lösungen, die sich auf Grund der 4-dim. Spinoren ergeben

ebene Wellen: Eigenzustände aus (4.1) für freie Fermionen

zugehöriger Erzeuger  $\hat{\psi}^\dagger$

$\hat{a}_{\ell,p}$ ,  $\hat{a}_{\ell,p}^\dagger$  sind Erzeuger / Vernichter  
des Moden  $f_{\ell,p}(\mathbf{r}, t)$

Sie erfüllen die fermionischen Vertauschungsrelationen

$$\{\hat{a}_{\ell,p}, \hat{a}_{\ell',p'}^\dagger\} = \delta_{\ell\ell'} \delta(\mathbf{p}-\mathbf{p}') \quad (9.5a)$$

$$\{\hat{a}_{\ell,p}, \hat{a}_{\ell',p'}\} = \{\hat{a}_{\ell,p}^\dagger, \hat{a}_{\ell',p'}^\dagger\} = 0 \quad (9.5b)$$

- Aber sinnvolle physikalische Interpretation ergibt sich nur, wenn man den Operator der Energie (Hamiltonoperator) ausdrückt als

$$\hat{H} = \int d^3p \, \underbrace{E_p}_{\sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4}} \left\{ \sum_{\ell=1,2} \hat{a}_{\ell,p}^\dagger \hat{a}_{\ell,p} + \sum_{\ell=3,4} \hat{b}_{\ell,p}^\dagger \hat{b}_{\ell,p} \right\} \quad (9.6a)$$

$$\text{mit } \hat{b}_{3,4,p} = \hat{a}_{3,4,p}^\dagger \quad (9.6b)$$

→ Interpretation als Antiteilchen.

- Insbesondere sind durch (9.6a,b) Teilchen und Antiteilchen unterscheidbar.
- Das ist nicht zwangsweise immer so, die Operatoren stammen aus der kanonischen Quantisierung

$$a \rightarrow \hat{a}, \quad a^* \rightarrow \hat{a}^\dagger \quad (9.7)$$

der Modenentwicklungskoeffizienten  $a$  bzw.  $a^*$   
oder  $\psi \rightarrow \hat{\psi}$ ,  $\psi^* \rightarrow \hat{\psi}^\dagger$  der Feldoperatoren

Wenn es keine komplexen  $\psi$  sondern nur reelle gibt,  
weil reelle Felder gesucht sind / als Lösungen auftreten  
gilt  $\psi = \psi^*$  und somit  $\hat{\psi} \rightarrow \hat{\psi}^\dagger$

- Teilchen und Antiteilchen sind nicht unterscheidbar!
- Jedes Teilchen ist sein eigenes Antiteilchen!

• Bei Bosonen ohne weiteres möglich:

- Klein-Gordon-Feld
- Maxwell-Feld

• Warum geht das bei Fermionen aus (4.1) nicht?

Die Dirac-Gleichung enthält reelle und imaginäre  
Matrizen in einer Summe  $\rightarrow$  kann nur echte  
komplexe Lösungen  $\psi$  haben.

$\rightarrow$  Die Dirac-Gleichung erlaubt somit keine  
Fermionen, die ihre eigenen Antiteilchen sind.

• Aber: Einziges Notwendigkeit die Matrizen (4.2)  
einzuführen, nur die Suche nach einer DGL  
erster Ordnung, die mit den Lösungen der  
Klein-Gordon-Gleichung verträglich sind.

$\rightarrow$  Die spezielle Wahl der Darstellung (4.2)  
ist nicht verlangt, nur das Erfüllen  
der Clifford-Algebra

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu} \quad (4.8a)$$

oder explizit  $(\gamma^0)^2 = -(\gamma^i)^2 = 1$  (4.8b)

$$\gamma^\mu \gamma^\nu = -\gamma^\nu \gamma^\mu \text{ für } \mu \neq \nu \quad (4.8c)$$

E. Majorana (1937):

Es gibt auch eine Satz rein imaginärer Matrizen,  
der das erfüllt:

$$\begin{aligned} \vec{f}^0 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \vec{f}^1 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \vec{f}^2 &= \begin{pmatrix} i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \end{pmatrix}, & \vec{f}^3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.5) \end{aligned}$$

→ Dirac-Gleichung wird reell

→ Majorana-Fermionen können auftreten: rein reelle Zustände

- In der Natur wurden bis heute keine Majorana-Fermionen nachgewiesen.

#### 4.1.2 In Festkörpern

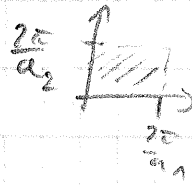
- Ansatz: Majorana-Fermionen treten als Quasiteilchen, in Vielteilchensystemen auf.

Voraussetzung: Es gibt geeignete Manipulationsweisen (Wechselwirkungen), die sie als Eigenzustände aufheben lassen.

- viel versprechend: Grenzschichten zwischen zwei Materialien, die topologisch unterscheidbare Zustände zulassen, denn betrachte

eine topologische Invariante, z.B. Chern-Zahl

$$C_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{\text{1. BZ.}} \langle \partial_{\mu} \psi | \partial_{\nu} \psi \rangle d k^{\mu} \times d k^{\nu} \quad (6.10)$$



2-dim. Brillouin-Zone

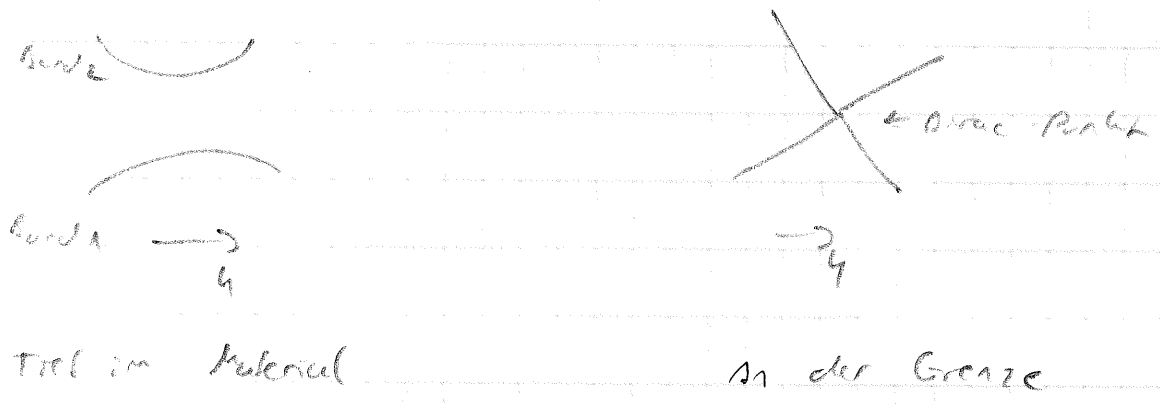
Nun gehen wir uns was Grundzustände in beiden Materialien

Material 1  $C_1 = m_1 \quad \psi_1$

Material 2  $C_2 = m_2 \neq m_1 \quad \psi_2$

→ Die Wellenlängen unterscheiden sich in einer topologisch Invarianten, können nicht stetig ineinander überführt werden. → Physik an der Grenzschicht nicht stetig? → nicht sinnvoll!

• Das Problem kann vermieden werden, wenn mehrere Bänder / Zustände mischen. Durch die Überlagerung mehrerer Zustände lassen sich  $\psi_1$  und  $\psi_2$  ineinander überführen.



→ Schließen der Bandlücke

→ von der Dirac - Punkt: lineare Dispersionsrelation  
 mit bei der Dirac - Gleichung für ein masseloses  
 Teilchen.

→ zugehöriger Hamilton - Operator

$$H = \sigma \cdot \nabla$$

→ Lösungen verhalten sich wie Teilchen aus der  
 Dirac - Gleichung mit Löchern als Antiteilchen

→ Majorana - Fermionen können existieren.

• Gesucht sind ungeladene Bosonteilchen, da bei  
 Elektronen und Löchern immer noch die Ladung  
 unterscheidbar ist.

4.1.3 Einfaches Beispiel: Kitzler - Kette

$$H = -\mu \sum_i c_i^\dagger c_i - \sum_{j=0}^{N-1} (-t) (c_{j+1}^\dagger c_j - c_j^\dagger c_{j+1})$$

Fermion. Potential
↑ Kipfterm

$$-K_1 (c_j c_{j+1} - c_{j+1}^\dagger c_j^\dagger) \tag{4.11}$$

↪ p - wellen - Paarungsterm



• Eine über zur Majorana-Darstellung

$$\delta_{j,1} = c_j + c_j^\dagger, \quad \delta_{j,2} = i(c_j^\dagger - c_j) \quad (4.10)$$

Dann erhält man für  $\mu=0, t=|A| \neq 0$

$$H \stackrel{(4.11)}{=} \stackrel{(4.12)}{-it} \sum_{j=0}^{N-1} \delta_{j,1} \delta_{j+1,2} \quad (4.13)$$

Bildlich



$\delta_{0,2}, \delta_{N,1}$  — sind ungepaart

— treten in (4.13) nicht auf

Randzustände mit Energie Null und Eigenzustände von  $H$  in (4.13)  $\rightarrow$  Majorana-Felchen als Quasiteilchen!

## 4.2. Resonanzen als komplexe Energien

• Zerfallende Zustände lassen sich in Form der stationären Schrödingergleichung schreiben als

$$\psi(t) = e^{-i\tilde{E}t/\hbar} \psi(0) \quad \text{mit} \quad \tilde{E} = E - i\frac{\Gamma}{2} \quad (4.14)$$

denn  $|\psi(t)|^2 = e^{-\Gamma t} |\psi(0)|^2$   
 $\uparrow \Gamma$  ist Zerfallsrate

Diese treten auf:

(i) Bei komplexen Potentialen, die effektiv einen Verlust modellieren  $\text{Im}(V) < 0$

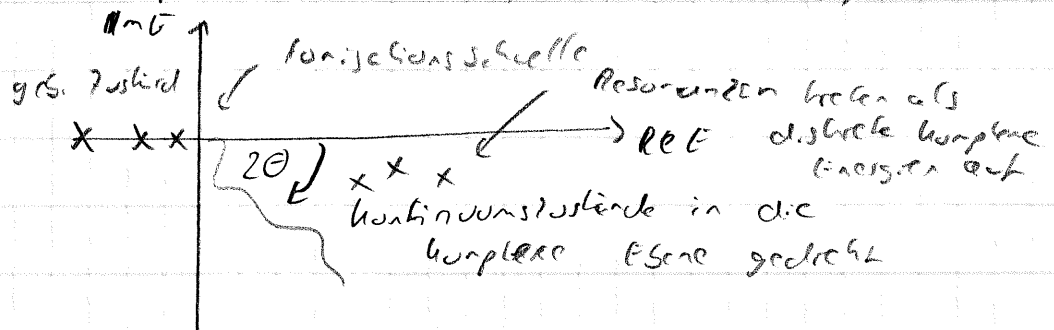
-> s. Arbeit

(ii) In Systemen, die Resonanzen aufweisen mit speziellen Rechenmethoden

Beispiel: komplexe Streuung eines Hamiltonoperators

$$r \rightarrow r e^{i\theta} \uparrow \text{Polkonstante}$$

Effekt: Spektrum eines offenen Quantensystems



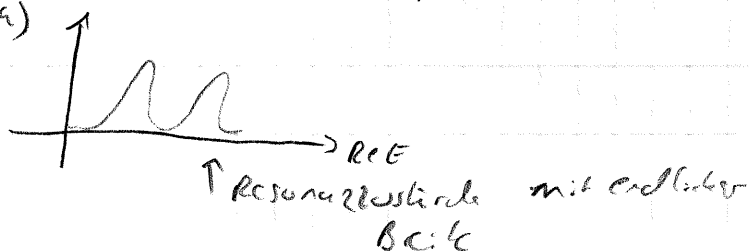
Andere Berechnungsmethode: Betrachte Streuproblem

$$\psi = A(k) e^{-i k \cdot r} + B(k) e^{i k \cdot r} \quad \leftarrow \text{auslaufende Welle} \quad (4.15)$$

$$\sim e^{-i k \cdot r} + S(k) e^{i k \cdot r}$$

↑  
einlaufende Welle  
↑  
Streuamplitude

Resonanzen sind Pole in der komplexen Ebene von  $k$





- Egal ob das Potential nicht reell ist oder eine komplexe Skalierung durchgeführt wird, der Hamiltonoperator ist nicht hermitesch.

→ Bekannte Tatsachen aus der QM gelten nicht mehr: z. B. Zustände müssen nicht mehr orthogonal sein.

Extremfall: exceptioneller Punkt

Zwei Zustände (Resonanzen) sind identisch

→ identische Energie

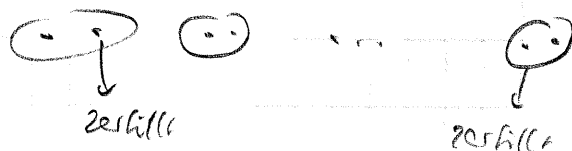
→ identische Wellenfunktion

### 4.3 Grundlegendes Konzept im Ansatz

Es wird nicht versucht, ungepaarte Majorana-Zustände am Rand zu konstruieren, also nicht

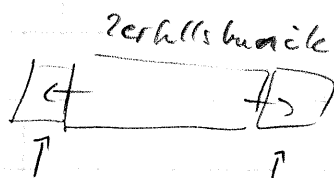


sondern in einem Paar einen Zustand verhalten zu lassen:



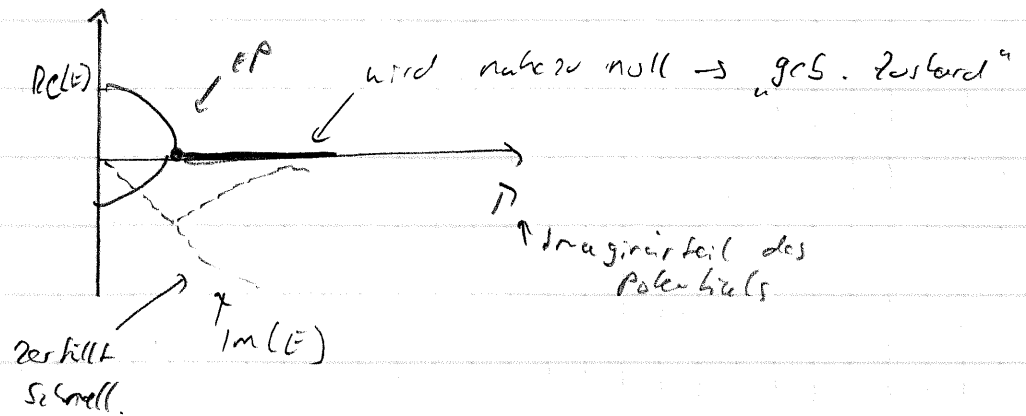
→ übrig bleibt ein ungepaarter Majorana-Zustand

Dazu



Kopplung an weiteres Material

Zwei Eigenwerte zeigen dann folgendes prinzipielles Verhalten, das das entstehen ungepaarter Majorana-Zustände aufzeigt:



$\rightarrow$  Es verbleibt ein (nahezu) stabiler Zustand an Rand, der die Charakteristika von Majorana-Fermionen aufweist.