

Theoretische Quantenoptik II

Prof. Dr. Günter Mahler
Ausarbeitung von Georg Reuther

Wintersemester 2005/06
Version 05.2006

Inhaltsverzeichnis

I	Quantenfeldtheorie gekoppelter Licht-Materie-Modelle	8
I.1	Einleitung und Motivation	8
I.2	Kanonische Feldquantisierung	9
I.2.1	Notation	9
I.2.2	Euler-Lagrange-Gleichung für Felder	10
I.2.3	Hamilton-Funktion	10
I.2.4	Kanonische Feldquantisierung	11
I.3	Lichtfeld mit Quellterm	11
I.3.1	Maxwell-Gleichungen	11
I.3.2	Lagrange-Dichte	12
I.3.3	Modenoperatoren	13
I.3.4	Zustände	15
I.4	Schrödinger-Felder mit Quellterm	16
I.4.1	„Freies“ Schrödinger-Feld	16
I.4.2	Quellterm (elektrodynamische Potentiale)	17
I.4.3	Modendarstellung	18
I.4.4	Zustände	20
I.5	Dynamik	21
I.5.1	Heisenberg-Bild („Poisson-Klammer“)	21
I.5.2	Zeitentwicklungsoperator	22
I.5.3	Schrödinger-Bild	23
I.6	Zusammenfassung	24
I.7	Hilfsformeln	26
II	Photonen und Atome	29
II.1	Dipol-Kopplung	29
II.1.1	Modenselektion	29
II.1.2	Kopplung	30
II.1.3	Schwerpunktsbewegung („Atomfalle“)	31
II.1.4	Quantisierung	32
II.2	Jaynes-Cummings-Modell	32
II.2.1	Definition	32
II.2.2	Dressed States (quantenmechanisch)	33
II.2.3	Eigenfunktionen	36
II.2.4	Rabi-Oszillationen	37
II.2.5	Spin-Boson-Modell	39

II.3	Ein-Atom-Laser	39
II.3.1	Einführung	39
II.3.2	Herstellung von (Resonator-) Fock-Zuständen	40
II.3.3	„Trapping States“	41
II.4	Cummings-Kollaps und Wiederkehr	43
II.4.1	Kohärente Zustände	43
II.4.2	Rabi-Oszillationen für kohärente Feldzustände	43
II.4.3	Berechnung der Kollapszeit	44
II.4.4	Abschätzung der Wiederkehrzeit	46
II.5	Verallgemeinerte Bloch-Gleichungen	47
II.5.1	Operatordarstellungen im Liouville-Raum	47
II.5.2	Dynamik	48
II.6	Getriebenes Zwei-Niveau-System	50
II.6.1	Bloch-Gleichung für getriebenes Zwei-Niveau-System	50
II.6.2	Transformation auf ein rotierendes Bezugssystem	51
II.6.3	Stationäre Lösung	52
II.6.4	Nicht-stationäre Lösungen	56
II.6.5	Pulse	58
II.7	Stroboskopische Invarianz: Echos	59
II.7.1	Problemstellung	59
II.7.2	Zyklische Permutation im Zustandsraum	59
II.7.3	Spin-„Dephasing“ und Spinecho	61
II.8	Getriebene Drei-Niveau-Atome	63
II.8.1	Was ist neu hier?	63
II.8.2	RWA als zeitabhängige unitäre Transformation	63
II.8.3	Dunkelzustände	66
II.9	Lichtausbreitung im Zwei-Niveau-Medium	69
II.9.1	Komplexer Polarisationsvektor $\mathbf{P}(\mathbf{R}_0, t)$	69
II.9.2	„Envelope“-Näherung der inhomogenen Wellengleichung	70
II.9.3	Selbstinduzierte Transparenz	72
II.10	Ultra-langsameres Licht	75
II.10.1	Brechungsindex	75
II.10.2	Ensemble von Drei-Niveau-Atomen	77
II.11	Kubisches Schrödinger-Feld S_3 : Solitonen	80
II.11.1	Bewegungsgleichung	80
II.11.2	Solitonen: klassisch	81
II.12	Nichtlineare Strahlungsfelder	84
II.12.1	Phänomenologische Bewegungsgleichung	84
II.12.2	Effektive Lagrange-Dichten	85
II.12.3	Kubische Wellengleichung für das Strahlungsfeld	85
II.12.4	Selbstfokussierung	87
II.12.5	Überblick: Solitonen	88
II.13	Nichtlineare Hamilton-Modelle	89
II.13.1	Hamilton-Dichten	89

II.13.2	Darstellung durch Modenoperatoren	90
II.13.3	Strahlteiler-Hamiltonian	90
II.13.4	Nichtlineare Kopplung $\chi^{(2)}$: Drei-Moden-Fall	91
II.13.5	Squeezer-Hamiltonian	91
II.13.6	Kerr-Hamiltonian	92
II.13.7	Anmerkung: Nichtlineare Prozesse im Ein-Moden-Fockraum	92
II.14	Zur räumlichen Auflösung von Lichtfeldern	93
II.14.1	Fundamentales Coarse-Graining?	93
II.14.2	Grenzflächen-Bedingungen	94
II.14.3	Optische Antennen	95
II.14.4	Optische Punkte und Löcher	95
II.15	Zusammenfassung	95
III	Offene Systeme	97
III.1	Heisenberg-Bild: Quanten-Langevin-Gleichung	98
III.1.1	Brownsches Teilchen	98
III.1.2	Quanten-Langevin-Gleichung	100
III.2	Lindblad-Mastergleichung	101
III.2.1	Grundlagen der Gruppentheorie	101
III.2.2	Unitäre Dynamik	102
III.2.3	Irreversible Dynamik	103
III.2.4	Nicht-hermitesche Hamilton-Operatoren	105
III.2.5	Äquivalenztransformationen	105
III.3	Dämpfungsmodelle	107
III.3.1	Dephasierung	107
III.3.2	Selektiver Übergangskanal	109
III.3.3	Nicht-selektive Übergangskanäle	109
III.3.4	Übergangskanäle beim Harmonischen Oszillator	110
III.3.5	Caldeira-Legett-Modell	111
III.4	Einsteinsches Ratengleichungsmodell	113
III.4.1	Modell	113
III.4.2	Vergleich mit Planck-Strahlungsgesetz	114
III.5	Gedämpfte Bloch-Gleichungen	115
III.5.1	Dämpfungsmodell	115
III.5.2	Bloch-Vektordarstellung	116
III.5.3	Gesamte Bewegungsgleichung	117
III.5.4	Stationäre Lösung	118
III.5.5	Freier Induktionszerfall	119
III.6	Kollektive spontane Emission: Superstrahlung	120
III.6.1	Kollektives Jaynes-Cummings-Modell	120
III.6.2	Eigenwertproblem zu \hat{H}_A	120
III.6.3	Permutationssymmetrie	121
III.6.4	Kollektive spontane Emission	122
III.6.5	Kollektive Gesamtübergangsrate ($n > 0$)	123

III.7 Resonanzfluoreszenz	124
III.8 Quantenschwebungen	127
III.8.1 Kohärenter Anteil	127
III.8.2 Nicht-selektive Dämpfung: ν -Szenario	127
III.8.3 Nicht-selektive Dämpfung: λ -Szenario	130
III.8.4 Anmerkungen	131
III.9 QND-Messungen	132
III.9.1 „Quantum-demolition“-Experiment	132
III.9.2 QND-Variable	133
III.9.3 Messmodell: QND-Bedingungen	134
III.9.4 QND-Photonenzahlmessung	135
III.10 Mastergleichung des Ein-Moden-Lasers	138
III.10.1 Hamilton-Modell	138
III.10.2 Pumpmodell	138
III.10.3 Dämpfungsmodelle	139
III.10.4 Mastergleichungen	139
III.10.5 Bewegungsgleichung für Matrixelemente	140
III.10.6 Weitere Bewegungsgleichungen	141
III.10.7 Struktur der Gleichung in Fock-Darstellung	142
III.10.8 Wo bleibt die optische Kohärenz?	143

Literaturverzeichnis

- [1] R. Loudon, *The Quantum Theory of Light*, 1983
- [2] D. J. Walls, G. J. Milburn, *Quantum Optics*, 1994
- [3] P. Meystre, M. Sargent II, *Elements of Quantum Optics*, 1991
- [4] H. Haken, *Licht und Materie I*, 1979
- [5] W. Vogel, D. G. Welsch, *Lectures on Quantum Optics*, 1994
- [6] H. Carmichael, *An Open System Approach to Quantum Optics*, *Lecture Notes in Physics* m 18, 1993
- [7] P. R. Berman (ed.), *Cavity QED*, Academic, 1994
- [8] L. Mandel, E. Wolf, *Optical Coherence and Quantum Optics*, Cambridge UP, 1995
- [9] M. O. Scully, M. Zubary, *Quantum Optics*, Cambridge UP, 1997
- [10] G. Mahler, V. Weberruß, *Quantum Networks*, Springer, 1995, 1998
- [11] H. Paul: *Photonen*, Vieweg, 1995
- [12] C. Cohen-Tannoudji et al, *Photons and Atoms* (S. 16-45), Wiley, 1989
- [13] H. A. Bachor, *A Guide to Experiments in Quantum Optics*, Wiley-VCH, 1998
- [14] H. Römer, *Theoretical Optics*, VCH, 2005
- [15] H. Haus, *Electromagnetic Noise and Quantum Optical Measurements*, Springer
- [16] U. Leonhardt, *Measuring the Quantum State of Light*, Cambridge UP, 1997
- [17] H.-P. Breuer et al, *The Theory of Open Quantum Systems*, Oxford UP, 2003

I Quantenfeldtheorie gekoppelter Licht-Materie-Modelle

I.1 Einleitung und Motivation

Wie beschreibt man Licht?

Wie beschreibt man Materie?

Wie beschreibt man Wechselwirkung?

Was braucht man sonst noch?

Messung, Kontrolle, Beschreibung des „Rests der Welt“

Ausgangspunkt: Klassische Elektrodynamik

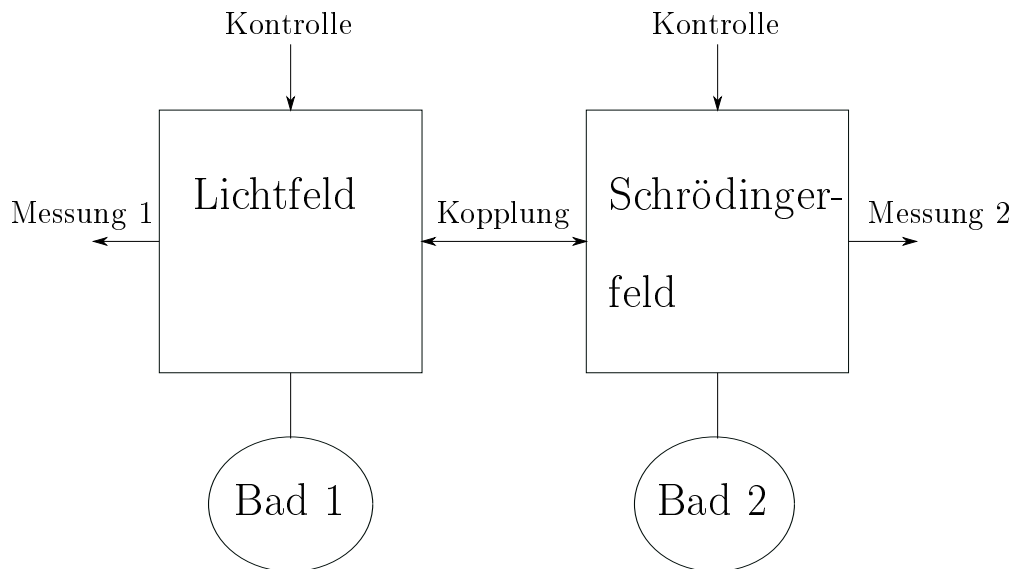
- Maxwell-Gleichungen
- Klassische (phänomenologische) Materiemodelle
- Materialklassen: Dielektrika, Magnetika, Metalle
- Schrödinger-Gleichung (1. Quantisierung)

Ziel: Photonen in Wechselwirkung mit elektronischen Nanostrukturen, z. B. Jaynes-Cummings-Modell; Strukturen freilegen

Methode: Quantenfeldtheorie gekoppelter Felder

Szenario:

Lichtfeld	Transversales Maxwell-Feld
Materiefelder	Mikroskopisch: Schrödinger-Felder $\psi(\mathbf{r}, t)$ Phänomenologisch: Auslenkungsfelder (Phononen) $\mathbf{w}(\mathbf{r}, t)$ Polarisationsfelder $\mathbf{P}(\mathbf{r}, t)$ Magnetisierungsfelder $\mathbf{M}(\mathbf{r}, t)$
Kontrolle:	Zeitunabhängige Modellparameter (z. B. externe Potentiale) Zeitabhängige Modellparameter (nicht-autonom)
Messung	An Lichtfeld, Materie und Gesamtsystem (z. B. „dressed states“)



I.2 Kanonische Feldquantisierung

Literatur:

E. M. Henley, W. Thirring, Elementary Quantum Field Theory

H. Goldstein, Classical Mechanics

C. Cohen-Tannoudji et al, Photons and Atoms—Introduction to Quantum Electrodynamics

I.2.1 Notation

Koordinaten: $\{r_j, t\}$ = klassische Parameter, „Referenz“. Die r_j sind unabhängig untereinander und von der Zeit.

$$\frac{dr_j}{dr_k} = \delta_{jk} \quad \frac{dr_j}{dt} = 0 \quad (\text{I.2.1})$$

Feld:

$$\varphi(r_j, t) \quad (\text{I.2.2})$$

Vektorfeld:

$$\varphi_k(r_j, t) \quad k = 1, 2, 3 \quad (\text{I.2.3})$$

Feldableitungen:

$$\frac{d}{dr_j} \varphi_k = \frac{\partial}{\partial r_j} \varphi_k = \varphi_{k,j} \quad (\text{I.2.4})$$

$$\frac{d}{dt} \varphi_k = \frac{\partial}{\partial t} \varphi_k = \dot{\varphi}_k \quad (\text{I.2.5})$$

Anmerkung: (I.2.4) ist die totale Ableitung nach r_j für festes r_k ($k \neq j$) und festes t . Entsprechend (I.2.5).

Feldfunktion: $F = F(\varphi_k(\mathbf{r}_j, t))$

$$\frac{d}{d\mathbf{r}_j} F = \sum_k \frac{\partial F}{\partial \varphi_k} \varphi_{k,j} \quad (\text{I.2.6})$$

$$\frac{d}{dt} F = \sum_k \frac{\partial F}{\partial \varphi_k} \dot{\varphi}_{k,j} \quad (\text{I.2.7})$$

Verallgemeinerung: Sei $F = F(\varphi_k \dot{\varphi}_{k,j}, \mathbf{r}_j, t)$

$$\frac{d}{d\mathbf{r}_j} F = \sum_k \left\{ \frac{\partial F}{\partial \varphi_k} \varphi_{k,j} + \frac{\partial F}{\partial \dot{\varphi}_k} \dot{\varphi}_k \right\} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_j} F \quad (\text{I.2.8})$$

1.2.2 Euler-Lagrange-Gleichung für Felder

„Lokale“ Feldtheorie: Lagrange-Dichte \mathcal{L} ist eine Funktion von Feldableitungen endlicher Ordnung.

Typisch:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\varphi_k, \varphi_{k,j}, \dot{\varphi}_k; \mathbf{r}_l) \quad (\text{I.2.9})$$

Lagrange-Funktional:

$$L[\varphi_k, \varphi_{k,j}, \dot{\varphi}_k] = \int d^3\mathbf{r} \mathcal{L} \quad (\text{I.2.10})$$

Wirkungsfunktional:

$$W[\varphi_k, \varphi_{k,j}, \dot{\varphi}_k] = \iint d^3\mathbf{r} dt \mathcal{L} \quad (\text{I.2.11})$$

Hamilton-Prinzip:

$$\delta W = 0 \quad (\text{I.2.12})$$

Daraus folgen die **Euler-Lagrange-Gleichungen**:

$$\boxed{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}_k} - \sum_j \frac{d}{d\mathbf{r}_j} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_{k,j}} = 0} \quad (\text{I.2.13})$$

1.2.3 Hamilton-Funktion

Konjugierte Impulsdichte:

$$\Pi_k \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}_k} = \Pi_k(\varphi_l, \dot{\varphi}_l, \varphi_{l,j}) \quad (\text{I.2.14})$$

Falls dieser Ausdruck invertierbar ist:

$$\dot{\varphi}_k = \dot{\varphi}_k(\varphi_l, \varphi_{l,j}, \Pi_l) \quad (\text{I.2.15})$$

Legendre-Transformation:

$$\mathcal{H}(\varphi_l, \varphi_{l,j}, \Pi_l) = \sum_k \Pi_k \dot{\varphi}_k - \mathcal{L} \quad (\text{I.2.16})$$

wobei \mathcal{H} die Hamilton-Dichte ist. Hamilton-Funktional:

$$H[\varphi_l, \varphi_{l,j}, \Pi_l] = \int d^3\mathbf{r} \mathcal{H} \quad (\text{I.2.17})$$

I.2.4 Kanonische Feldquantisierung

Einführung von Feldoperatoren:

$$\begin{aligned} \varphi_j(\mathbf{r}_i, t) &\longrightarrow \hat{\varphi}_j(\mathbf{r}_i, t) \\ \Pi_j(\mathbf{r}_i, t) &\longrightarrow \hat{\Pi}_j(\mathbf{r}_i, t) \end{aligned} \quad (\text{I.2.18})$$

mit

$$\boxed{[\hat{\Pi}_j(\mathbf{r}_i, t), \hat{\varphi}_j(\mathbf{r}'_i, t)] = -i\hbar\delta_{jj'}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')} \quad (\text{I.2.19})$$

Hamilton-Operator:

$$\hat{H}[\varphi_l, \varphi_{l,j}, \Pi_l] = \int d^3\mathbf{r} \hat{\mathcal{H}}(\varphi_l, \varphi_{l,j}, \Pi_l) \quad (\text{I.2.20})$$

I.3 Lichtfeld mit Quellterm

I.3.1 Maxwell-Gleichungen

In SI-Einheiten:

$$\text{div } \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0 \quad (\text{I.3.1})$$

$$\text{div } \mathbf{B} = 0 \quad (\text{I.3.2})$$

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} \quad (\text{I.3.3})$$

$$\text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mu_0 \mathbf{j} \quad (\text{I.3.4})$$

Erzwingen die Bedingungen (I.3.2), (I.3.3) durch die Einführung von elektrodynamischen Potentialen:

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A} \quad (\text{I.3.5})$$

$$\mathbf{E} = -\text{grad } \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (\text{I.3.6})$$

Coulomb-Eichung (Strahlungseichung):

$$\text{div } \mathbf{A} \equiv 0 \quad (\text{I.3.7})$$

$$\begin{aligned} \nabla^2 \varphi &= -\rho/\varepsilon_0 & (I.3.8) \\ \nabla^2 \mathbf{A} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{A} &= -\mu_0 \mathbf{J}^T & (I.3.9) \\ \mathbf{J}^T &= -\varepsilon_0 \operatorname{grad} \frac{\partial \phi}{\partial t} & (I.3.10) \end{aligned}$$

Transversaler Strom \mathbf{J}^T und longitudinaler Strom \mathbf{J}^L :

$$\begin{aligned} \mathbf{J} &= \mathbf{J}^T + \mathbf{J}^L & \operatorname{div} \mathbf{J}^T &= 0 \\ \operatorname{div} \mathbf{J}^L &= \varepsilon_0 \operatorname{grad} \frac{\partial \phi}{\partial t} & \operatorname{rot} \mathbf{J}^L &= 0 \end{aligned}$$

Wegen der Coulomb-Eichung ist $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$. Setze

$$\phi = 0 \quad \implies \quad \mathbf{J}^L = 0$$

Nur Gleichung (I.3.9) ist zu betrachten!

I.3.2 Lagrange-Dichte

Behauptung: Gleichung (I.3.9) ist die Lagrange-Gleichung zu

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_S & (I.3.11) \\ \mathcal{L}_0 &= \frac{1}{2} \varepsilon_0 \sum_{\mathfrak{l}} \dot{A}_{\mathfrak{l}} \dot{A}_{\mathfrak{l}} - \frac{1}{2\mu_0} \sum_{\mathfrak{l}\mathfrak{l}'} A_{\mathfrak{l}\mathfrak{l}'} A_{\mathfrak{l}\mathfrak{l}'} & (I.3.11) \\ \mathcal{L}_S &= \sum_{\mathfrak{l}} j_{\mathfrak{l}}^T A_{\mathfrak{l}} = \mathbf{J}^T \cdot \mathbf{A} & (I.3.12) \end{aligned}$$

mit (I.3.12) als Quellterm (source S). Vektorschreibweise:

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2} \varepsilon_0 (\dot{\mathbf{A}}_{\mathfrak{l}})^2 - \frac{1}{2\mu_0} (\nabla \otimes \mathbf{A}) : (\nabla \otimes \mathbf{A}) \quad (I.3.13)$$

Der Beweis folgt durch Einsetzen von \mathcal{L} in die Euler-Lagrange-Gleichung (I.2.13) und Vergleich mit (I.3.12).

Konjugierter Impuls:

$$\Pi_{\mathfrak{m}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_{\mathfrak{m}}} = \varepsilon_0 \dot{A}_{\mathfrak{m}} = -\varepsilon_0 \mathbf{E}_{\mathfrak{m}}^T \quad (I.3.14)$$

Hamilton-Dichte:

$$\mathcal{H} = \sum_{\mathfrak{l}} \Pi_{\mathfrak{l}} \dot{A}_{\mathfrak{l}} - \mathcal{L} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_S$$

$$\mathcal{H}_0 = \frac{1}{2\varepsilon_0} \sum_{\mathbf{l}} \Pi_{\mathbf{l}} \Pi_{\mathbf{l}} + \frac{1}{2\mu_0} \sum_{\mathbf{l}, \mathbf{l}'} \mathbf{A}_{\mathbf{l}, \mathbf{l}'} \mathbf{A}_{\mathbf{l}, \mathbf{l}'} \quad (\text{I.3.15})$$

$$\mathcal{H}_S = - \sum_{\mathbf{l}} \mathbf{J}_{\mathbf{l}}^T \mathbf{A}_{\mathbf{l}} \quad (\text{I.3.16})$$

Hamilton-Funktional:

$$\mathbf{H} = \int d^3 \mathbf{r} \mathcal{H} \quad (\text{I.3.17})$$

Quantisierung:

$$\hat{\mathbf{H}}_0 [\hat{\Pi}_{\mathbf{m}}, \hat{\mathbf{A}}_{\mathbf{m}}] = \frac{1}{2} \int d^3 \mathbf{r} \left(\frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{\mathbf{l}} \hat{\Pi}_{\mathbf{l}} \hat{\Pi}_{\mathbf{l}} + \frac{1}{\mu_0} \sum_{\mathbf{l}, \mathbf{l}'} \hat{\mathbf{A}}_{\mathbf{l}, \mathbf{l}'} \hat{\mathbf{A}}_{\mathbf{l}, \mathbf{l}'} \right) \quad (\text{I.3.18})$$

$$\hat{\mathbf{H}}_S [\hat{\mathbf{A}}_{\mathbf{m}}] = - \int d^3 \mathbf{r} \sum_{\mathbf{l}} \mathbf{J}_{\mathbf{l}}^T \hat{\mathbf{A}}_{\mathbf{l}} \quad (\text{I.3.19})$$

$$[\hat{\Pi}_{\mathbf{m}}(\mathbf{r}_i, t), \hat{\mathbf{A}}_{\mathbf{m}'}(\mathbf{r}'_i, t)] = -i\hbar \delta_{\mathbf{m}\mathbf{m}'} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (\text{I.3.20})$$

Anmerkung: Die Bedingung $\text{div } \mathbf{A} = 0$ ist zusätzlich zu berücksichtigen!

Physikalische Felder:

$$\hat{\mathbf{E}}_{\mathbf{l}}^T = -\frac{1}{\varepsilon_0} \hat{\Pi}_{\mathbf{l}} = -\dot{\hat{\mathbf{A}}}_{\mathbf{l}} \quad (\text{I.3.21})$$

$$\hat{\mathbf{B}}_{\mathbf{l}}^T = \text{rot } \hat{\mathbf{A}} \quad (\text{I.3.22})$$

I.3.3 Modenoperatoren

Suche eine allgemeine Lösung der homogenen Wellengleichung (I.3.9):

$$\Delta \hat{\mathbf{A}} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \hat{\mathbf{A}} = 0 \quad \varepsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2} \quad (\text{I.3.23})$$

Ansatz:

$$\hat{\mathbf{A}}_{\mathbf{l}} = \hat{\mathbf{A}}_{\mathbf{l}}^{(+)} + \hat{\mathbf{A}}_{\mathbf{l}}^{(-)} \quad (\text{I.3.24a})$$

$$\hat{\mathbf{A}}_{\mathbf{l}}^{(+)} = \hat{\mathbf{a}}(\mathbf{t}) \mathbf{u}_{\mathbf{l}}(\mathbf{r}) \quad (\text{I.3.24b})$$

$$\hat{\mathbf{A}}_{\mathbf{l}}^{(-)} = \hat{\mathbf{a}}^\dagger(\mathbf{t}) \mathbf{u}_{\mathbf{l}}^*(\mathbf{r}) \quad (\text{I.3.24c})$$

Daraus folgt durch Einsetzen in die homogene Wellengleichung:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \hat{\mathbf{a}} + \omega^2 \hat{\mathbf{a}} &= 0 \\ \Delta \mathbf{u}_{\mathbf{l}} + \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{u}_{\mathbf{l}} &= 0 \\ \text{div } \mathbf{u} &= 0 \end{aligned} \quad (\text{I.3.25})$$

Lösung (beachte die Vorzeichenkonvention):

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{a}}(t) &= \hat{\mathbf{a}}(0) e^{-i\omega t} \\ \hat{\mathbf{a}}^\dagger(t) &= \hat{\mathbf{a}}^\dagger(0) e^{i\omega t}\end{aligned}\quad (\text{I.3.26})$$

Bezüglich \mathbf{u}_l existieren periodische Randbedingungen mit \mathbf{V} als Periodizitätsvolumen und \mathbf{k}, ν als Modenindizes:

$$\mathbf{u}_{l|\mathbf{k}\nu}(\mathbf{r}) \equiv \left(\frac{\hbar}{2\varepsilon_0 \omega_{\mathbf{k}} \mathbf{V}} \right)^{1/2} \mathbf{e}_{l|\mathbf{k}\nu} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \quad (\text{I.3.27})$$

wobei für die zu \mathbf{k} orthogonalen Polarisationsvektoren gilt:

$$\sum_l \mathbf{e}_{l|\mathbf{k}\nu} \mathbf{e}_{l|\mathbf{k}\nu'} = \delta_{\nu\nu'} \quad (\text{I.3.28})$$

$\nu = 1, 2$ ist der Polarisationsindex. Orthonormalität:

$$\int d^3\mathbf{r} \sum_l \mathbf{u}_{l|\mathbf{k}\nu}(\mathbf{r}) \mathbf{u}_{l|\mathbf{k}'\nu'}^*(\mathbf{r}) = \frac{\hbar}{2\varepsilon_0 \omega_{\mathbf{k}}} \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \delta_{\nu\nu'} \quad (\text{I.3.29})$$

Allgemeine Lösung:

$$\boxed{\hat{\mathbf{A}}_l^{(+)} = \sum_{\mathbf{k}, \nu} \hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{k}\nu}(t) \mathbf{u}_{l|\mathbf{k}\nu}(\mathbf{r})} \quad (\text{I.3.30})$$

Inverse Transformation (mit (I.3.29), (I.3.30)):

$$\begin{aligned}\int d^3\mathbf{r} \sum_l \mathbf{u}_{l|\mathbf{k}'\nu'}^* \hat{\mathbf{A}}_l^{(+)}(\mathbf{r}, t) &= \sum_{\mathbf{k}, \nu} \hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{k}\nu}(t) \int d^3\mathbf{r} \sum_l \mathbf{u}_{l|\mathbf{k}'\nu'}^* \mathbf{u}_{l|\mathbf{k}\nu} \\ &= \frac{\hbar}{2\varepsilon_0 \omega_{\mathbf{k}}} \hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{k}'\nu'}(t)\end{aligned}\quad (\text{I.3.31})$$

Modendarstellungen weiterer Felder:

$$\hat{\Pi}_l^{(+)}(\mathbf{r}, t) = \varepsilon_0 \dot{\hat{\mathbf{A}}}_l^{(+)} = -i\varepsilon_0 \sum_{\mathbf{k}, \nu} \omega_{\mathbf{k}\nu} \hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{k}\nu}(t) \mathbf{u}_{l|\mathbf{k}\nu}(\mathbf{r}) \quad (\text{I.3.32})$$

$$\hat{\mathbf{E}}_l^{(+)}(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{\varepsilon_0} \hat{\Pi}_l^{(+)} = +i \sum_{\mathbf{k}, \nu} \left(\frac{\hbar \omega_{\mathbf{k}}}{2\varepsilon_0 \mathbf{V}} \right)^{1/2} \hat{\mathbf{a}}(0) \mathbf{e}_{l|\mathbf{k}\nu} e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)} \quad (\text{I.3.33})$$

Mit den Beziehungen (I.3.18) bzw. (I.3.19) folgt:

$$\boxed{\hat{H}_0 = \sum_{\mathbf{k}, \nu} \hbar \omega_{\mathbf{k}} \left(\hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{k}\nu}^\dagger \hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{k}\nu} + \frac{1}{2} \right)} \quad (\text{I.3.34})$$

$$\boxed{\hat{H}_S = \sum_{\mathbf{k}, \nu} [h_{\mathbf{k}\nu}^* \hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{k}\nu}^\dagger(t) + h_{\mathbf{k}\nu} \hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{k}\nu}(t)]} \quad (\text{I.3.35})$$

wobei

$$\begin{aligned} h_{\mathbf{k}\nu}^* &\equiv - \int d^3\mathbf{r} \mathbf{u}_{\mathbf{k}\nu}^*(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{J}^T \\ &= - \left(\frac{\hbar}{2\varepsilon_0 \omega_{\mathbf{k}} V} \right)^{1/2} \int d^3\mathbf{r} \mathbf{J}^T \mathbf{e}_{\mathbf{k}\nu} e^{-i\mathbf{k}\nu\mathbf{r}} \end{aligned} \quad (\text{I.3.36})$$

Gl. (I.3.34) hier ohne Beweis, (I.3.35) folgt durch Einsetzen.

Teilchenzahloperator:

$$\hat{N} \equiv \sum_{\mathbf{k},\nu} \hat{a}_{\mathbf{k}\nu}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}\nu} \quad (\text{I.3.37})$$

mit den Kommutatorrelationen

$$[\hat{H}_0, \hat{N}] = 0 \quad (\text{I.3.38a})$$

$$[\hat{H}_S, \hat{N}] \neq 0 \quad (\text{I.3.38b})$$

\hat{H}_S ist der Quellterm des Lichtfeldes, er erhält *nicht* die Teilchenzahl! Er hat externen Charakter bzw. beschreibt ein anderes Quantenfeld (Materiefeld).

Kommutatoren:

$$\boxed{\begin{aligned} [\hat{a}_{\mathbf{k}\nu}(t), \hat{a}_{\mathbf{k}'\nu'}^\dagger(t)] &= \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \delta_{\nu\nu'} \\ [\hat{a}_{\mathbf{k}\nu}(t), \hat{a}_{\mathbf{k}'\nu'}(t)] &= 0 \quad \text{etc.} \end{aligned}} \quad (\text{I.3.39})$$

Anmerkung: Rechnet man aus Gl. (I.3.39) zurück auf die Feldoperatoren, so folgt

$$[\hat{\Pi}_{\mathbf{m}}(\mathbf{r}_j, t), \hat{\mathbf{A}}_{\mathbf{m}'}(\mathbf{r}'_j, t)] \equiv -i\hbar \delta_{\mathbf{m}\mathbf{m}'}^T(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (\text{I.3.40})$$

Hierbei wurde die sogenannte transversale Deltafunktion benutzt:

$$\delta_{ij}^T(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \delta_{ij} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') - K_{ij} \quad (\text{I.3.41a})$$

$$K_{ij} = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial r_i} \frac{\partial}{\partial r_j} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (\text{I.3.41b})$$

Der Korrekturterm K_{ij} berücksichtigt die Nebenbedingung $\text{div } \hat{\mathbf{A}} = 0$! Dies war in der Form (I.3.20) noch nicht der Fall.

I.3.4 Zustände

Fock-Raum: Zustände mit beliebigen Photonenzahlen in den einzelnen Moden \mathbf{k}, ν . Für den Vakuumzustand $|0\rangle$:

$$\hat{a}_{\mathbf{k}\nu} |0\rangle = 0 \quad (\text{I.3.42})$$

Ein-Photon-Zustand:

$$|\mathbf{k}\nu\rangle = \hat{a}_{\mathbf{k}\nu}^\dagger |0\rangle \quad (\text{I.3.43})$$

Für N Photonen in der gleichen Mode:

$$|N\rangle = \frac{1}{\sqrt{N!}} \left(\hat{a}_{\mathbf{k}\nu}^\dagger \right)^N |0\rangle \quad (\text{I.3.44})$$

Zwei Photonen in zwei verschiedenen Moden:

$$|\mathbf{k}_1\nu_1; \mathbf{k}_2\nu_2\rangle = \hat{a}_{\mathbf{k}_1\nu_1}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}_2\nu_2}^\dagger |0\rangle \quad (\text{I.3.45})$$

Bezüglich der Feldoperatoren sind die Zustände Funktionale (wie globale Observable). Aus (I.3.31) folgt nämlich:

$$|\mathbf{k}\nu\rangle = \frac{2\varepsilon_0\omega_{\mathbf{k}}}{\hbar} \int d^3\mathbf{r} \mathbf{u}_{\mathbf{k}\nu} \cdot \hat{\mathbf{A}}^{(-)}(\mathbf{r}, t) |0\rangle \quad (\text{I.3.46})$$

I.4 Schrödinger-Felder mit Quellterm

I.4.1 „Freies“ Schrödinger-Feld

Schrödinger-Gleichung (Erste Quantisierung):

$$i\hbar \frac{d}{dt} \psi = \hat{H} \psi$$

In Ortsdarstellung:

$$\implies i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\mathbf{r}, t) + \frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi - V \psi = 0 \quad (\text{I.4.1})$$

Nun wird $\psi(\mathbf{r}, t)$ als ein komplexes, klassisches Feld gesehen. (Um-Interpretation). Behauptung:

$$\mathcal{L}_0 \left(\psi, \psi^*, \dot{\psi}, \nabla \psi, \nabla \psi^*; \mathbf{r} \right) = i\hbar \psi^* \dot{\psi} - \frac{\hbar^2}{2m} \nabla \psi^* \cdot \nabla \psi - V(\mathbf{r}) \psi^* \psi \quad (\text{I.4.2})$$

d.h. nicht alle Komponenten $\psi, \dot{\psi}$ usw. sind unabhängig, und $\dot{\psi}^*$ kommt nicht vor!
Beweis dieser Behauptung:

$$\frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial \dot{\psi}^*} = 0 \quad (\text{I.4.3a})$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial \psi^*} = i\hbar \dot{\psi} - V(\mathbf{r}) \psi \quad (\text{I.4.3b})$$

$$\frac{\partial}{\partial r_j} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^*_{,j}} = \frac{\hbar^2}{2m} \psi_{,jj} \quad \nabla \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial (\nabla \psi)} = \frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi \quad (\text{I.4.3c})$$

Beachte:

$$\nabla\psi^* \cdot \nabla\psi = \sum_j \psi^*_{,j} \psi_{,j}$$

Durch Einsetzen in die Lagrange-Gleichung (I.2.13) erhält man wieder (I.4.1). ✓

Konjugierte Impulse:

$$\Pi = \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial \dot{\psi}} = i\hbar\psi^* \quad (\text{I.4.4})$$

$$\Pi^* = \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial \dot{\psi}^*} = 0 \quad (\text{I.4.5})$$

Hamilton-Dichte:

$$\mathcal{H}_0 = \Pi\dot{\psi} + \Pi^*\dot{\psi}^* - \mathcal{L}$$

Mit (I.4.4) und (I.4.5) ist

$$\boxed{\mathcal{H}_0 = \frac{\hbar^2}{2m} \nabla\psi^* \nabla\psi + V(\mathbf{r})\psi^*\psi} \quad (\text{I.4.6})$$

Mit Hilfe der partiellen Integration („Überwälzen“)

$$\int d^3\mathbf{r} \nabla\psi^* \nabla\psi = - \int d^3\mathbf{r} \psi \Delta\psi^*$$

erhält man

$$\boxed{H_0[\psi^*, \psi] = \int d^3\mathbf{r} \mathcal{H}_0 = \int d^3\mathbf{r} \psi^* \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V(\mathbf{r}) \right) \psi} \quad (\text{I.4.7})$$

Feldquantisierung, vgl. (I.2.19):

$$[\hat{\Pi}(\mathbf{r}', t), \hat{\psi}(\mathbf{r}, t)] = -i\hbar \hat{1} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (\text{I.4.8})$$

Mit (I.4.4) folgt

$$\boxed{[\hat{\psi}(\mathbf{r}, t), \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}', t)] = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')} \quad (\text{I.4.9a})$$

$$[\hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}, t), \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}', t)] = 0 \quad \text{etc.} \quad (\text{I.4.9b})$$

I.4.2 Quellterm (elektrodynamische Potentiale)

In erster Quantisierung war (Ladung q):

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \frac{1}{2m} (\hat{\mathbf{p}} - q\mathbf{A})^2 + V(\mathbf{r}) + q\phi \\ i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi &= \hat{H}\psi \\ \text{div } \mathbf{A} &= 0 \\ \phi &= 0 \end{aligned}$$

$$\boxed{i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi + \frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi - V(\mathbf{r})\psi = \frac{i\hbar q}{m} \mathbf{A} \cdot \nabla \psi + \frac{q^2}{2m} \mathbf{A}^2 \psi} \quad (\text{I.4.10})$$

Dies ist die Schrödinger-Gleichung für ein geladenes Teilchen mit \mathbf{A} als transversalem Vektorpotential. Behauptung:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_S^{(1)} + \mathcal{L}_S^{(2)} \quad (\text{I.4.11})$$

$$\boxed{\mathcal{L}_S^{(1)} = -\frac{1}{2} \left(\psi^* \frac{i\hbar q}{m} \mathbf{A} \cdot \nabla \psi + \text{c.c.} \right)} \quad (\text{I.4.12a})$$

$$\boxed{\mathcal{L}_S^{(2)} = -\frac{q^2}{2m} \mathbf{A}^2 \cdot \psi^* \psi} \quad (\text{I.4.12b})$$

Beweis:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^*} = -\frac{i\hbar q}{2m} \mathbf{A} \cdot \nabla \psi - \frac{q^2}{2m} \mathbf{A}^2 \cdot \psi \quad (\text{I.4.13})$$

$$\nabla \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\nabla \psi^*)} = +\frac{i\hbar q}{2m} \nabla (\psi \cdot \mathbf{A}) = \frac{i\hbar q}{2m} \mathbf{A} \cdot \nabla \psi \quad (\text{I.4.14})$$

und, wie bisher, $\frac{\partial \mathcal{L}_S}{\partial \psi^*} = 0$. Durch Einsetzen von (I.4.3a) in (I.2.13) folgt wieder (I.4.10). Mit (I.4.12):

$$\boxed{H_S = \frac{iq\hbar}{m} \left(\int \psi^* \mathbf{A} \cdot \nabla \psi d^3\mathbf{r} + \text{c.c.} \right) + \frac{q^2}{2m} \int \psi^* \mathbf{A}^2 \psi d^3\mathbf{r}} \quad (\text{I.4.15})$$

Quantisierung:

$$\hat{H}_S = \int d^3\mathbf{r} \hat{\psi}^\dagger \left[\frac{iq\hbar}{m} \mathbf{A} \cdot \nabla \hat{\psi} \right] + \text{c.c.} + \frac{q^2}{2m} \int \hat{\psi}^\dagger \mathbf{A} \hat{\psi} d^3\mathbf{r} \quad (\text{I.4.16})$$

Identifiziere (I.4.15) mit (I.3.16). Dann muss sein:

$$\boxed{\mathbf{J}_T \equiv -\frac{iq\hbar}{2m} (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*) - \frac{q^2}{2m} \mathbf{A} \psi \psi^*} \quad (\text{I.4.17})$$

Vgl. erste Quantisierung: Wahrscheinlichkeitsstrom

1.4.3 Modendarstellung

Die zeitunabhängige Schrödingergleichung in Modendarstellung ist

$$\boxed{\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V(\mathbf{r}) \right) \mathbf{u}_n = E_n \mathbf{u}_n} \quad (\text{I.4.18})$$

mit der allgemeinen Lösung

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \sum_n b_n(t) \mathbf{u}_n(\mathbf{r}) \quad (\text{I.4.19})$$

Quantisierung:

$$\hat{\psi}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{n}} \hat{\mathbf{b}}_{\mathbf{n}}(t) \mathbf{u}_{\mathbf{n}}(\mathbf{r}) \quad (\text{I.4.20})$$

Folgerung aus (I.4.9a)

$$\left[\hat{\mathbf{b}}_{\mathbf{n}}(t), \hat{\mathbf{b}}_{\mathbf{n}'}^{\dagger}(t) \right] = \delta_{\mathbf{nn}'} \quad (\text{I.4.21})$$

Inverse Transformation: Aus (I.4.20) folgt

$$\int d^3\mathbf{r} \mathbf{u}_{\mathbf{n}'}^* \hat{\psi}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{n}} \hat{\mathbf{b}}_{\mathbf{n}}(t) \int d^3\mathbf{r} \mathbf{u}_{\mathbf{n}'}^*(\mathbf{r}) \mathbf{u}_{\mathbf{n}}(\mathbf{r}) = \hat{\mathbf{b}}_{\mathbf{n}'}(t) \quad (\text{I.4.22})$$

Mit (I.4.7):

$$\hat{H}_0 = \int d^3\mathbf{r} \hat{\psi}^{\dagger}(\mathbf{r}, t) \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V(\mathbf{r}) \right] \hat{\psi}(\mathbf{r}, t) \quad (\text{I.4.23})$$

$$\hat{\psi}^{\dagger} = \sum_{\mathbf{n}'} \hat{\mathbf{b}}_{\mathbf{n}'}^{\dagger}(t) \mathbf{u}_{\mathbf{n}'}^*(\mathbf{r})$$

$$\hat{\psi} = \sum_{\mathbf{n}} \hat{\mathbf{b}}_{\mathbf{n}}(t) \mathbf{u}_{\mathbf{n}}(\mathbf{r})$$

$$\implies \hat{H}_0 = \sum_{\mathbf{nn}'} \hat{\mathbf{b}}_{\mathbf{n}'}^{\dagger}(t) \hat{\mathbf{b}}_{\mathbf{n}}(t) \int d^3\mathbf{r} \mathbf{u}_{\mathbf{n}'}^*(\mathbf{r}) \underbrace{[\dots] \mathbf{u}_{\mathbf{n}}(\mathbf{r})}_{=E_{\mathbf{n}} \mathbf{u}_{\mathbf{n}}(\mathbf{r}) \text{ (I.4.18)}}$$

Orthogonalität:

$$\int d^3\mathbf{r} \mathbf{u}_{\mathbf{n}'}^* \mathbf{u}_{\mathbf{n}} = \delta_{\mathbf{nn}'} \quad (\text{I.4.24})$$

$$\boxed{\hat{H}_0 = \sum_{\mathbf{n}} E_{\mathbf{n}} \hat{\mathbf{b}}_{\mathbf{n}}^{\dagger}(t) \hat{\mathbf{b}}_{\mathbf{n}}(t)} \quad (\text{I.4.25})$$

Betrachte nun die \hat{H}_S -Terme, (I.4.16):

$$\hat{H}_S^{(1)} = \frac{q^2}{2m} \int d^3\mathbf{r} \hat{\psi}^{\dagger}(\mathbf{r}, t) \mathbf{A} \cdot \nabla \hat{\psi}(\mathbf{r}, t) + \text{c.c.}$$

In Modendarstellung:

$$\boxed{\hat{H}_S^{(1)} = \sum_{\mathbf{nn}'} g_{\mathbf{nn}'} \hat{\mathbf{b}}_{\mathbf{n}'}^{\dagger}(t) \hat{\mathbf{b}}_{\mathbf{n}}(t) + \text{c.c.}} \quad (\text{I.4.26})$$

$$\boxed{g_{\mathbf{nn}'} = \frac{q^2}{2m} \int d^3\mathbf{r} \mathbf{u}_{\mathbf{n}'}^*(\mathbf{r}) (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{u}_{\mathbf{n}}(\mathbf{r})} \quad (\text{I.4.27})$$

Analog zu (I.4.11) ist

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_S^{(1)} + \hat{H}_S^{(2)}$$

„Volle“ Quantisierung:

$$\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{k}\nu} \left(\frac{\hbar}{2\varepsilon_0 \omega_{\mathbf{k}} V} \right)^{1/2} \mathbf{e}_{\mathbf{k}\nu} \left(\hat{a}_{\mathbf{k}\nu}(t) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} + \hat{a}_{\mathbf{k}\nu}^\dagger(t) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} \right) \quad (\text{I.4.28})$$

$$\hat{H}_S^{(1)} = \sum_{\mathbf{k}\nu} \sum_{nn'} \mathbf{e}_{\mathbf{k}\nu} \left(\mathbf{M}^{(1)}(\mathbf{k}, n', n) \hat{b}_{n'}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}\nu} \hat{b}_n + \mathbf{M}^{(1)*}(\mathbf{k}, n, n') \hat{b}_n^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}\nu}^\dagger \hat{b}_n \right) \quad (\text{I.4.29})$$

wobei

$$\mathbf{M}^{(1)}(\mathbf{k}, n, n') = \left(\frac{\hbar}{2\varepsilon_0 \omega_{\mathbf{k}} V} \right)^{1/2} \int d^3\mathbf{r} \mathbf{u}_{n'}^* \left(\frac{iq\hbar}{m} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \nabla \right) \mathbf{u}_n \quad (\text{I.4.30})$$

1.4.4 Zustände

Im Fock-Raum sind Zustände mit beliebigen Teilchenzahlen in den einzelnen Moden \mathbf{k} definiert. Vakuumzustand $|0\rangle$:

$$\hat{b}_{\mathbf{k}} |0\rangle = 0 \quad (\text{I.4.31})$$

Ein- und Zweiteilchenzustände:

$$|\mathbf{k}\rangle = \hat{b}_{\mathbf{k}}^\dagger |0\rangle \quad (\text{I.4.32})$$

$$|\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2\rangle = \hat{b}_{\mathbf{k}_1}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{k}_2}^\dagger |0\rangle \quad (\text{I.4.33})$$

Der Hilbertraum zerfällt u. a. in zwei Teilräume für Bose- und Fermi-Teilchen. Im Bose-Raum gelten dieselben Kommutatorbeziehungen wie oben. Im Fermi-Raum dagegen ist anstelle von (I.4.9):

$$\left[\hat{\psi}(\mathbf{r}, t), \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}', t) \right]_+ \equiv \hat{\psi}(\mathbf{r}, t) \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}', t) + \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}', t) \hat{\psi}(\mathbf{r}, t) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (\text{I.4.34})$$

$$\left[\hat{b}_{\mathbf{k}}(t), \hat{b}_{\mathbf{k}'}^\dagger(t) \right]_+ = \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \quad (\text{I.4.35})$$

Entsprechend ist

$$\left[\hat{b}_{\mathbf{k}}^\dagger(t), \hat{b}_{\mathbf{k}'}^\dagger(t) \right]_+ = 0 \quad \text{etc.}$$

Durch diesen „Trick“ ist das Pauli-Prinzip automatisch erfüllt:

$$\left(\hat{b}_{\mathbf{k}}^\dagger \right)^2 = 0 \quad (\text{I.4.36})$$

d. h. es kann keine zwei Teilchen in der gleichen Mode geben.

Ein allgemeiner Zustand wird beschrieben durch den Dichteoperator $\hat{\rho}$:

$$\hat{\rho} = \sum_j \rho_j |j\rangle \langle j| \quad 0 \leq \rho_j \leq 1 \quad \sum_j \rho_j = 1 \quad (\text{I.4.37})$$

wobei $|j\rangle$ ein beliebiger Fock-Zustand ist.

Anmerkungen:

- a. Wählt man statt (I.4.18) beliebige orthonormierte Ein-Teilchen-Moden \mathbf{v}_n , die keine Eigenfunktionen zu $\hat{H}^{(1)}$ in erster Quantisierung Ortsdarstellung sind, folgt anstelle von (I.4.25) nunmehr:

$$\hat{H}_0 = \sum_{n,n'} \langle \mathbf{v}_n | \hat{H}^{(1)} | \mathbf{v}_{n'} \rangle \hat{b}_n^\dagger \hat{b}_{n'}$$

- b. Mit Berücksichtigung der Teilchen-Teilchen-Wechselwirkung $\hat{V}^{(2)}$ („Selbst-Wechselwirkung“):

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \frac{1}{2} \sum_{n,n'} \sum_{m,m'} \langle \mathbf{v}_n \mathbf{v}_m | \hat{V}^{(2)} | \mathbf{v}_{n'} \mathbf{v}_{m'} \rangle \hat{b}_n^\dagger \hat{b}_m^\dagger \hat{b}_{n'} \hat{b}_{m'}$$

Zusammenhang zwischen zweiter und erster Quantisierung: $\hat{H}^{(1)} + \hat{V}^{(2)}$

- c. Feldoperator-Darstellung:

$$\hat{H}_0 = \int d^3\mathbf{r} \hat{\psi}^\dagger \hat{H}^{(1)} \hat{\psi}$$

I.5 Dynamik

I.5.1 Heisenberg-Bild („Poisson-Klammer“)

Gegeben sei die Observable $\hat{A}_H(\mathbf{t})$. Postulat:

$$\boxed{\frac{d}{dt} \hat{A}_H = \frac{1}{i\hbar} [\hat{A}_H, \hat{H}] + \frac{\partial}{\partial t} \hat{A}_H} \quad (\text{I.5.1})$$

Konsistenztests:

- a. **Strahlungsfeld:**

$$\hat{H}_0 = \int d^3\mathbf{r} \mathcal{H}_0 \quad \text{mit} \quad \mathcal{H}_0 = \frac{1}{2\varepsilon_0} \sum_i \hat{\Pi}_i \hat{\Pi}_i + \frac{1}{2\mu_0} \sum_{ij} \hat{A}_{i,j} \hat{A}_{i,j} \quad (\text{I.5.2})$$

$$\frac{d}{dt} \hat{\mathbf{E}}_H = \frac{1}{i\hbar} [\hat{\mathbf{E}}_H, \hat{H}_0] = -\frac{1}{i\hbar\varepsilon_0} [\hat{\boldsymbol{\Pi}}_H, \hat{H}_0] \quad (\text{I.5.3})$$

Unter Verwendung der Hilfsformel (I.7.10) ergibt sich

$$\frac{d}{dt} (\hat{\mathbf{E}}_H)_l = -\frac{1}{\varepsilon_0} \sum_k \frac{\partial}{\partial r_k} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \hat{A}_{l,k}} = -\frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} \Delta \hat{A}_l \quad (\text{I.5.4})$$

Wegen (I.3.21):

$$\hat{\mathbf{E}}_H = -\dot{\hat{\mathbf{A}}}_H$$

und mit $\epsilon_0 \mu_0 = 1/c^2$ folgt die Wellengleichung (I.3.23)

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \hat{\mathbf{A}}_H = -c^2 \Delta \hat{\mathbf{A}}_H \quad \checkmark \quad (\text{I.5.5})$$

Die Maxwell-Gleichungen werden zu Operatorgleichungen im Heisenberg-Bild, z. B., mit $\text{rot rot } \hat{\mathbf{A}} = -\Delta \hat{\mathbf{A}} + \nabla(\nabla \hat{\mathbf{A}})$, der Coulomb-Eichung $\nabla \hat{\mathbf{A}} = 0$ und $\text{rot } \hat{\mathbf{A}} = \hat{\mathbf{B}}$:

$$\frac{\partial}{\partial t} \hat{\mathbf{E}}_H = c^2 \text{rot } \hat{\mathbf{B}} \quad (\text{I.5.6})$$

b. **Schrödinger-Feld:** Es war $\hat{H} = \int d^3 \mathbf{r} \mathcal{H}$. Aus (I.4.6) folgt

$$\mathcal{H} = \frac{\hbar^2}{2m} \sum_j \hat{\psi}^\dagger_{,j} \hat{\psi}_{,j} + V(\mathbf{r}) \hat{\psi}^\dagger \hat{\psi} \quad (\text{I.5.7})$$

Mit (I.4.4):

$$\begin{aligned} \hat{\psi}^\dagger &= \frac{1}{i\hbar} \hat{\Pi} \\ \mathcal{H} &= \frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{i\hbar} \sum_j \hat{\Pi}_{,j} \hat{\psi}_{,j} + \frac{1}{i\hbar} V \hat{\Pi} \hat{\psi} \end{aligned} \quad (\text{I.5.8})$$

Nun erhält man mit (I.5.1) und der Hilfsformel (I.7.10) wieder eine „Schrödinger-Gleichung“:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \hat{\psi} &= \frac{1}{i\hbar} [\hat{\psi}, \hat{H}] = \frac{1}{i\hbar} V \cdot \hat{\psi} - \sum_j \frac{\partial}{\partial r_j} \hat{\psi}_{,j} \cdot \frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{i\hbar} \\ &= \frac{1}{i\hbar} \left(V - \frac{\hbar^2}{2m} \Delta \right) \hat{\psi} \quad \checkmark \end{aligned}$$

Beachte: Die Schrödinger-Gleichung ist sowohl äquivalent zur Heisenbergschen Bewegungsgleichung für $\hat{\psi}$ als auch zur Euler-Lagrange-Gleichung! Aus (I.5.1) ergibt sich für jeden Operator eine direkte Bewegungsgleichung! In der Quantenfeldtheorie (QFT) werden

Observable wie Zustände durch die gleichen Operatoren (Feldoperatoren, Modenoperatoren) dargestellt. Diese können zeitabhängig oder -unabhängig sein. Im Heisenberg-Bild sind die Zustände zeitunabhängig:

$$|\psi\rangle_H = |\psi(0)\rangle \quad (\text{I.5.9})$$

1.5.2 Zeitentwicklungsoperator

Aus (I.5.1):

$$i\hbar \frac{d}{dt} \hat{A}_H = [\hat{A}_H, \hat{H}] \quad \text{mit} \quad \frac{\partial}{\partial t} \hat{A}_H = 0$$

Setze $\hat{A}_H = \hat{U}^\dagger(t)\hat{A}\hat{U}(t)$. Es folgt

$$i\hbar \frac{d}{dt} \hat{U} = \hat{H} \hat{U} \quad (\text{I.5.10})$$

wobei \hat{H} explizit zeitunabhängig ist. Für den unitären Operator \hat{U} bekommt man durch Integration:

$$\begin{aligned} \hat{U} &= e^{-i\hat{H}t/\hbar} \\ \hat{U}^\dagger \hat{U} &= \hat{U} \hat{U}^\dagger = \hat{1} \\ \hat{H}_H &= \hat{U}^\dagger(t) \hat{H} \hat{U}(t) = \hat{H} \end{aligned} \quad (\text{I.5.11})$$

I.5.3 Schrödinger-Bild

$$|\psi(t)\rangle = \hat{U}(t) |\psi(0)\rangle \quad (\text{I.5.12})$$

Dichteoperator:

$$\begin{aligned} \hat{\rho}(t) &= |\psi(t)\rangle \langle \psi(t)| = \hat{U}(t) \hat{\rho}(0) \hat{U}^\dagger(t) \\ \implies i\hbar \frac{d\hat{\rho}}{dt} &= i\hbar \frac{d\hat{U}}{dt} \hat{\rho}(0) \hat{U}^\dagger(t) + i\hbar \hat{U}(t) \hat{\rho}(0) \frac{d\hat{U}^\dagger}{dt} \end{aligned} \quad (\text{I.5.13})$$

Zeitableitungen von \hat{U} und \hat{U}^\dagger :

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{U}}{dt} &= \frac{1}{i\hbar} \hat{H} \hat{U} \\ \frac{d\hat{U}^\dagger}{dt} &= -\frac{1}{i\hbar} \hat{U}^\dagger \hat{H} \end{aligned} \quad (\text{I.5.14})$$

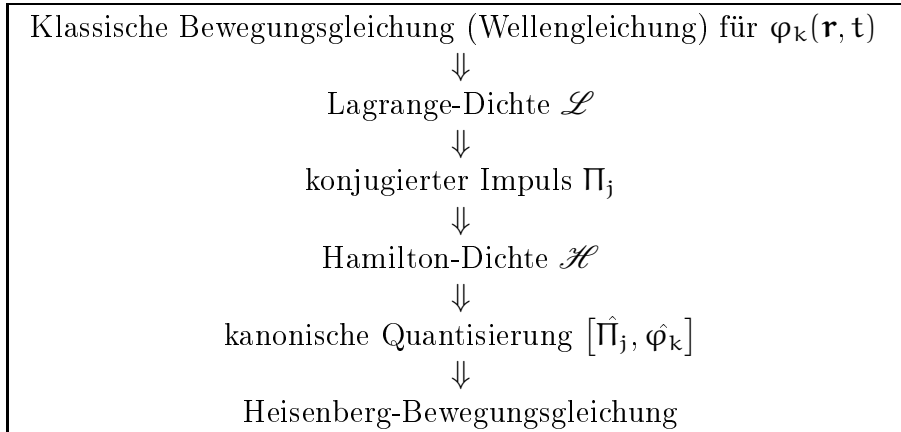
Man erhält schließlich die Liouville-von Neumann-Gleichung:

$$i\hbar \frac{d}{dt} \hat{\rho} = [\hat{H}, \hat{\rho}(t)] \quad (\text{I.5.15})$$

Der Vergleich mit (I.5.1) zeigt, dass hier $\hat{\rho}$ nicht explizit zeitabhängig ist. Das Vorzeichen ist umgekehrt („gegenläufige Bewegung“)!

I.6 Zusammenfassung

a. Rezept



b. Feldkopplungen, z.B. zwischen φ_k und ξ_l : Die „Quellterme“ liefern einen Beitrag zu \mathcal{L} , nämlich den Kontroll-/ Treiberterm \mathcal{L}_S . Das erste Feld $\varphi_k(\mathbf{r}_j, \mathbf{t})$ ist die „Quelle“ für das zweite Feld $\chi_l(\mathbf{r}_j, \mathbf{t})$ und umgekehrt. Allgemeines Kopplungsschema (bilineare Terme):

$$\begin{aligned} \mathcal{L}' = & \sum_{kl} B_{kl} \varphi_k \chi_l + \sum_{klm} C_{klm} \varphi_k \chi_{l,m} + \\ & + \sum_{klm} \tilde{C}_{klm} \varphi_{k,l} \chi_m + \sum_{klm} D_{kl,mn} \varphi_{k,l} \chi_{m,n} + \dots \end{aligned} \quad (\text{I.6.1})$$

c. Moden: Zeitunabhängige Lösungen der „freien“ Wellengleichung (Euler-Lagrange-Gleichung). Durch Superposition erhält man die Moden-Amplituden \mathbf{b} . Durch Übergang zu Operatoren $\hat{\mathbf{b}}$ kommt man zu den Modendarstellungen.

d. Zustände: Fock-Räume. Der Vakuumzustand ist $|0\rangle$, zu den N-Teilchen-Zuständen kommt man über die Modenoperatoren. Rücktransformation auf Feldoperatoren. Für Fermi- bzw. Bose Teilchen gelten die Anti-Kommutator- bzw. Kommutator-Regeln.

e. Konkret: Schrödinger-Feld ψ und Strahlungsfeld \mathbf{A} :

- Vektorschreibweise, klassisch

$\begin{aligned} \mathbf{H} = & \int d^3\mathbf{r} \psi^* \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V(\mathbf{r}) \right) \psi \\ & + \int d^3\mathbf{r} \left(\frac{1}{2\epsilon_0} \boldsymbol{\Pi}^2 + \frac{1}{2\mu_0} (\nabla \otimes \mathbf{A})(\nabla \otimes \mathbf{A}) \right) \\ & + \frac{iq\hbar}{m} \int d^3\mathbf{r} (\psi^* \mathbf{A} \cdot \nabla \psi - \psi \mathbf{A} \cdot \nabla \psi^*) \\ & + \frac{q^2}{2m} \int d^3\mathbf{r} \psi^* \mathbf{A}^2 \psi \end{aligned}$	(I.6.2)
---	---------

- Komponentenschreibweise, quantenmechanisch

$$\begin{aligned}
 \mathbf{H} = & \int d^3\mathbf{r} \hat{\psi}^\dagger \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V(\mathbf{r}) \right) \hat{\psi} \\
 & + \int d^3\mathbf{r} \left(\frac{1}{2\varepsilon_0} \sum_j \hat{\Pi}_j \hat{\Pi}_j + \frac{1}{2\mu_0} \sum_{jk} \hat{A}_{j,k} \hat{A}_{j,k} \right) \\
 & + \frac{iq\hbar}{m} \int d^3\mathbf{r} \left(\hat{\psi}^\dagger \sum_j \hat{A}_j \hat{\psi}_{,j} - \hat{\psi} \sum_j \hat{A}_j \hat{\psi}^\dagger_{,j} \right) + \hat{H}_S^{(2)}
 \end{aligned} \tag{I.6.3}$$

- Modendarstellung:

$$\begin{aligned}
 [\hat{\mathbf{b}}_n, \hat{\mathbf{b}}_{n'}^\dagger]_- &= \delta_{nn'} \quad \text{Bosonen} \\
 [\hat{\mathbf{b}}_n, \hat{\mathbf{b}}_{n'}^\dagger]_+ &= \delta_{nn'} \quad \text{Fermionen}
 \end{aligned} \tag{I.6.4}$$

$$\begin{aligned}
 \hat{H} = & \sum_n E_n \hat{\mathbf{b}}_n^\dagger \hat{\mathbf{b}}_n + \sum_{\mathbf{k}\nu} \hbar\omega_{\mathbf{k}} \left(\hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{k}\nu}^\dagger \hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{k}\nu} + \frac{1}{2} \right) \\
 & + \sum_{\mathbf{k}\nu} \sum_{nn'} \mathbf{e}_{\mathbf{k}\nu} \mathbf{M}^{(1)}(\mathbf{k}, n', n) \hat{\mathbf{b}}_n^\dagger \hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{k}\nu} \hat{\mathbf{b}}_n + \text{c.c.} + \hat{H}_S^{(2)}
 \end{aligned} \tag{I.6.5}$$

- Halbklassische Strahlungstheorie:

Nur das Materiefeld ψ ist quantenmechanischer Natur, \mathbf{A} und $\mathbf{\Pi}$ sind klassische Feldgrößen.

Achtung: Für \mathbf{A} sind die Feldgleichungen zu lösen mit einem klassischen Quellterm. Dafür benutzt man einen Erwartungswert im Sinne der Quantenmechanik. Dann wird mit diesem Feld \mathbf{A} das Materieproblem gelöst und der Quellterm für \mathbf{A} neu bestimmt (Iteration).

- Halb-quantenmechanische Theorie:

Nur \mathbf{A} und $\mathbf{\Pi}$ werden quantenmechanisch betrachtet, das Materiefeld ψ hingegen klassisch, ebenso wie klassische phänomenologische Materiefelder wie die Polarisation usw. Beispiele: Optische Bauelemente, nichtlineare Kopplungen (Dielektrika)

f. Ergänzung: Vollrelativistische Quantenfeldtheorie (QFT). In der Quantenelektrodynamik (QED) wird ersetzt:

$$\begin{aligned}
 \psi &\longrightarrow \text{Dirac-Feld } \psi_\alpha && \text{Vierer-Spinor} \\
 \mathbf{A}_j &\longrightarrow \mathbf{A}_\mu = \left\{ \frac{i}{c} \phi, \mathbf{A} \right\} && \text{Vierer-Potential} \\
 \mathbf{J}_j &\longrightarrow \mathbf{J}_\mu = \{ ic\rho, \mathbf{J} \} && \text{Vierer-Strom}
 \end{aligned}$$

	QED	QCD
Felder:	ψ_α (Vierer-Spinor)	ψ_α^c Farbindex $c = 1, 2, 3$
	A_μ (Vierer-Potential)	A_μ^a Gluon-Index $a = 1, 2, \dots, 8$
	Dirac-Gleichung	„Farb“-Dirac-Gleichung
	Maxwell-Gleichungen	„Farb“-Maxwell-Gleichungen
Teilchen:	Elektronen (Fermi)	Quarks (Fermi)
	Photonen (Bose)	Gluonen (Bose)

Tabelle I.1: Übergang zur Quantenchromodynamik (QCD)

Übergang zur Quantenchromodynamik (QCD): siehe Tabelle I.1

Anmerkungen:

- Mit Ausnahme der Farbe (blau, rot, grün) haben Photonen und Gluonen die „gleichen Eigenschaften“.
- Gluonen kleben Quarks zusammen (starke Wechselwirkung).
- Elektronen sind in Atomen gebunden, Quarks in Hadronen.

Literatur:

S. Brodsky et al, hep-ph/9705477 „Quantum Chromodynamics and other field theories on the light cone“

I.7 Hilfsformeln

- Die folgenden allgemeinen Beziehungen für die δ -Funktion wurden benutzt:

$$\delta(\mathbf{ax}) = \frac{1}{|\mathbf{a}|} \delta(\mathbf{x}) \tag{I.7.1}$$

$$\delta(\mathbf{x})\delta(\mathbf{y})\delta(\mathbf{z}) = \delta(\mathbf{r}) \tag{I.7.2}$$

$$\int \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) f(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r} = f(\mathbf{r}_0) \tag{I.7.3}$$

- Vollständigkeitsrelation:

$\int_V d^3\mathbf{r} e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\mathbf{r}} = V \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}$	(I.7.4)
$\sum_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')} = V \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$	(I.7.5)

mit V als Periodizitätsvolumen. Man beweist z. B. (I.7.5) aus (I.7.4). Zunächst gilt:

$$\int d^3\mathbf{r} \sum_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')} e^{-i\mathbf{k}'\mathbf{r}} = \sum_{\mathbf{k}} e^{-i\mathbf{k}'\mathbf{r}'} \underbrace{\int d^3\mathbf{r} e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\mathbf{r}}}_{=V \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}, (I.7.4)} = V e^{-i\mathbf{k}'\mathbf{r}'}$$

Andererseits gilt auch:

$$\int d^3\mathbf{r} \delta^3(\mathbf{r}-\mathbf{r}') e^{-i\mathbf{k}'\mathbf{r}} = e^{-i\mathbf{k}'\mathbf{r}'}$$

Durch Vergleichen der beiden obigen Ausdrücke folgt wiederum (I.7.5)! Die Eigenschaften der δ -Funktion wurden benutzt.

- Sei $\mathbf{u} \equiv \mathbf{u}_0 e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}$

$\text{div } \mathbf{u} = i\mathbf{u} \cdot \mathbf{k}$	(I.7.6)
---	---------

$\text{rot } \mathbf{u} = -i\mathbf{u} \times \mathbf{k}$	(I.7.7)
---	---------

Dies zeigt man mit Hilfe der folgenden Beziehungen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}_x}{\partial x} &= \mathbf{u}_x (ik_x) \\ (\nabla \times \mathbf{u})_x &= \frac{\partial}{\partial y} u_z - \frac{\partial}{\partial z} u_y \\ &= iu_z k_y - iu_y k_z \\ &= -i(\mathbf{u} \times \mathbf{k})_x \end{aligned}$$

- Kommutatoren: Sei $\hat{F} = \hat{F}(\hat{\mathbf{b}}^\dagger, \hat{\mathbf{b}})$.

$[\hat{\mathbf{b}}, \hat{F}(\hat{\mathbf{b}}^\dagger, \hat{\mathbf{b}})] = \frac{\partial \hat{F}}{\partial \hat{\mathbf{b}}^\dagger}$	(I.7.8)
--	---------

$[\hat{\mathbf{b}}^\dagger, \hat{F}(\hat{\mathbf{b}}^\dagger, \hat{\mathbf{b}})] = -\frac{\partial \hat{F}}{\partial \hat{\mathbf{b}}}$	(I.7.9)
---	---------

Achtung: die übliche Regel für die implizite Ableitung gilt hier nicht! Beispiel:

$$\begin{aligned} \hat{F} &= (\hat{\mathbf{b}}^2 + (\hat{\mathbf{b}}^\dagger)^2)^2 \\ \frac{\partial \hat{F}}{\partial \hat{\mathbf{b}}^\dagger} &= 2(\hat{\mathbf{b}}^2 + (\hat{\mathbf{b}}^\dagger)^2) \cdot 2\hat{\mathbf{b}}^\dagger = 4\hat{\mathbf{b}}^2 \hat{\mathbf{b}}^\dagger + 4(\hat{\mathbf{b}}^\dagger)^3 \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck ist falsch! Dagegen:

$$\begin{aligned} \hat{F} &= \hat{\mathbf{b}}^4 + (\hat{\mathbf{b}}^\dagger)^4 + \hat{\mathbf{b}}^2 (\hat{\mathbf{b}}^\dagger)^2 + (\hat{\mathbf{b}}^\dagger)^2 \hat{\mathbf{b}}^2 \\ \frac{\partial \hat{F}}{\partial \hat{\mathbf{b}}^\dagger} &= 4(\hat{\mathbf{b}}^\dagger)^3 + 2\hat{\mathbf{b}}^2 \hat{\mathbf{b}}^\dagger + 2\hat{\mathbf{b}}^\dagger \hat{\mathbf{b}}^2 \quad \checkmark \end{aligned}$$

- Sei $\hat{F} = \int d^3\mathbf{r} \hat{f}(\hat{A}_i, \hat{A}_{i,m} \hat{\Pi}_i, \hat{\Pi}_{i,m})$

$$\boxed{[\hat{\Pi}_j, \hat{F}] = \frac{\hbar}{i} \left(\frac{\partial \hat{f}}{\partial \hat{A}_j} - \frac{\partial}{\partial r_k} \frac{\partial \hat{f}}{\partial \hat{A}_{j,k}} \right) \equiv \frac{\hbar}{i} \frac{\delta \hat{F}}{\delta \hat{A}_j}} \quad (\text{I.7.10})$$

$$\boxed{[\hat{A}_j, \hat{F}] = -\frac{\hbar}{i} \left(\frac{\partial \hat{F}}{\partial \hat{\Pi}_j} - \frac{\partial}{\partial r_k} \frac{\partial \hat{f}}{\partial \hat{\Pi}_{j,k}} \right) \equiv -\frac{\hbar}{i} \frac{\delta \hat{F}}{\delta \hat{\Pi}_j}} \quad (\text{I.7.11})$$

II Photonen und Atome

Motivation: In Kapitel I.6 wurden Verallgemeinerungen diskutiert in Bezug auf die fundamentale Quantenfeldtheorie. Nun geht es um technisch motivierte Vereinfachungen nach der folgenden Vorgehensweise:

- Selektion von Moden der beteiligten Felder \mathbf{A}, ψ .
- Selektion der Beschreibungsebenen:

Voll-quantenmechanische Betrachtungen	Dipol-Kopplung Jaynes-Cummings-Modell Kollaps und Wiederkehr Ein-Atom-Maser
Materie quantenmechanisch, Licht klassisch	Bloch-Gleichungen Getriebene Zwei-/Drei-Niveau-Atome Echo, Dunkelzustände Lichtausbreitung
Licht quantenmechanisch, Materie klassisch	Bauelemente (Strahlteiler) Linearität und Nichtlinearität

II.1 Dipol-Kopplung

II.1.1 Modenselektion

- a. „Cavity-Elektrodynamik“: Stehende Wellen in einem Kasten mit entsprechenden Randbedingungen, betrachte z. B. eine Mode:

$$\hat{H}_F = \hbar\omega \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right) \quad (\text{II.1.1})$$

- b. Gebundene Elektronenzustände $|\mathbf{m}\rangle$, $\mathbf{m} = 0, 1, \dots$ „Atome“:

$$|\mathbf{m}\rangle = \hat{\mathbf{b}}_{\mathbf{m}}^\dagger |0\rangle \quad (\text{II.1.2})$$

$$\implies \langle \mathbf{m}' | \hat{\mathbf{b}}_{\mathbf{n}'}^\dagger \hat{\mathbf{b}}_{\mathbf{n}} | \mathbf{m} \rangle = \langle 0 | \hat{\mathbf{b}}_{\mathbf{m}'} \hat{\mathbf{b}}_{\mathbf{n}'}^\dagger \hat{\mathbf{b}}_{\mathbf{n}} \hat{\mathbf{b}}_{\mathbf{m}}^\dagger | 0 \rangle = \delta_{\mathbf{m}'\mathbf{n}'} \delta_{\mathbf{m}\mathbf{n}} \quad (\text{II.1.3})$$

Bezüglich dieses Unterraumes kann man Projektoren einführen und schreiben

$$\hat{b}_n^\dagger, \hat{b}_n \longrightarrow \hat{P}_{n'n} = |n'\rangle\langle n| \quad (\text{II.1.4})$$

$$\boxed{\hat{H}_M = \sum_n E_n \hat{P}_{nn}} \quad (\text{II.1.5})$$

II.1.2 Kopplung

Aus (I.4.12):

$$\mathcal{H}_{\text{FM}} = \frac{i\hbar}{m} (\psi^* \mathbf{A} \cdot \nabla \psi - \psi \mathbf{A} \cdot \nabla \psi^*) \quad (\text{II.1.6})$$

Sei

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \sim a e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \mathbf{e} \quad (\text{II.1.7})$$

Hier ist \mathbf{e} der Polarisationsindex, vgl. (I.3.27). Im Atom bezeichne \mathbf{R}_0 den Abstandsvektor vom Koordinatenursprung zum Kern und \mathbf{r} den vom Kern zum Elektron. Taylor-Entwicklung:

$$e^{i\mathbf{k}(\mathbf{R}_0+\mathbf{r})} = e^{i\mathbf{k}\mathbf{R}_0} (1 + i\mathbf{k}\mathbf{r} + \dots)$$

Nimmt man nun an, dass

$$\mathbf{k} \cdot \langle |\mathbf{r}| \rangle = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot r_0 \ll 1$$

dann erhält man die Dipol-Näherung für \mathbf{A} :

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \approx \mathbf{A}(\mathbf{R}_0, t) \quad (\text{II.1.8})$$

\mathbf{A} ist bezüglich lokalisierten Atomzuständen also unabhängig von \mathbf{r} !

Eichtransformation (vgl. Ballentine, S. 312, 358):

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbf{A} &\longrightarrow \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\chi \\ \phi &\longrightarrow \phi' = \phi - \dot{\chi} = -\dot{\chi} \\ \psi &\longrightarrow \psi' = \psi e^{i q\chi/\hbar} \end{aligned}} \quad (\text{II.1.9})$$

Das Ziel ist die Transformation auf $\mathbf{A}' = 0$:

$$0 = \mathbf{A} + \nabla\chi$$

Lösung:

$$\chi(\mathbf{r}, t) = -\mathbf{A}(\mathbf{R}_0, t) \cdot \mathbf{r} \quad (\text{II.1.10})$$

Weiterhin ist wegen $\phi = 0$ nun:

$$\phi' = -\dot{\chi} = \dot{\mathbf{A}}\mathbf{r} = -\mathbf{E}(\mathbf{R}_0, t) \cdot \mathbf{r} \quad (\text{II.1.11})$$

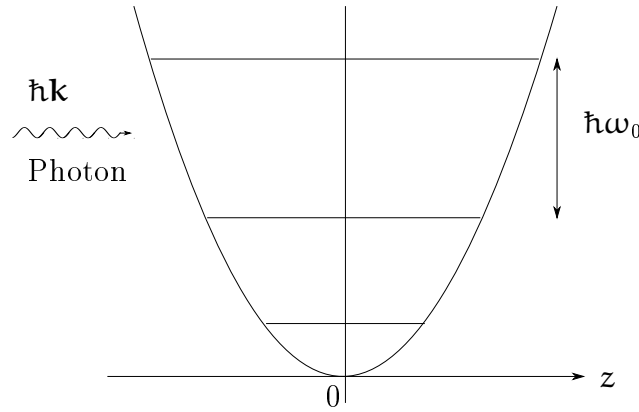


Abbildung II.1: Potential Atom-Falle

In Erster Quantisierung gilt also

$$\hat{H}' = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(\mathbf{r}) + q\phi'$$

Quellterm (vgl. (I.4.2)):

$$\mathcal{L}'_S = +q\mathbf{E}(\mathbf{R}_0, t) \cdot \mathbf{r} \psi^* \psi \quad (\text{II.1.12})$$

Der Dipol sei:

$$\mathbf{d} \equiv q\mathbf{r} \quad (\text{II.1.13})$$

so dass für den Feld-Materie-Wechselwirkungsterm schließlich folgt:

$$\mathcal{H}_{\text{FM}} = -\mathbf{d} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{R}_0, t) \psi^* \psi \quad (\text{II.1.14})$$

II.1.3 Schwerpunktsbewegung („Atomfalle“)

Die Änderung der kinetischen Energie des Atoms mit Masse M durch Absorption eines Photons (Rückstoß) ist (siehe Abb. II.1):

$$\Delta E_{\text{kin}} = \frac{\hbar^2 k^2}{2M}$$

Lamb-Dicke-Parameter:

$$\eta^2 \equiv \frac{\Delta E_{\text{kin}}}{\hbar\omega_0} = \frac{\hbar^2 k^2}{2M\omega_0} \quad (\text{II.1.15})$$

Andererseits gilt für den Oszillator:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} M\omega_0^2 (\Delta z_n)^2 &= \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega_0 \\ \implies M\omega_0 &= \frac{(2n+1)\hbar}{(\Delta z_n)^2} = \frac{\hbar}{(\Delta z_0)^2} \quad (n=0) \\ \implies \eta^2 &= \frac{1}{2} (\Delta z_0)^2 k^2 = 2\pi^2 (\Delta z_0/\lambda)^2 \quad (\text{II.1.16}) \end{aligned}$$

Im „Lamb-Dicke-Regime“ $\eta \ll 1$ (vgl. Wunderlich, PRL **87**, 257904; Sasura, quant-ph/0212005) gilt also

$$\begin{aligned}\Delta E_{\text{kin}} &\ll \hbar\omega_0 \\ \Delta z_0 &\ll \lambda\end{aligned}\tag{II.1.17}$$

II.1.4 Quantisierung

Aus (II.1.14):

$$\hat{H}'_{\text{FM}} = -\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{R}_0, t) \int d^3\mathbf{r} \mathbf{d}\hat{\psi}^\dagger \hat{\psi}\tag{II.1.18}$$

mit (I.3.33):

$$\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{0}, 0) = i \left(\frac{\hbar\omega}{2\varepsilon_0 V} \right)^{1/2} (\hat{\mathbf{a}} - \hat{\mathbf{a}}^\dagger) \mathbf{e} \quad (\mathbf{R}_0 = \mathbf{0}, t = 0)\tag{II.1.19}$$

und (I.4.19):

$$\hat{\psi}^\dagger \hat{\psi} = \sum_{n'n} \hat{b}_{n'}^\dagger \hat{b}_n \mathbf{u}_{n'}^*(\mathbf{r}) \mathbf{u}_n(\mathbf{r})\tag{II.1.20}$$

$$\Rightarrow \hat{H}'_{\text{FM}} = -i \left(\frac{\hbar\omega}{2\varepsilon_0 V} \right)^{1/2} \sum_{n'n} \hat{b}_{n'}^\dagger \hat{b}_n (\hat{\mathbf{a}} - \hat{\mathbf{a}}^\dagger) \mathbf{e} \cdot \underbrace{\int d^3\mathbf{r} \mathbf{u}_{n'}^*(\mathbf{r}) \mathbf{d} \mathbf{u}_n(\mathbf{r})}_{\equiv \mathbf{d}_{n'n}}$$

$$\boxed{\gamma_{n'n} = -i \left(\frac{\hbar\omega}{2\varepsilon_0 V} \right)^{1/2} \mathbf{e} \cdot \mathbf{d}_{n'n} = -\gamma_{nn'}^* \sim \sqrt{\omega}}\tag{II.1.21}$$

Das Gesamtmodell ist nun definiert durch (II.1.1), (II.1.5) und (II.1.22):

$$\hat{H}'_{\text{FM}} = \sum_{n'n} \hat{P}_{n'n} (\gamma_{n'n} \hat{\mathbf{a}} + \gamma_{nn'}^* \hat{\mathbf{a}}^\dagger)\tag{II.1.22}$$

II.2 Jaynes-Cummings-Modell

II.2.1 Definition

$$\begin{aligned}\hat{H} &= \hat{H}_0 + \hat{V} \\ \hat{H}_0 &= \hbar\omega \hat{q}^\dagger \hat{q} + E_1 \hat{P}_{11} + E_2 \hat{P}_{22}\end{aligned}\tag{II.2.1}$$

Pauli-Operatoren: $\hat{\sigma}_1, \hat{\sigma}_2, \hat{\sigma}_3$, wobei

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_3 &= \hat{P}_{22} - \hat{P}_{11} & \hat{I} &= \hat{P}_{11} + \hat{P}_{22} \\ \Rightarrow \hat{P}_{22} &= \frac{1}{2} (1 + \hat{\sigma}_3) & \hat{P}_{11} &= \frac{1}{2} (1 - \hat{\sigma}_3)\end{aligned}\tag{II.2.2}$$

damit wird

$$\boxed{\hat{H}_0 = \hbar\omega \hat{q}^\dagger \hat{q} + \frac{1}{2} \hbar\omega_{21} \hat{\sigma}_3 + \frac{1}{2} (E_1 + E_2) \hat{I}}\tag{II.2.3}$$

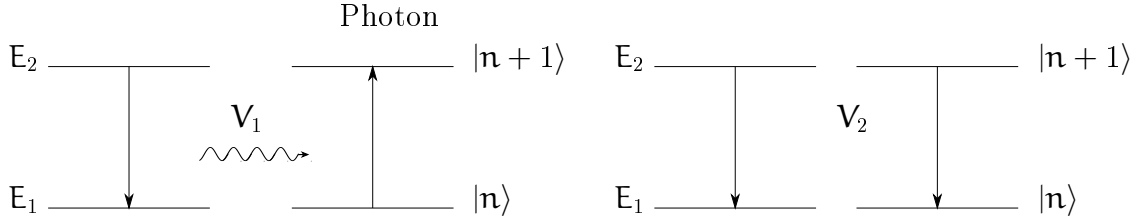


Abbildung II.2: Übergänge im Jaynes-Cummings-Modell

$$\hbar\omega_{21} = E_2 - E_1 = \Delta E_{21} \quad (\text{II.2.4})$$

Auf- und Absteigeoperatoren:

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}^- &= \frac{1}{2} (\hat{\sigma}_1 - i\hat{\sigma}_2) = \hat{P}_{21} & \hat{\sigma}_1 &= \hat{P}_{12} + \hat{P}_{21} \\ \hat{\sigma}^+ &= \frac{1}{2} (\hat{\sigma}_1 + i\hat{\sigma}_2) = \hat{P}_{12} & \hat{\sigma}_2 &= \frac{1}{2} i (\hat{P}_{12} - \hat{P}_{21}) \end{aligned} \quad (\text{II.2.5})$$

Mit (II.1.22):

$$\hat{V} = \hat{P}_{12} (\gamma_{12} \hat{q} + \gamma_{21}^* \hat{q}^\dagger) + \hat{P}_{21} (\gamma_{21} \hat{q} + \gamma_{12}^* \hat{q}^\dagger)$$

Mit $\hat{V} = \hat{V}_1 + \hat{V}_2$ (vgl. II.2):

$$\begin{aligned} \hat{V}_1 &= \gamma_{21}^* \hat{\sigma}^- \hat{q}^\dagger + \gamma_{21} \hat{\sigma}^+ \hat{q} \\ \hat{V}_2 &= \gamma_{12}^* \hat{\sigma}^+ \hat{q}^\dagger + \gamma_{12} \hat{\sigma}^- \hat{q} \end{aligned} \quad (\text{II.2.6})$$

In der häufig angewandten Rotating Wave Approximation (RWA) wird \hat{V}_2 vernachlässigt.

Anmerkung:

Die Mitnahme von \hat{V}_2 führt u. a. zum sogenannten Bloch-Siegert-Shift, welcher die Verschiebung der wahren Resonanzfrequenz beschreibt und üblicherweise vernachlässigbar ist, da andere Terme mehr ins Gewicht fallen (vgl. Allen, Eberly, Optical Resonance and 2-level atoms, S. 47). Der Name RWA stammt aus der semiklassischen Theorie (Treiber).

II.2.2 Dressed States (quantenmechanisch)

Gemäß vorigem Abschnitt, mit RWA:

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V}_1 \quad (\text{II.2.7})$$

$$\hat{H}_0 = -\frac{1}{2} \hbar\omega_{21} \hat{P}_{11} + \frac{1}{2} \hbar\omega_{12} \hat{P}_{22} + \hbar\omega \hat{q}^\dagger \hat{q} \quad (\text{II.2.8})$$

Eigenfunktionen zu \hat{H}_0 sind die Produktzustände $|j, n\rangle$, wobei j den Zustand des Atoms bezeichnet und n den Fock-Zustand des Feldes:

$$\begin{aligned} \hat{H}_0 |1, n\rangle &= \left(-\frac{1}{2} \hbar\omega_{12} + n\hbar\omega \right) |1, n\rangle \\ \hat{H}_0 |2, n\rangle &= \left(-\frac{1}{2} \hbar\omega_{21} + n\hbar\omega \right) |2, n\rangle \end{aligned} \quad (\text{II.2.9})$$

II Photonen und Atome

„Detuning“: $\delta = \omega_{12} - \omega$. Erwartungswerte:

$$\begin{aligned}\langle 2, \mathbf{n} | \hat{H}_0 | 2, \mathbf{n} \rangle &= \frac{1}{2} \hbar \delta + \left(\mathbf{n} + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega \\ \langle 1, \mathbf{n} + 1 | \hat{H}_0 | 1, \mathbf{n} + 1 \rangle &= -\frac{1}{2} \hbar \delta + \left(\mathbf{n} + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega\end{aligned}\quad (\text{II.2.10})$$

Bei $\delta = 0$ liegen entartete Dubletts vor:

$$\boxed{\{ |1, \mathbf{n} + 1\rangle, |2, \mathbf{n}\rangle \}} \quad (\text{II.2.11})$$

Mit (II.2.6) in RWA:

$$\hat{V}_1 = \gamma_{21}^* \hat{\sigma}^- \hat{q}^\dagger + \gamma_{21} \hat{\sigma}^+ \hat{q}$$

Vergleich mit (II.1.21): Sei

$$\mathbf{d}_{21} \cdot \mathbf{e} \equiv \text{id}_0 \quad (\text{II.2.12a})$$

$$\boxed{\gamma_{21} = \left(\frac{\hbar \omega}{2 \epsilon_0 V} \right)^{1/2} \mathbf{d}_0 \equiv \frac{1}{2} \hbar g} \quad (\text{II.2.12b})$$

Starke Kopplung entsteht also bei kleinem Volumen (cavity): $g \sim 1/V^{1/2}$. Übergangswahrscheinlichkeiten:

$$\langle 2, \mathbf{n} | \hat{V}_1 | 1, \mathbf{n} + 1 \rangle = \frac{1}{2} \hbar g \sqrt{\mathbf{n} + 1} \quad \langle \mathbf{n} | \hat{q} | \mathbf{n} + 1 \rangle = \sqrt{\mathbf{n} + 1} \quad (\text{II.2.13a})$$

$$\langle 1, \mathbf{n} + 1 | \hat{V}_1 | 2, \mathbf{n} \rangle = \frac{1}{2} \hbar g \sqrt{\mathbf{n} + 1} \quad \langle \mathbf{n} + 1 | \hat{q}^\dagger | \mathbf{n} \rangle = \sqrt{\mathbf{n} + 1} \quad (\text{II.2.13b})$$

Für zweidimensionale Unterräume ist der Hamilton-Operator $\hat{H}^{(n+1)}$ in Matrixdarstellung:

$$\mathcal{H}^{(n+1)} \equiv \left(\mathbf{n} + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \hbar \begin{pmatrix} \delta & 0 \\ 0 & -\delta \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \hbar g \sqrt{\mathbf{n} + 1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{II.2.14})$$

Man führt ein

$$\boxed{g_q^{(n+1)} \equiv g \sqrt{\mathbf{n} + 1}} \geq 0 \quad \mathbf{n} = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{II.2.15})$$

$g_q^{(n+1)}$ ist reell. Einsetzen in $\mathcal{H}^{(n+1)}$:

$$\mathcal{H}^{(n+1)} \equiv \left(\mathbf{n} + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \hbar \begin{pmatrix} -\delta & g_q^{(n+1)} \\ g_q^{(n+1)} & \delta \end{pmatrix} \quad (\text{II.2.16})$$

Matrix-Schrödinger-Gleichung für den zweiten Teil von (II.2.16):

$$\frac{1}{2} \hbar \begin{pmatrix} -\delta & g_q^{(n+1)} \\ g_q^{(n+1)} & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix} = \epsilon^{(n+1)} \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix} \quad (\text{II.2.17})$$

$$\boldsymbol{\psi}^{(n+1)} = \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix} \quad \mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 = 1 \quad (\text{II.2.18})$$

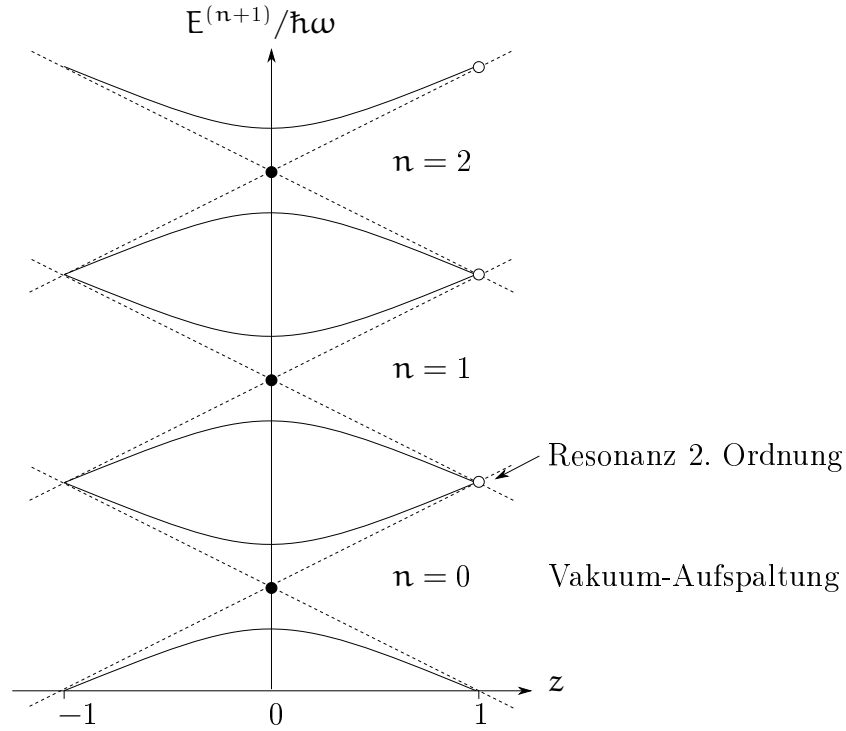


Abbildung II.3: Stark-Leiter

Charakteristische Determinante:

$$\begin{vmatrix} -\frac{1}{2}\hbar\delta - \epsilon^{(n+1)} & \frac{1}{2}\hbar g_q^{(n+1)} \\ \frac{1}{2}\hbar g_q^{(n+1)} & \frac{1}{2}\hbar\delta - \epsilon^{(n+1)} \end{vmatrix} = (\epsilon^{(n+1)})^2 - \frac{\hbar^2}{4} [\delta^2 + (g_q^{(n+1)})^2] = 0 \quad (\text{II.2.19})$$

$$\epsilon^{(n+1)} = \pm \frac{1}{2} \hbar \Omega_R^{(n+1)} \quad (\text{II.2.20a})$$

$$\Omega^{(n+1)} \equiv \left[(g_q^{(n+1)})^2 + \delta^2 \right]^{1/2} \quad (\text{II.2.20b})$$

$\Omega^{(n+1)}$ ist die „Rabi-Frequenz“ für den Fock-Zustand $|n\rangle$.

Das Eigenwertspektrum (quantenmechanische „dressed states“) ist schließlich:

$$\boxed{E_{\pm}^{(n+1)} = \left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar\omega \pm \frac{1}{2} \hbar \Omega^{(n+1)}} \quad (\text{II.2.21})$$

Dies kann man mit der „Stark-Leiter“ veranschaulichen, siehe Abb. II.3. Die Vakuumaufspaltung liegt bei $n = 0$. Die Intensität ist proportional zu $(g_q^{(n+1)})^2$. Für $n \gg 1$ sind benachbarte Aufspaltungen in etwa gleich. Zum Vergleich, ohne Kopplung, d. h. $g_q = 0$ (in Abb. II.3 gestrichelt):

$$E_{\pm}^{(n+1)}/\hbar\omega = \left(n + \frac{1}{2} \right) \pm \delta/2\omega$$

II.2.3 Eigenfunktionen

Für festes $n + 1$, mit (II.2.17) und (II.2.20):

$$\frac{1}{2} \hbar \begin{pmatrix} -\delta & g_q \\ g_q & \delta \end{pmatrix} |\pm\rangle = \pm \frac{1}{2} \hbar \Omega_R |\pm\rangle \quad (\text{II.2.22})$$

Lösungsansatz über unitäre Transformation:

$$\begin{pmatrix} |+\rangle \\ |-\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |1\rangle \\ |2\rangle \end{pmatrix} \quad (\text{II.2.23})$$

Mit (II.2.23) folgt aus (II.2.22) für $|+\rangle$:

$$-\delta \cos \varphi + g_q \sin \varphi = \Omega_R \cos \varphi \quad (\text{II.2.24})$$

$$-g_q \cos \varphi + \delta \sin \varphi = \Omega_R \sin \varphi \quad (\text{II.2.25})$$

Aus (II.2.25):

$$g_q^2 \cos^2 \varphi = (\Omega_R - \delta)^2 \sin^2 \varphi \quad (\text{II.2.26})$$

$$\implies \sin^2 \varphi = \frac{g_q^2}{(\Omega_R - \delta)^2 + g_q^2} \quad (\text{II.2.27})$$

Umformung:

$$\begin{aligned} \Omega_R^2 &= \delta^2 + g_q^2 \implies \Omega_R^2 - \delta^2 = g_q^2 \\ g_q^2 &= (\Omega_R + \delta)(\Omega_R - \delta) \end{aligned} \quad (\text{II.2.28})$$

Setzt man (II.2.28) in (II.2.27) ein, folgt nach einfacher Rechnung:

$$\boxed{\begin{aligned} \sin^2 \varphi &= \frac{1}{2} \frac{\Omega_R + \delta}{\Omega_R} \\ \cos^2 \varphi &= \frac{1}{2} \frac{\Omega_R - \delta}{\Omega_R} \end{aligned}} \quad (\text{II.2.29})$$

Für $\delta > 0$ ist $\cos^2 \varphi < \sin^2 \varphi$:

$|+\rangle$ hat den „Charakter“ $|2\rangle$, $|-\rangle$ hat den „Charakter“ $|1\rangle$ (Grundzustand).

Für $\delta < 0$ ist $\cos^2 \varphi > \sin^2 \varphi$:

$|+\rangle$ hat den „Charakter“ $|1\rangle$, $|-\rangle$ hat den „Charakter“ $|2\rangle$.

Für $\delta = 0$ (Resonanz) ist $\cos^2 \varphi = \sin^2 \varphi = \frac{1}{2}$ und

$$\Omega_R^{(n+1)} = g_q^{(n+1)} = 2g\sqrt{n+1}$$

Eingesetzt in (II.2.23) führt dies zu

$$\begin{aligned} |+, \mathbf{n} + 1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} [|1, \mathbf{n} + 1\rangle + |2, \mathbf{n}\rangle] \\ |-, \mathbf{n} + 1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} [|1, \mathbf{n} + 1\rangle - |2, \mathbf{n}\rangle] \end{aligned} \quad (\text{II.2.30})$$

Diese Zustände sind verschränkt, also sind die reduzierten Zustände im atomaren Unterraum total gemischt:

$$\hat{\rho}_{\text{Atom}} = \sum_{\mathbf{n}} \langle \mathbf{n} | \hat{\rho} | \mathbf{n} \rangle$$

wobei hier

$$\begin{aligned} \hat{\rho} &= |\mp, \mathbf{n} + 1\rangle \langle \mp, \mathbf{n} + 1| \\ &= \frac{1}{2} [|1, \mathbf{n} + 1\rangle \langle 1, \mathbf{n} + 1| + |2, \mathbf{n}\rangle \langle 2, \mathbf{n}| \\ &\quad \mp |1, \mathbf{n} + 1\rangle \langle 2, \mathbf{n}| \mp |2, \mathbf{n}\rangle \langle 1, \mathbf{n} + 1|] \end{aligned}$$

$$\hat{\rho}_{\text{Atom}} = \frac{1}{2} [|1\rangle \langle 1| + |2\rangle \langle 2|] \quad (\text{II.2.31})$$

Semiklassischer Limes (qualitativ): für $\mathbf{n} \rightarrow \infty$ ist $\mathbf{n} \approx \mathbf{n} + 1$

$$\Rightarrow |\pm, \mathbf{n} + 1\rangle \approx |\mathbf{n} + 1\rangle \otimes \frac{1}{\sqrt{2}} [|1\rangle \pm |2\rangle]$$

II.2.4 Rabi-Oszillationen

Literatur:

B. L. Shore, P. Knight, J. Mod. Optics **40**, 1195 (1993)

Quantenmechanische „dressed states“ ($\delta = 0$) nach (II.2.30), stationär:

$$\begin{aligned} |-, \mathbf{n} + 1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} [|1, \mathbf{n} + 1\rangle - |2, \mathbf{n}\rangle] \\ |+, \mathbf{n} + 1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} [|1, \mathbf{n} + 1\rangle + |2, \mathbf{n}\rangle] \end{aligned} \quad (\text{II.2.32})$$

Inverse Transformationen:

$$\begin{aligned} |1, \mathbf{n} + 1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} [|-, \mathbf{n} + 1\rangle + |+, \mathbf{n} + 1\rangle] \\ |2, \mathbf{n}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} [-|-, \mathbf{n} + 1\rangle + |+, \mathbf{n} + 1\rangle] \end{aligned} \quad (\text{II.2.33})$$

Allgemeiner nichtstationärer Zustand:

$$|\psi(t)\rangle = \alpha |-, n+1\rangle e^{i\Omega_R^{(n+1)}t/2} + \beta |+, n+1\rangle e^{-i\Omega_R^{(n+1)}t/2} \quad (\text{II.2.34})$$

Anfangsbedingung:

$$|\psi(0)\rangle = \alpha |-, n+1\rangle + \beta |+, n+1\rangle \quad (\text{II.2.35})$$

$$\stackrel{!}{=} |2, n\rangle \quad \Rightarrow \alpha = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \beta = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{vgl. (II.2.33)}$$

$$|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[-|-, n+1\rangle e^{i\Omega_R^{(n+1)}t/2} + |+, n+1\rangle e^{-i\Omega_R^{(n+1)}t/2} \right] \quad (\text{II.2.36})$$

Projektionen:

$$\langle 1, n+1 | \psi(t) \rangle = \frac{1}{2} \left[-e^{i\Omega_R^{(n+1)}t/2} + e^{-i\Omega_R^{(n+1)}t/2} \right] = -i \sin \left(\frac{1}{2} \Omega_R^{(n+1)} t \right) \quad (\text{II.2.37})$$

$$\langle 2, n | \psi(t) \rangle = -i \cos \left(\frac{1}{2} \Omega_R^{(n+1)} t \right) \quad (\text{II.2.38})$$

Die Wahrscheinlichkeiten beschreiben quantenmechanische Rabi-Oszillationen im Produktraum, siehe auch Abb. II.4:

$$\rho_{22}^{nn} = |\langle 2, n | \psi(t) \rangle|^2 = \cos^2 \left(\frac{1}{2} \Omega_R^{(n+1)} t \right) \quad (\text{II.2.39})$$

$$\rho_{11}^{n+1, n+1} = |\langle 1, n+1 | \psi(t) \rangle|^2 = \sin^2 \left(\frac{1}{2} \Omega_R^{(n+1)} t \right) \quad (\text{II.2.40})$$

Rabi entdeckte 1937 die „klassischen Rabi-Oszillationen“.

II.2.5 Spin-Boson-Modell

Wiederum Bezug auf (II.1.22), aber nun mit

$$\hat{H}_{\text{SB}} = \hbar\omega \hat{q}^\dagger \hat{q} + \frac{1}{2} \hbar\omega_{21} \hat{\sigma}_3 + \hat{V}_{\text{SB}} \quad (\text{II.2.41})$$

$$\hat{V}_{\text{SB}} = \gamma \hat{\sigma}_3 (\hat{q} + \hat{q}^\dagger) \quad (\text{II.2.42})$$

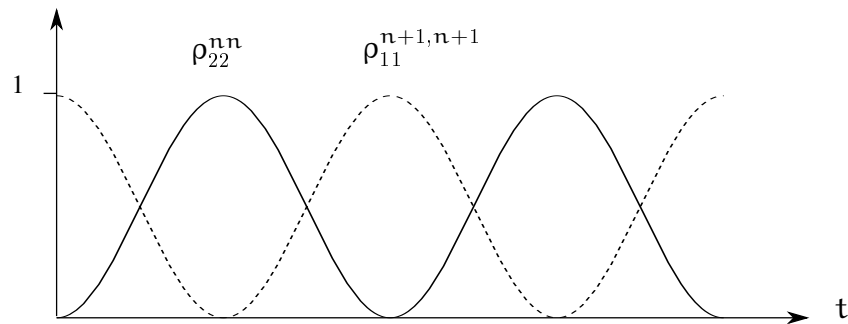


Abbildung II.4: Rabi-Oszillationen

Dieses Modell wird häufig außerhalb der Quantenoptik benutzt, z.B. für ein Zwei-Niveau-System mit einem aus vielen Phononenmoden bestehenden „Bad“.

II.3 Ein-Atom-Laser

II.3.1 Einführung

Literatur: Ms S. Feld et al, Sci. American Juli 1998, S. 41

Konventionelle Laser:

An der „Laser-Schwelle“ wird der Intensitätszuwachs pro Durchgang größer als die Verluste. Typischerweise sind rund 10^6 Atome notwendig, um ein Photon im Resonator zu halten! Ein konventioneller Laser kann Strahlung nicht durch einzelne Atome erzeugen!

Ein-Atom-Laser

Hier ist der Resonator klein, es treten quantisierte Rabi-Oszillationen auf (Jaynes-Cummings-Modell). Kritisch ist jedoch die ungewollte Bewegung der Spiegel. Die Lösung hierfür besteht aus einer Piezo-Rückkopplung. Die Atome werden anhand ihres Spektrums und ihrer Geschwindigkeit ausgewählt.

II.3.2 Herstellung von (Resonator-) Fock-Zuständen

Literatur:

Haroche, PRA **48**, 3991 (1993)

Haroche, PRL **71**, 2360 (1993)

Varcoe, Nature **403**, 743 (2000)

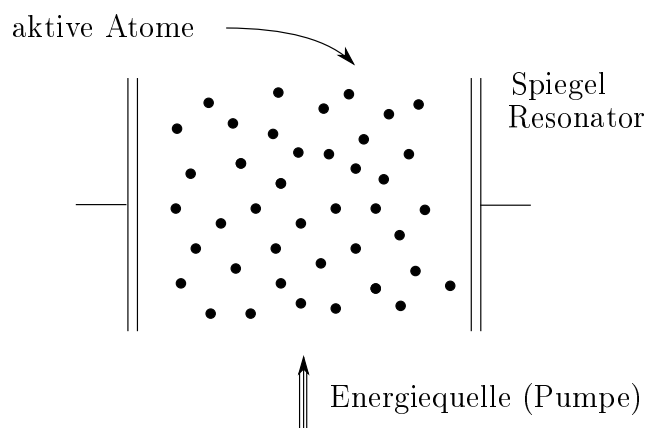


Abbildung II.5: Konventioneller Laser

II Photonen und Atome

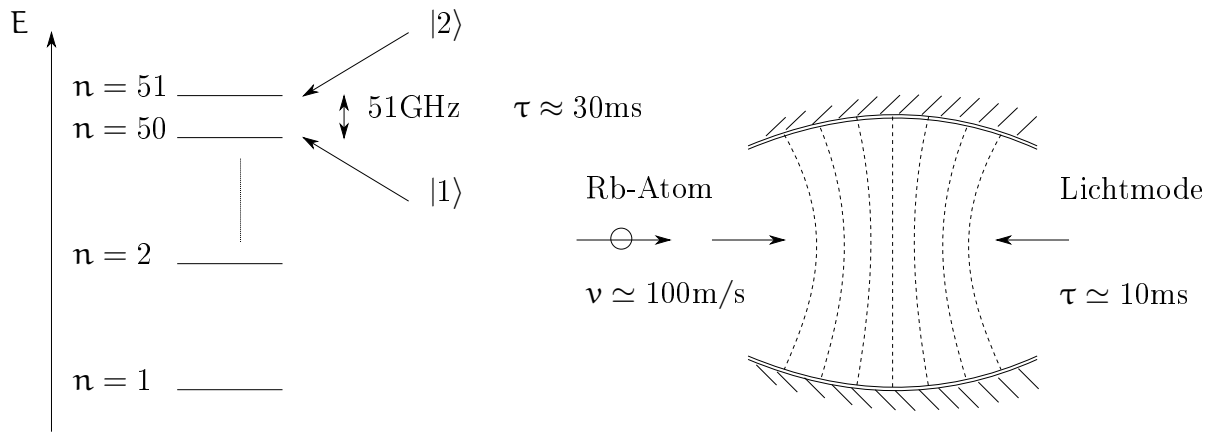


Abbildung II.6: Links: Niveaus im Rydberg-Atom, rechts: Resonator

Davidovich et al, PRL **71**, 2360 (1993)
 (Überlagerungszustand bezüglich zweier Hohlräume)

Bisher waren Atome und Hohlraum (Kavität) stationär. Nun benutzt man einen „Pumpstrom“ angeregter Atome. Die Anregung geschieht durch einen klassischen Laser. Es eignen sich hierzu Rydberg-Atome, vgl. Abb. II.6. Kopplung mit einer Vakuum-Rabi-Frequenz von $\Omega_R^{(1)} = 50\text{kHz}$. Aus (II.2.40):

$$\rho_{11}^{11} = \sin^2 \left(\frac{1}{2} \Omega_R^{(1)} t \right) \stackrel{!}{=} 1 \quad \Rightarrow \quad \Omega_R^{(1)} t = \pi \quad (\text{II.3.1})$$

$t = \tau$ ist die Flugzeit durch den Hohlraum, eingestellt über die Atomgeschwindigkeit v .

Quanten-Controlled-NOT ($\delta \neq 0$)

Literatur: P. Domokos et al, PRA **52**, 3554 (1995)

Siehe Abb. II.7. Strahle ein Hilfsfeld der Frequenz ω_{11} . Dann gilt:
 Atomarer Übergang $|1\rangle \rightarrow |2\rangle$, falls im Kavitätszustand $n = 1$ ein Photon ist.
 Kein Übergang $|1\rangle \rightarrow |1\rangle$, falls das Photon im Kavitätszustand $n \neq 1$ ist.

II.3.3 „Trapping States“

Literatur: Cummings, PRA **39**, 3414 (1989)

Hier ist $\delta = 0$ und die Flugzeit lang genug, s. u. Die Anzahl der Atome, welche die Kavität passiert haben, sei N und die Anzahl der Photonen darin sei n . Aus (II.2.39)

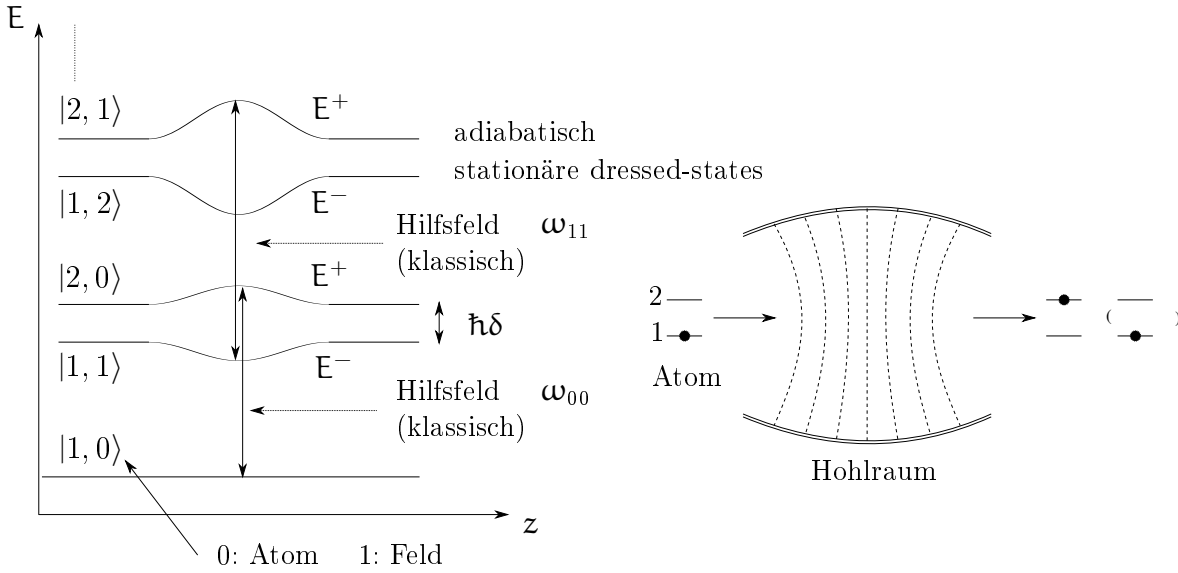


Abbildung II.7: Quanten-Controlled NOT

bzw. (II.2.40) folgt nun

$$\rho_{22}^{nn}(\tau) = \cos^2\left(\frac{1}{2}\Omega_R^{(n+1)}\tau\right) = 1 - \rho_{11}^{n+1,n+1} \quad (\text{II.3.2a})$$

$$\rho_{11}^{n+1,n+1}(\tau) = \sin^2\left(\frac{1}{2}\Omega_R^{(n+1)}\tau\right) \quad (\text{II.3.2b})$$

τ ist wiederum die Flugzeit durch die Kavität.

$\rho(n, N)$ ist die Wahrscheinlichkeit, dass nach dem Durchgang von N Atomen n Photonen zur Verfügung stehen.

Normierung:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \rho(n, N) = 1 \quad \text{für alle } N \quad (\text{II.3.3})$$

Mittlere Photonenzahl:

$$\bar{n}(N) = \sum_{n=0}^{\infty} n\rho(n, N) \quad (\text{II.3.4})$$

Sei

$$\rho_{11}^{n+1,n+1}(\tau) = 0 \quad \text{für } n = n_0 \quad (\text{II.3.5})$$

Aus (II.2.15), im Resonanzfall:

$$\Omega_R^{n+1} = g_q^{n+1} = 2g\sqrt{n+1} \quad (\text{II.3.6})$$

Aus (II.3.2a) und (II.3.2b) erhält man

$$\begin{aligned} \sin^2(g\sqrt{n+1}\tau) &= 0 \quad \text{erste Nullstelle} \\ \cos^2(g\sqrt{n+1}\tau) &= 1 \end{aligned}$$

damit zunächst

$$\sqrt{n_0 + 1} g \tau = \pi$$

und schließlich, für genügend kurzes τ :

$$\boxed{n_0 = \frac{\pi^2}{g^2 \tau^2} - 1} > 1 \quad (\text{II.3.7})$$

Ratengleichung bzgl. der Messung des Atomzustands 1/2 zur Zeit τ :

$$\rho(n, N + 1) = \rho_{22}^{nn}(\tau) \rho(n, N) + \rho_{11}^{nn}(\tau) \rho(n - 1, N) \quad (\text{II.3.8})$$

Mit (II.3.2a) und (II.3.5):

$$\rho(n, N + 1) - \rho(n, N) = -\rho_{11}^{n+1, n+1}(\tau) \rho(n, N) + \rho_{11}^{nn}(\tau) \rho(n - 1, N) \quad (\text{II.3.9a})$$

$$\rho(n_0, N + 1) - \rho(n_0, N) = \rho_{11}^{n_0 n_0} \rho(n_0 - 1, N) \geq 0 \quad (\text{II.3.9b})$$

$g(n_0, N)$ wächst mit N , d. h. mit der Zeit. Anfangsbedingung:

$$\rho(n_0 + j, 0) = 0 \quad \text{für alle } j > 0 \quad (\text{II.3.10})$$

Dann gilt:

$$\rho(n_0 + j, N) = 0 \quad \text{für alle } j > 0, N \geq 0 \quad (\text{II.3.11})$$

Beweis: Es ist $\rho(n_0 + 1, 1) = 0$ wegen (II.3.10) und (II.3.9). Entsprechend ist $\rho(n_0 + 1, 2) = 0$ usw. Multipliziere schließlich (II.3.9a) mit n und summiere:

$$\bar{n}(N + 1) - \bar{n}(N) = - \sum_{n=0}^{n_0} n \rho_{11}^{n+1, n+1} \rho(n, N) + \sum_{n=1}^{n_0+1} n \rho_{11}^{nn} \rho(n - 1, N)$$

Die obere Grenze ist $n_0 + 1$, da $\rho_{11}^{n_0+1, n_0+1} = 0$

$$\dots = - \sum_{n=0}^{n_0} n \rho_{11}^{n+1, n+1} \rho(n, N) + \sum_{n=1}^{n_0+1} (n - 1) \rho_{11}^{nn} \rho(n - 1, N) + \sum_{n=1}^{n_0+1} \rho_{11}^{nn} \rho(n - 1, N)$$

Durch eine Index-Verschiebung in der zweiten Summe sieht man, dass diese die erste Summe aufhebt. Es folgt:

$$\bar{n}(N + 1) - \bar{n}(N) = - \sum_{n=0}^{n_0} \rho_{11}^{n+1, n+1} \rho(n, N) \quad (\text{II.3.12})$$

Stationäre Lösung: $\bar{n}(N + 1) \stackrel{!}{=} \bar{n}(N)$, d. h. die rechte Seite von (II.3.12) muss gleich Null sein. Also:

$$\boxed{\rho(n, N) = \begin{cases} 1, & n = n_0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}} \quad (\text{II.3.13})$$

da $\rho_{11}^{n_0+1, n_0+1} = 0$.

Experiment nach Weidinger, PRL **82**, 3795 (1999): Zustands-selektive Feldionisation der Rydberg-Atome. Kavität: $Q = 3 \cdot 10^{10}$ ($\tau_{\text{Photon}} \approx 0, 2\text{s}$).

II.4 Cummings-Kollaps und Wiederkehr

Literatur: J. L. Basdevant, J. Dalibard, The quantum mechanics solver, Springer, 2000

II.4.1 Kohärente Zustände

Man betrachtet eine Mode bzgl. des Strahlungsfeldes.

$$|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{\mathbf{n}} \frac{\alpha^{\mathbf{n}}}{(\mathbf{n}!)^{1/2}} |\mathbf{n}\rangle \quad (\text{II.4.1})$$

$$\hat{\rho} = |\alpha\rangle\langle\alpha| = e^{-|\alpha|^2} \sum_{\mathbf{n}, \mathbf{n}'} \frac{\alpha^{\mathbf{n}} (\alpha^*)^{\mathbf{n}'}}{(\mathbf{n}! \mathbf{n}'!)^{1/2}} |\mathbf{n}\rangle\langle\mathbf{n}'|$$

Photonenstatistik:

$$w(\mathbf{n}) = \langle\mathbf{n}|\hat{\rho}|\mathbf{n}\rangle = \frac{|\alpha|^{2\mathbf{n}}}{(\mathbf{n}!)} e^{-|\alpha|^2} \quad (\text{II.4.2})$$

Dies ist die Poisson-Verteilung. Mittlere Photonenzahl:

$$\bar{\mathbf{n}} = \langle\alpha|\hat{a}^\dagger\hat{a}|\alpha\rangle = |\alpha|^2 \quad (\text{II.4.3})$$

Gauß-Limes: für $\bar{\mathbf{n}} \gg 1$ gilt

$$w(\mathbf{n}) \simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi\bar{\mathbf{n}}}} \exp\left(-\frac{(\mathbf{n} - \bar{\mathbf{n}})^2}{2\bar{\mathbf{n}}}\right) \quad (\text{II.4.4})$$

Beweis: Mandel, Wolf, S. 29

II.4.2 Rabi-Oszillationen für kohärente Feldzustände

Der Anfangszustand ist ein Produktzustand:

$$|\psi(0)\rangle = |2\rangle \otimes |\alpha\rangle \stackrel{(\text{II.4.1})}{=} e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{\mathbf{n}} \frac{\alpha^{\mathbf{n}}}{(\mathbf{n}!)^{1/2}} |2, \mathbf{n}\rangle \quad (\text{II.4.5})$$

Für das Jaynes-Cummings-Modell gilt in Resonanz, mit (II.2.30):

$$|2, \mathbf{n}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|+, \mathbf{n} + 1\rangle - |-, \mathbf{n} + 1\rangle) \quad (\text{II.4.6})$$

$$|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{\mathbf{n}} \frac{\alpha^{\mathbf{n}}}{(\mathbf{n}!)^{1/2}} (|+, \mathbf{n} + 1\rangle - |-, \mathbf{n} + 1\rangle) \quad (\text{II.4.7})$$

Mit (II.2.21):

$$E_{\pm}^{(\mathbf{n}+1)} = \left(\mathbf{n} + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega \pm \frac{1}{2} \hbar\Omega^{(\mathbf{n}+1)} \quad (\text{II.4.8})$$

folgt

$$|\psi(\mathbf{t})\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-|\alpha|^2/2} e^{-i(\mathbf{n}+\frac{1}{2})\omega\mathbf{t}} \times \\ \times \sum_{\mathbf{n}} \frac{\alpha^{\mathbf{n}}}{(\mathbf{n}!)^{1/2}} \left(e^{-i\Omega_{\mathbf{R}}^{(\mathbf{n}+1)}\mathbf{t}/2} |+, \mathbf{n}+1\rangle - e^{i\Omega_{\mathbf{R}}^{(\mathbf{n}+1)}\mathbf{t}/2} |-, \mathbf{n}+1\rangle \right)$$

Wir interessieren uns für $P_1(\mathbf{n}, \mathbf{t}) \equiv |\langle \mathbf{n}+1, 1 | \psi(\mathbf{t}) \rangle|^2$.

$$|1, \mathbf{n}+1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|+, \mathbf{n}+1\rangle - |-, \mathbf{n}+1\rangle)$$

$$P_1(\mathbf{n}, \mathbf{t}) = e^{-|\alpha|^2/2} \frac{|\alpha|^{2\mathbf{n}}}{4\mathbf{n}!} \left| e^{i\Omega_{\mathbf{R}}^{(\mathbf{n}+1)}\mathbf{t}/2} - e^{-i\Omega_{\mathbf{R}}^{(\mathbf{n}+1)}\mathbf{t}/2} \right|^2$$

Mit der Poisson-Verteilung $w(\mathbf{n})$ aus (II.4.2) und nach Umformung erhält man schließlich

$$\boxed{P_1(\mathbf{n}, \mathbf{t}) = w(\mathbf{n}) \cdot \frac{1}{2} \left(1 - \cos(\Omega_{\mathbf{R}}^{(\mathbf{n}+1)}\mathbf{t}) \right)} \quad (\text{II.4.9})$$

$P_1(\mathbf{n}, \mathbf{t})$ oszilliert also mit einer durch $w(\mathbf{n})$ gegebenen Amplitude. Insgesamt folgt also:

$$P_1(\mathbf{t}) = \sum_{\mathbf{n}=0}^{\infty} P_1(\mathbf{n}, \mathbf{t}) = \frac{1}{2} \left(1 - \sum_{\mathbf{n}=0}^{\infty} w_{\mathbf{n}} \cos(\Omega_{\mathbf{R}}^{(\mathbf{n}+1)}\mathbf{t}) \right) \quad (\text{II.4.10})$$

II.4.3 Berechnung der Kollapszeit

Mit (II.2.20b), (II.2.15) und $\delta = 0$:

$$\Omega_{\mathbf{R}}^{(\mathbf{n}+1)} = 2g\sqrt{\mathbf{n}+1} \quad (\text{II.4.11})$$

Näherung:

$$\bar{\mathbf{n}} \gg 1 \quad \implies (\mathbf{n} - \bar{\mathbf{n}}) \ll \bar{\mathbf{n}} \quad (\text{II.4.12})$$

Behauptung:

$$(\mathbf{n}+1)^{1/2} \approx (\bar{\mathbf{n}}+1)^{1/2} + \frac{\mathbf{n} - \bar{\mathbf{n}}}{2(\bar{\mathbf{n}}+1)^{1/2}}$$

Der Beweis folgt durch Quadrieren der Behauptung und Ausnutzung von (II.4.12). Damit ist also

$$\boxed{\Omega_{\mathbf{R}}^{(\mathbf{n}+1)} \simeq \Omega_{\mathbf{R}}^{(\bar{\mathbf{n}}+1)} + \Omega_{\mathbf{R}}^{(1)} \frac{\mathbf{n} - \bar{\mathbf{n}}}{2(\bar{\mathbf{n}}+1)^{1/2}}} \quad (\text{II.4.13})$$

und

$$\cos\left(\Omega_{\mathbf{R}}^{(\mathbf{n}+1)}\right) \simeq \cos\left(\Omega_{\mathbf{R}}^{(\bar{\mathbf{n}}+1)} + \Omega_{\mathbf{R}}^{(1)} \frac{\mathbf{n} - \bar{\mathbf{n}}}{2(\bar{\mathbf{n}}+1)^{1/2}}\right) \quad (\text{II.4.14})$$

Mit der Substitution $\mathbf{u} \equiv \mathbf{n} - \bar{\mathbf{n}}$ und der Beziehung

$$\cos(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \cos \mathbf{a} \cos \mathbf{b} - \sin \mathbf{a} \sin \mathbf{b}$$

wird daraus

$$\cos\left(\Omega_{\text{R}}^{(n+1)} t\right) \simeq \cos\left(\Omega_{\text{R}}^{(\bar{n}+1)} t\right) \cos\left(\Omega_{\text{R}}^{(1)} \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{t}}{2(\bar{n}+1)^{1/2}}\right) - \sin\left(\Omega_{\text{R}}^{(n+1)} t\right) \sin(\dots) \quad (\text{II.4.15})$$

Wir schreiben Gl. (II.4.10) mit Hilfe von (II.4.4) und (II.4.14), (II.4.15):

$$P_1(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{n}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\bar{n}}} \exp\left\{-\frac{\mathbf{u}^2}{2\bar{n}}\right\} \left[\cos\left(\Omega_{\text{R}}^{(\bar{n}+1)} t\right) \cos\left(\frac{\Omega_{\text{R}}^{(1)} \mathbf{u} t}{2(\bar{n}+1)^{1/2}}\right) - \dots \right] \quad (\text{II.4.16})$$

Man führt nun den Grenzübergang $\sum_{\mathbf{n}} \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{u}$ durch, wobei zu beachten ist, dass die ungerade Sinusfunktion keinen Beitrag leistet. Die untere Integrationsgrenze geht gegen $-\infty$ aufgrund der Weite der Verteilung $\sqrt{\bar{n}} \ll \bar{n}$. Aus Gl. (II.4.16) wird dann

$$P_1(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos\left(\Omega_{\text{R}}^{(\bar{n}+1)} t\right) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\bar{n}}} e^{-\mathbf{u}^2/2\bar{n}} \cos\left(\frac{\Omega_{\text{R}}^{(1)} \mathbf{u} t}{2(\bar{n}+1)^{1/2}}\right) d\mathbf{u} \quad (\text{II.4.17})$$

Hilfsformel:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mathbf{a}^2 x^2} \cos(\mathbf{b}x) dx = \frac{\sqrt{\pi}}{\mathbf{a}} e^{-\mathbf{b}^2/4\mathbf{a}^2}$$

wobei $\mathbf{a}^2 = (2\bar{n})^{-1}$ und $\mathbf{b} = \frac{\Omega_{\text{R}}^{(1)} t}{2(\bar{n}+1)^{1/2}}$. Damit ist für $\bar{n} \gg 1$:

$$P_1(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos\left(\Omega_{\text{R}}^{(\bar{n}+1)} t\right) e^{-t^2/\tau_{\text{D}}^2} \quad (\text{II.4.18a})$$

$$\tau_{\text{D}} = 2\sqrt{2}/\Omega_{\text{R}}^{(1)} \quad (\text{II.4.18b})$$

Die Kollapszeit τ_{D} ist unabhängig von der Photonenzahl \bar{n} ! Der Kollaps tritt ein für $t > T_{\text{D}}$ ist $P_1(t) = \frac{1}{2} = \text{const.}$ Für $V \rightarrow \infty$ ist $\Omega_{\text{R}}^{(1)} \rightarrow 0$ und $\tau_{\text{D}} \rightarrow \infty$.

II.4.4 Abschätzung der Wiederkehrzeit

Bedingung, dass alle Rabi-Frequenzen wieder in Phase sind:

$$\Omega_{\text{R}}^{(n+1)} \cdot \tau_{\text{R}} \approx 2m\pi \quad (\text{II.4.19})$$

wobei m eine ganze Zahl ist für alle \mathbf{n} . Mit (II.4.13) folgt

$$\left(\Omega_{\text{R}}^{(\bar{n}+1)} + \Omega_{\text{R}}^{(1)} \frac{\mathbf{n} - \bar{\mathbf{n}}}{2(\bar{\mathbf{n}} + 1)^{1/2}}\right) \tau_{\text{R}} \stackrel{!}{=} \text{const} + 2\pi(\bar{\mathbf{n}} - \mathbf{n})$$

II Photonen und Atome

wobei $\Omega_R^{(\bar{n}+1)}$ eine Konstante ist, da nicht von \bar{n} abhängig. Also gilt für die Wiederkehrzeit:

$$\tau_R = \frac{4\pi}{\Omega_R^{(1)}} \sqrt{\bar{n} + 1} \approx 4\sqrt{\bar{n}}\tau_D \quad (\text{II.4.20})$$

Wiederkehr der Oszillation $P_1(t)$ für $t \gtrsim \tau_R$.

Experiment: M. Brune et al, PRL **76**, 1800 (1996), Rubidium-Atom mit zwei Rydberg-Zuständen, Hohlraum mit Q-Faktor $\simeq 10^8$, gekühlt auf 0.8 K.

Anmerkungen:

- a. Dämpfung findet auch klassisch statt, falls die Intensität nicht im Frequenzraum scharf ist.
- b. Die Wiederkehr ist ein Quanteneffekt beruhend auf diskreten Rabi-Frequenzen. (Bei nur einer Mode existiert nur eine Lichtfrequenz!)

Weitere Literatur:

P. Meystre, M. Sargent: Elements of Quantum Optics

B. L. Shore, J. mod. Optics **40**, 1195 (1993)

G. Rempe et al, PRL **58**, 353 (1987)

II.5 Verallgemeinerte Bloch-Gleichungen

Halbklassische Strahlungstheorie: Das Atom wird quantenmechanisch behandelt, das Feld dagegen klassisch.

II.5.1 Operator Darstellungen im Liouville-Raum

Die Dimension des Hilbertraums sei n , d.h. er wird durch n orthogonale Zustände aufgespannt. Die Dimension des Liouville-Raums ist dann n^2 , dieser wird durch n^2 orthogonale Operatoren \hat{Q}_j aufgespannt:

$$\text{Spur}\{\hat{Q}_j \hat{Q}_k^\dagger\} = \delta_{ij}$$

$$\implies \hat{A} = \sum_{j=1}^{n^2} \hat{Q}_j \text{Spur}\{\hat{Q}_j^\dagger \hat{A}\}$$

a. **Darstellung durch Übergangsoperatoren:**

$$\hat{Q}_j \longrightarrow \hat{P}_{kl} = |k\rangle\langle k| \quad \hat{P}_{lk} = \hat{P}_{kl}^\dagger$$

$$\hat{A} = \sum_{k,l} \hat{P}_{kl} \underbrace{\text{Spur}\{\hat{P}_{kl} \hat{A}\}}_{\equiv A_{jk}}$$

Die A_{jk} sind die konventionelle Matrixdarstellung von \hat{A} .

b. **SU(n)-Darstellung** (vgl. G. Mahler et al, Quantum Networks)

$$\hat{Q}_0 = \frac{1}{\sqrt{n}} \hat{1}$$

$$\hat{Q}_j = \hat{Q}_j^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{\lambda}_j \quad j = 1, 2, \dots, n^2 - 1$$

$$\text{Spur}\{\hat{\lambda}_j\} = 0 \quad j \neq 0$$

$$\text{Spur}\{\hat{\lambda}_j \hat{\lambda}_k\} = 2\delta_{jk}$$

$$[\hat{\lambda}_i, \hat{\lambda}_j]_- = 2i \sum_{k=1}^{n^2-1} f_{ijk} \hat{\lambda}_k$$

Die Koeffizienten f_{ijk} sind Strukturkonstanten (total antisymmetrische Matrix).

Für die Operatoren $\hat{\lambda}_j$ gilt:

$$\begin{aligned}\hat{\lambda}_j &\equiv \{\hat{u}_{12}, \hat{u}_{13}, \hat{u}_{23}, \dots, \hat{w}_1, \hat{w}_n\} \quad \text{mit} \\ \hat{u}_{jk} &= \hat{P}_{jk} + \hat{P}_{kj} \quad 1 \leq j < k \leq n \\ \hat{v}_{jk} &= i(\hat{P}_{jk} - \hat{P}_{kj}) \\ \hat{w}_l &= -\sqrt{\frac{2}{l(l+1)}} (\hat{P}_{11} + \hat{P}_{22} + \hat{P}_{ll} - l\hat{P}_{l+1,l+1}) \quad 1 \leq l \leq n-1\end{aligned}$$

Speziell für $n = 2$ hat man wieder die Pauli-Operatoren:

$$\hat{\sigma}_1 = \hat{u}_{12}, \quad \hat{\sigma}_2 = \hat{v}_{12}, \quad \hat{\sigma}_3 = \hat{w}_1, \quad f_{ijk} = \varepsilon_{ijk}$$

Ein Operator \hat{A} lässt sich also wie folgt zerlegen:

$$\hat{A} = \frac{1}{n} \mathbf{a}_0 \hat{1} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n^2-1} \mathbf{a}_j \hat{\lambda}_j$$

wobei $\mathbf{a}_0 = \text{Spur}\{\hat{A}\}$ und $\mathbf{a}_j = \text{Spur}\{\hat{A}\hat{\lambda}_j\}$, „Vektordarstellung“. Beispiele:

$$\begin{aligned}\hat{H} &= \frac{1}{n} h_0 \hat{1} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n^2-1} h_j \hat{\lambda}_j \\ \hat{\rho} &= \frac{1}{n} \hat{1} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n^2-1} \lambda_j \hat{\lambda}_j\end{aligned}$$

Kohärenzvektor (verallgemeinerter Bloch-Vektor) für beliebiges n :

$$\boldsymbol{\lambda} = \{\mathbf{u}_{12}, \mathbf{u}_{13}, \dots, \mathbf{v}_{12}, \dots, \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_{n-1}\}$$

II.5.2 Dynamik

Liouville-Gleichung:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \hat{\rho} = [\hat{H}, \hat{\rho}] \quad (\text{II.5.1})$$

a. **Matrixdarstellung:** Multipliziere von links mit $\hat{P}_{ij}^\dagger = \hat{P}_{ij}$ und bilde die Spur:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \text{Spur}\{\hat{P}_{ij} \hat{\rho}\} = \text{Spur}\{\hat{P}_{ij} \hat{H} \hat{\rho}\} - \text{Spur}\{\hat{P}_{ij} \hat{\rho} \hat{H}\} \quad (\text{II.5.2})$$

$$\begin{aligned}\rho_{ij} &= \text{Spur}\{\hat{P}_{ij} \hat{\rho}\} = \langle i | \hat{\rho} | j \rangle \\ H_{ij} &= \text{Spur}\{\hat{P}_{ij} \hat{H}\} = \langle i | \hat{H} | j \rangle\end{aligned} \quad (\text{II.5.3})$$

Nach kurzer Umformung (benutze die Vollständigkeitsrelation) ergibt sich:

$$\boxed{\begin{aligned} i\hbar\rho_{ij} &= \sum_{n,m} D_{ij,mn}\rho_{mn} \\ D_{ij,mn} &= H_{im}\delta_{jn} - H_{nj}\delta_{im} \end{aligned}} \quad (\text{II.5.4})$$

- b. **Vektordarstellung:** Multipliziere die Liouville-Gleichung mit $\hat{\lambda}_j$ und bilde die Spur:

$$\frac{\partial}{\partial t} \text{Spur}\{\hat{\lambda}_j \hat{\rho}\} = \frac{1}{i\hbar} \text{Spur}\{\hat{\lambda}_j [\hat{H}, \hat{\rho}]\} = -\frac{1}{i\hbar} \text{Spur}\{\hat{H} [\hat{\lambda}_j, \hat{\rho}]\} \quad (\text{II.5.5})$$

Dies entspricht einem „Spatprodukt“ antizyklischer Vektoren. Weiterhin ist

$$\hat{\rho} = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{n} \hat{1} + \sum_k \lambda_k \hat{\lambda}_k \right); \text{ beachte: } [\hat{\lambda}_j, \hat{1}]_- = 0 \quad (\text{II.5.6})$$

$$[\hat{\lambda}_j, \hat{\rho}]_- = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n^2-1} \lambda_k [\hat{\lambda}_j, \hat{\lambda}_k]_- = i \sum_{k,l} \lambda_k f_{jkl} \hat{\lambda}_l$$

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{n} \hat{1} H_0 + \sum_m H_m \hat{\lambda}_m \right); \text{ beachte: } \text{Spur}\{\hat{\lambda}_l\} = 0; l \neq 0 \quad (\text{II.5.7})$$

Für die Zeitableitung der λ_j gilt also

$$\frac{\partial}{\partial t} \lambda_j = -\frac{1}{2n} \sum_{kml} \lambda_k f_{jkl} \text{Spur}\{\hat{\lambda}_l \hat{\lambda}_m\} H_m = -\frac{1}{\hbar} \sum_{k,l=1}^{n^2-1} f_{jkl} \lambda_k H_l \quad (\text{II.5.8})$$

mit den Strukturkonstanten f_{jkl} . Dies entspricht einem verallgemeinerten Vektorprodukt:

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t} \boldsymbol{\lambda} = \frac{1}{\hbar} \mathbf{H} \times \boldsymbol{\lambda}} \quad (\text{II.5.9})$$

Man definiert eine Drehmatrix:

$$\Omega_{jk} \equiv \frac{1}{\hbar} \mathbf{H} \times \boldsymbol{\lambda} \quad (\text{II.5.10})$$

und erhält schließlich die Bloch-Gleichung

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t} \lambda_j = \sum_k \Omega_{jk} \lambda_k} \quad (\text{II.5.11})$$

Die Definition des Bloch-Vektors ist hierbei

$$\lambda_k = \text{Spur}\{\hat{\lambda}_k \hat{\rho}\} = \langle \hat{\lambda}_k \rangle \quad (\text{II.5.12})$$

Er ist reell, da $\hat{\lambda}$ hermitesch ist.

Invariante: aufgrund von (II.5.10) ist

$$\frac{\partial}{\partial t} |\boldsymbol{\lambda}|^2 = 2 \sum_j \dot{\lambda}_j \lambda_j = 2 \sum_{jk} \Omega_{jk} \lambda_j \lambda_k = 0 \quad (\text{II.5.13})$$

Bei einem reinen Zustand mit $n = 2$:

$$\begin{aligned} \hat{\rho}^2 &= \frac{1}{4} \left(\frac{4}{n^2} \hat{1} + \frac{2}{n} \sum_k \lambda_k \hat{\lambda}_k + \sum_k \lambda_k^2 \hat{\lambda}_k^2 \right) \\ \text{Spur}\{\hat{\rho}^2\} &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\lambda}^2 \stackrel{!}{=} \hat{1} \quad \text{da } \hat{\lambda}_k^2 = \hat{1} \\ &\implies |\boldsymbol{\lambda}|^2 = 1 \end{aligned} \quad (\text{II.5.14})$$

Allgemein:

$$\text{Spur}\{\hat{\rho}^2\} = \frac{1}{n^2} \text{Spur}\{\hat{1}\} + \frac{1}{4} \sum_{i,j} \lambda_i \lambda_j \text{Spur}\{\hat{\lambda}_i \hat{\lambda}_j\} = \frac{1}{n} + \frac{1}{2} |\boldsymbol{\lambda}|^2 = 1$$

II.6 Getriebenes Zwei-Niveau-System

Licht wird in Folge klassisch behandelt, dadurch hier keine Verschränkung zwischen Licht und Materie!

II.6.1 Bloch-Gleichung für getriebenes Zwei-Niveau-System

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \hat{H}_A + \hat{H}_{AF}(t) \\ \hat{H}_A &= \frac{1}{2} \hbar \omega_{21} (\hat{P}_{22} - \hat{P}_{11}) \\ \hat{H}_{AF}(t) &= -\hat{\mathbf{d}} \cdot \mathbf{E}(t) \end{aligned} \quad (\text{II.6.1})$$

Semiklassisch:

$$\begin{aligned} \mathbf{q}(t) &= q_0 e^{-i\omega t} \quad \mathbf{q}^*(t) = q_0 e^{i\omega t} \\ \mathbf{E}(t) &= i\mathcal{E} \mathbf{e}(\mathbf{q}(t) - \mathbf{q}^*(t)) = 2\mathbf{e}\mathcal{E} q_0 \sin \omega t \equiv 2\mathbf{E}_0 \sin \omega t \\ \hat{\mathbf{d}} &= \mathbf{d}_{12} \hat{P}_{12} + \mathbf{d}_{21} \hat{P}_{21} \end{aligned} \quad (\text{II.6.2})$$

Kopplung:

$$\begin{aligned} \hbar g_C &\equiv -2\mathbf{d}_{12} \cdot \mathbf{e}\mathcal{E} q_0 \equiv -2\mathbf{d}_{21} \mathbf{E}_0 \\ \hat{H}_{AF} &= \frac{1}{2} \hbar (g_C \hat{P}_{12} + g_C^* \hat{P}_{21}) (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}) \end{aligned} \quad (\text{II.6.3})$$

Rotating Wave Approximation (RWA), vgl. II.1:

$$\hat{H}_{\text{AF}}(t) = \frac{1}{2} \hbar [g_C \hat{P}_{21} e^{i\omega t} + g_C^* \hat{P}_{21} e^{-i\omega t}] \quad (\text{II.6.4})$$

Bedingung für RWA:

$$\{g_C, \delta \equiv \omega_{21} - \omega\} \ll \{\omega_j, |\omega_{ij}|\}$$

Sei g_C reell: mit den Pauli-Operatoren

$$\begin{aligned} \hat{P}_{21} &= \frac{1}{2} (\hat{\lambda}_1 + i\hat{\lambda}_2) \\ \hat{P}_{12} &= \frac{1}{2} (\hat{\lambda}_1 - i\hat{\lambda}_2) \end{aligned}$$

ist schließlich

$$\hat{H}_{\text{AF}}(t) = \frac{1}{2} \hbar g_C (\hat{\lambda}_1 \cos \omega t + \hat{\lambda}_2 \sin \omega t) \quad (\text{II.6.5})$$

mit ω als Treiberfrequenz. Der gesamte Hamiltonian ist dann

$$\hat{H} = \hat{H}_A + \hat{H}_{\text{AF}}(t) = \frac{1}{2} \left(\underbrace{\hbar g_C \cos \omega t}_{H_1} \hat{\lambda}_1 + \underbrace{\hbar g_C \sin \omega t}_{H_2} \hat{\lambda}_2 + \underbrace{\hbar \omega_{21}}_{H_3} \hat{\lambda}_3 \right) = \frac{1}{2} \sum_j H_j \hat{\lambda}_j \quad (\text{II.6.6})$$

Nach (II.5.10):

$$\Omega_{jk} = -\frac{1}{\hbar} \sum_i \varepsilon_{ijk} H_i \quad (\text{II.6.7})$$

Hier:

$$\mathbf{\Omega} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_{21} & g_C \sin \omega t \\ \omega_{21} & 0 & -g_C \cos \omega t \\ -g_C \sin \omega t & g_C \cos \omega t & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{II.6.8})$$

In diesem Fall lauten die Bloch-Gleichungen also

$$\begin{cases} \dot{\tilde{\lambda}}_1 = -\omega_{21} \tilde{\lambda}_2 + g_C \sin \omega t \tilde{\lambda}_3 \\ \dot{\tilde{\lambda}}_2 = -\omega_{21} \tilde{\lambda}_1 + g_C \cos \omega t \tilde{\lambda}_3 \\ \dot{\tilde{\lambda}}_3 = -g_C \sin \omega t \tilde{\lambda}_1 + g_C \cos \omega t \tilde{\lambda}_2 \end{cases} \quad (\text{II.6.9})$$

II.6.2 Transformation auf ein rotierendes Bezugssystem

$$\begin{pmatrix} \tilde{\lambda}_1 \\ \tilde{\lambda}_2 \\ \tilde{\lambda}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \omega t & \sin \omega t & 0 \\ -\sin \omega t & \cos \omega t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \mathcal{R} \lambda \quad (\text{II.6.10})$$

Sei $\delta \equiv \omega_{21} - \omega$ („Verstimmung“). Dann sind die Bloch-Gleichungen im neuen Bezugssystem:

$$\begin{cases} \dot{\tilde{\lambda}}_1 = -\delta \tilde{\lambda}_2 \\ \dot{\tilde{\lambda}}_2 = \delta \tilde{\lambda}_1 - g_C \tilde{\lambda}_3 \\ \dot{\tilde{\lambda}}_3 = g_C \tilde{\lambda}_2 \end{cases} \quad (\text{II.6.11})$$

Inverse Transformation:

$$\mathcal{R}_{ij}^{-1} = \mathcal{R}_{ij}^T = \mathcal{R}_{ji}; \quad \lambda = \mathcal{R}^{-1} \tilde{\lambda} \quad (\text{II.6.12})$$

Effektiver Hamilton-Operator für Gl. (II.6.11) (vgl. mit (II.6.9)):

$$\tilde{H} = \frac{1}{2} \hbar \delta \hat{\lambda}_3 + \frac{1}{2} \hbar g_C \hat{\lambda}_1 = \hat{H}(t=0) - \hbar \omega \quad (\text{II.6.13})$$

Außer $t = 0$ ist auch eine andere feste Zeit $t \neq 0$ denkbar – Phase! Die Symmetrie bezüglich $\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2$ ist dann gebrochen.

II.6.3 Stationäre Lösung

$$\frac{\partial}{\partial t} \tilde{\lambda}_i = 0 \implies \tilde{\lambda}_2 = 0 \quad (\delta \neq 0 \text{ und/oder } g \neq 0)$$

Setze $P_0^2 = (\tilde{\lambda}_1)^2 + (\tilde{\lambda}_3)^2 \leq 1$: Die Länge des Bloch-Vektors ist hier unbestimmt!

$$\delta^2 (\tilde{\lambda}_1)^2 = g_C^2 (\tilde{\lambda}_3)^2 = g_C^2 (P_0^2 - (\tilde{\lambda}_1)^2)$$

Rabi-Frequenz:

$$\Omega_R^2 = \delta^2 + g_C^2 \quad (\text{II.6.14})$$

„Semiklassische dressed states“:

$$\begin{cases} (\tilde{\lambda}_1)^2 = P_0^2 g_C^2 / \Omega_R^2 \\ (\tilde{\lambda}_3)^2 = \delta^2 / \Omega_R^2 \end{cases} \quad (\text{II.6.15})$$

a. **Adiabatic following** (Effektive Materie abhängig von Licht):

Sei $P_0 = 1$ (reiner Zustand, Länge des Bloch-Vektors gleich 1) und $g_C > 0$ fest. Aus (II.6.15):

$$\tilde{\lambda}^\pm = \pm \frac{1}{\sqrt{\delta^2 + g_C^2}} (g_C, 0, \delta) \quad (\text{II.6.16})$$

Durch Variation des Parameters δ erfolgt reversible Besetzungsinversion! Siehe dazu Abb. II.8. Adiabatische Bedingung (ohne Beweis):

$$|\dot{\tilde{\lambda}}| / |\tilde{\lambda}| \ll \Omega_R \quad (\text{II.6.17})$$

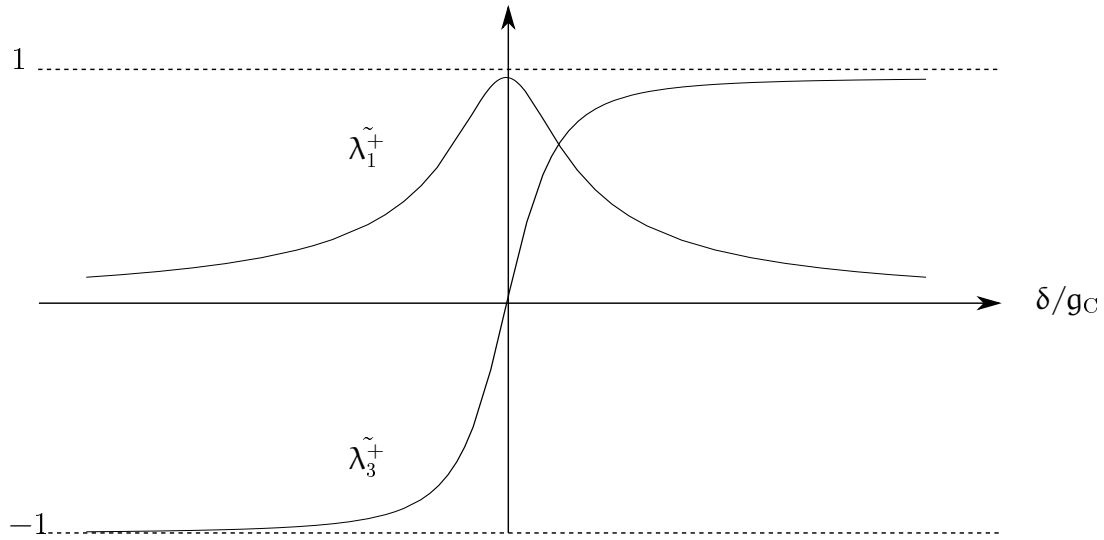


Abbildung II.8: Adiabatic following: Komponenten von $\hat{\lambda}$

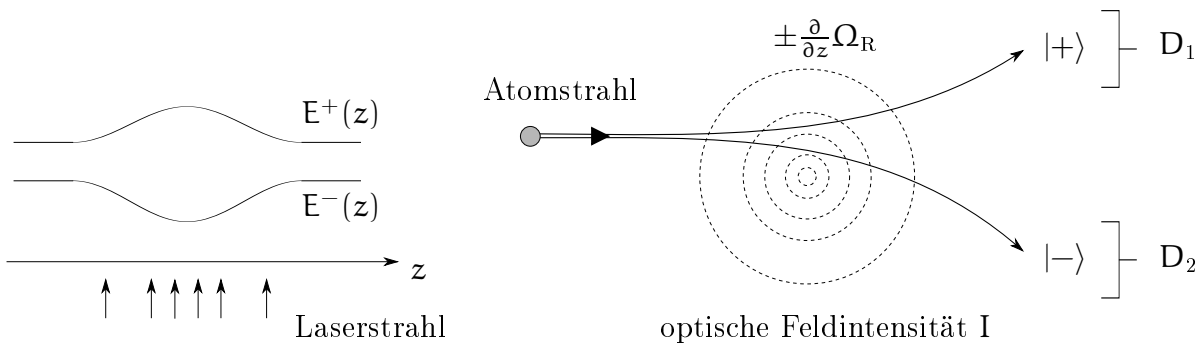


Abbildung II.9: Optischer Stern-Gerlach-Effekt. Links: Energie des Atoms im Lichtfeld, rechts: Einfluss der Dipolkraft

b. Optischer Stern-Gerlach-Effekt

Literatur:

Scully, Quantum Optics

Walls, Milburn, Quantum Optics

T. Pfau et al, Phys. Bl. **50**, 45 (1994)

T. Pfau, PRL **21**, 439 (1994); Europhys. Lett. **21**, 439 (1994)

Semiklassische Theorie: Licht wird klassisch behandelt und koppelt an innere Freiheitsgrade des Atoms an.

Potentialkräfte (diffraktiv): Innere Freiheitsgrade \leftrightarrow Translationsfreiheitsgrade

Rückstoßkräfte (dissipativ): Laserkühlung

Diagonalisierung des effektiven Hamilton-Operators aus (II.6.13):

$$\tilde{H} = \frac{1}{2} \hbar \begin{pmatrix} -\delta & g_C \\ g_C & \delta \end{pmatrix} \quad (\text{II.6.18})$$

Eigenwerte gemäß (II.2.21):

$$\begin{aligned} E^\pm &= \pm \frac{1}{2} \hbar \Omega_R \\ \Omega_R^2 &= \delta^2 + g_C^2 \end{aligned} \quad (\text{II.6.19})$$

Diffraktiver Limes: keine Absorption!

$$|\delta| \gg g_C \quad (\text{II.6.20})$$

Es ist (siehe Abbildung II.9 links):

$$g_C = g_C(z)$$

Dipolkraft (vgl. Abb. II.9 rechts):

$$F_Z^\pm = -\frac{\partial}{\partial z} E^\pm \quad (\text{II.6.21})$$

$$\boxed{\begin{aligned} F_Z^+ &= \frac{1}{2} \hbar \frac{\partial}{\partial z} \Omega_R(z) \\ F_Z^- &= \frac{1}{2} \hbar \frac{\partial}{\partial z} \Omega_R(z) = -F_Z^+ \end{aligned}} \quad (\text{II.6.22})$$

Anwendung: Atom-optische Linse (fokussiere Strahl | $-$)

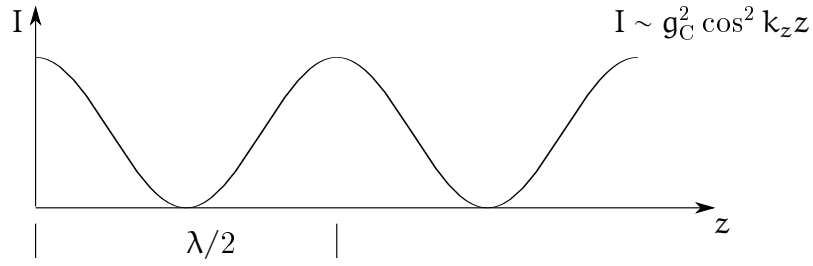


Abbildung II.10: Lichtpotential (stehende Lichtwelle)

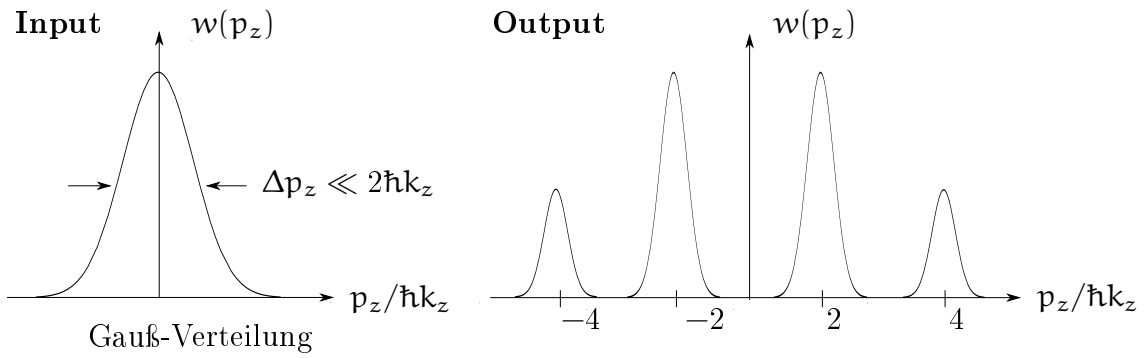


Abbildung II.11: Transversale Impulsverteilung: Input-Output

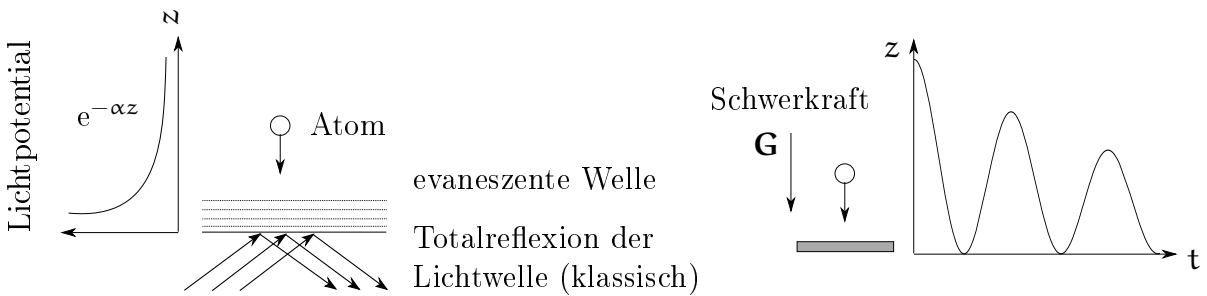


Abbildung II.12: Links: Atomoptischer Spiegel, rechts: „Atomares Trampolin“

c. **Beugung von Atomstrahlen an einer stehenden Lichtwelle**

Siehe Abb. II.10. \mathbf{k}_z ist der Wellenvektor des Lichts, die Periode im \mathbf{k} -Raum (Intensität) ist hier aber $2\mathbf{k}_z$! Im diffraktiven Grenzfall, d. h. für $|\delta| \gg |g_C|$ ist

$$\begin{aligned} \Omega_R &= (\delta^2 + (g_C \cos k_z z)^2)^{1/2} \\ &= \delta (1 + (g_C \cos(k_z z)/\delta)^2)^{1/2} \approx \delta (1 + g_C^2 \cos^2(k_z z)/2\delta^2) \end{aligned} \quad (\text{II.6.23})$$

Die Eigenwerte sind dann:

$$\boxed{E_z^+ = \text{const} + \hbar g_C^2 \cos^2(k_z z)/2\delta} \quad (\text{II.6.24})$$

Transversale Impulsverteilung: alle Atome sind im gleichen Zustand $|+\rangle$, siehe Abb. II.11. Der Impulsübertrag ist

$$\Delta p_z = \pm 2n\hbar k_z \quad n = 1, 2, \dots$$

Anwendungen: Lithographieverfahren (T. Pfau et al, Phys. Bl. **50**, 45 (1994))

d. **Atom-optischer Spiegel** Die Reflexion von Atomen an reinen Oberflächen wird durch Adhäsion und inelastische Phononenstreuung gestört. Dies kann man vermeiden durch eine „Beschichtung“ mit einem evaneszenten Lichtpotential ($|\delta| \gg |g_C|$). Siehe Abb. II.12 links.

e. **Atomares Trampolin** (mit Schwerkraft): M. Kasevich, Opt. Lett. **15**, 607 (1990). Siehe Abb. II.12 rechts.

II.6.4 Nicht-stationäre Lösungen

a. **Freie Präzession** (siehe Abb. II.13) Sei in (II.6.11) $g_C = 0$:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\lambda}}_1 &= -\delta \tilde{\lambda}_2 \\ \dot{\tilde{\lambda}}_2 &= \delta \tilde{\lambda}_1 \end{aligned} \quad (\text{II.6.25})$$

$$\implies \ddot{\tilde{\lambda}}_1 + \delta \tilde{\lambda}_2 = \ddot{\tilde{\lambda}}_1 + \delta^2 \tilde{\lambda}_1 = 0$$

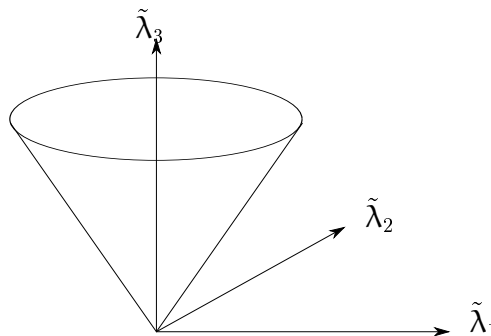


Abbildung II.13: Freie Präzession

Es liegt ein harmonischer Oszillator vor! Anfangsbedingung für $\mathbf{t} = \mathbf{t}_0$:

$$\tilde{\boldsymbol{\lambda}} = (\tilde{\lambda}_1(\mathbf{t}_0), \tilde{\lambda}_2(\mathbf{t}_0), \tilde{\lambda}_3(\mathbf{t}_0))$$

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda}_1(\mathbf{t}) &= \tilde{\lambda}_1(\mathbf{t}_0) \cos(\delta(\mathbf{t} - \mathbf{t}_0)) - \tilde{\lambda}_2(\mathbf{t}_0) \sin(\delta(\mathbf{t} - \mathbf{t}_0)) \\ \tilde{\lambda}_2(\mathbf{t}) &= \tilde{\lambda}_1(\mathbf{t}_0) \sin(\delta(\mathbf{t} - \mathbf{t}_0)) + \tilde{\lambda}_2(\mathbf{t}_0) \cos(\delta(\mathbf{t} - \mathbf{t}_0)) \\ \tilde{\lambda}_3(\mathbf{t}) &= \tilde{\lambda}_3(\mathbf{t}_0) = \text{const} \end{aligned} \quad (\text{II.6.26})$$

Für $\delta = 0$ ist im rotierenden Bezugssystem $\tilde{\lambda}_j = \text{const}$.

b. **Optische Nutation** (Rabi-Oszillation; $g_C \neq 0$). Anfangsbedingung für $\mathbf{t} = \mathbf{t}_0$:

$$\boldsymbol{\lambda} = (0, 0, \lambda_3(\mathbf{t}_0))$$

Aus (II.6.11):

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\lambda}}_1 + \delta \tilde{\lambda}_2 &= 0 & g_C \dot{\tilde{\lambda}}_1 + g_C \delta \tilde{\lambda}_2 &= 0 \\ \dot{\tilde{\lambda}}_3 + g_C \tilde{\lambda}_2 &= 0 & \delta \dot{\tilde{\lambda}}_3 + g_C \delta \tilde{\lambda}_2 &= 0 \\ \implies g_C \dot{\tilde{\lambda}}_1 + \delta \dot{\tilde{\lambda}}_3 &= 0 \end{aligned}$$

Für $\delta \neq 0$ ist $\dot{\tilde{\lambda}}_3 = -\frac{g_C}{\delta} \dot{\tilde{\lambda}}_1$, woraus folgt:

$$\tilde{\lambda}_3(\mathbf{t}) - \tilde{\lambda}_3(\mathbf{t}_0) = -\frac{g_C}{\delta} \tilde{\lambda}_1 \quad (\text{II.6.27})$$

Wiederum aus (II.6.11):

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\lambda}}_1 &= \delta \tilde{\lambda}_1 - g_C \tilde{\lambda}_3 \\ \ddot{\tilde{\lambda}}_1 + \delta \dot{\tilde{\lambda}}_2 &= \ddot{\tilde{\lambda}}_1 + \delta^2 \tilde{\lambda}_1 - g_C \delta \tilde{\lambda}_3 = 0 \\ \implies \ddot{\tilde{\lambda}}_1 + \Omega_R^2 + \tilde{\lambda}_1 &= -g_C \delta \tilde{\lambda}_3(\mathbf{t}_0) \quad \Omega_R^2 \equiv \delta^2 g_C^2 \end{aligned} \quad (\text{II.6.28})$$

Man erhält einen verschobenen harmonischen Oszillator! Lösung:

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda}_1(\mathbf{t}) &= \frac{\delta g_C \tilde{\lambda}_3(\mathbf{t}_0)}{\Omega_R^2} [\cos \Omega_R(\mathbf{t} - \mathbf{t}_0) - 1] \\ \tilde{\lambda}_2(\mathbf{t}) &= -\frac{1}{\delta} \dot{\tilde{\lambda}}_1(\mathbf{t}) = \frac{g_C \tilde{\lambda}_3(\mathbf{t}_0)}{\Omega_R} \sin \Omega_R(\mathbf{t} - \mathbf{t}_0) \\ \tilde{\lambda}_3(\mathbf{t}) &= \tilde{\lambda}_3(\mathbf{t}_0) + \frac{g_C^2 \tilde{\lambda}_3(\mathbf{t}_0)}{\Omega_R^2} [\cos \Omega_R(\mathbf{t} - \mathbf{t}_0) - 1] \end{aligned} \quad (\text{II.6.29})$$

II.6.5 Pulse

$$|g_C| \gg |\delta| \implies \Omega_R \approx |g_C|; |\delta/g_C| \ll 1 \quad (II.6.30)$$

$$\tilde{\lambda}_3(t_0) \equiv -\tilde{\lambda}_0 \quad \tilde{\lambda}_0 > 0$$

Aus (II.6.29) und (II.6.30):

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda}_1(t) &\simeq 0 \\ \tilde{\lambda}_2(t) &= \lambda_0 \sin A(t) \\ \tilde{\lambda}_3(t) &= \lambda_0 \cos A(t) \end{aligned}$$

Dies entspricht einer Drehung um die λ_1 -Achse! A ist die „Pulsfläche“ (mit $d_{12} > 0$):

$$\boxed{A \equiv |g_C| \cdot (t - t_0) = \frac{2d_{12}}{\hbar} \tilde{E}_0 \cdot (t - t_0)} \quad (II.6.31)$$

Sei z. B. $A = \pi/2$ (d. h. $\pi/2$ -Puls):

$$\boxed{\begin{aligned} \tilde{\lambda}_2(t_1) &= -\lambda_0 \\ \tilde{\lambda}_3(t_1) &= 0 \end{aligned}} \quad (II.6.32)$$

Bei $A = \pi$ (d. h. π -Puls):

$$\boxed{\begin{aligned} \tilde{\lambda}_2(t_1) &= 0 \\ \tilde{\lambda}_3(t_1) &= +\lambda_0 \end{aligned}} \quad (II.6.33)$$

Allgemein:

$$\boxed{A(t_1) = \int_{-\infty}^{t_1} |g_C(t)| dt} \quad (II.6.34)$$

Umgekehrt ist $|g_C(t)| = \dot{A}(t)$.

II.7 Stroboskopische Invarianz: Echos

II.7.1 Problemstellung

Materiesystem:

$$\hat{H}_0 |m\rangle = E_m |m\rangle \quad m = 1, 2, \dots, n \quad (\text{II.7.1})$$

$$\hat{H}_0 = \sum_m E_m \hat{P}_{mm} \quad (\text{II.7.2})$$

Dynamik:

$$\hat{U}_0(t) = e^{-i\hat{H}_0 t/\hbar} \quad (\text{II.7.3})$$

$$|\psi(t)\rangle = \hat{U}(t) |\psi(0)\rangle \quad (\text{II.7.4})$$

Stationäre Zustände:

$$|m(t)\rangle = e^{iE_m t/\hbar} |m(0)\rangle \quad (\text{II.7.5})$$

Allgemeine Zustände:

$$|\psi(t)\rangle = \sum_{m=1}^n C_m |m(0)\rangle e^{iE_m t/\hbar} \quad (\text{II.7.6})$$

Wie lässt sich nun erreichen, dass $|\psi(\tau)\rangle = |\psi(0)\rangle$? Möglichkeiten sind:

- $\hat{H}_0 \equiv 0$ (wird ausgeschlossen)
- Quasiperiodisch mit Periode T (spezieller Fall)
- Zeitumkehr: bei $T/2$ setze $t \rightarrow -t$ (nicht möglich)

II.7.2 Zyklische Permutation im Zustandsraum

Sei

$$\text{Spur}\{\hat{H}_0\} = \sum_m E_m \stackrel{!}{=} 0 \quad (\text{II.7.7})$$

Dies lässt sich immer erreichen:

$$\hat{H}'_0 = \hat{H}_0 - \frac{1}{n} \sum_m E_m \hat{1} \quad (\text{II.7.8})$$

$$E'_m = E_m - \frac{1}{n} \sum_m E_m \quad (\text{II.7.9})$$

Beispielsweise mit $n = 2$:

$$\begin{aligned} E'_1 &= E_1 - \frac{1}{2} (E_1 + E_2) = \frac{1}{2} (E_1 - E_2) \equiv -\frac{1}{2} \Delta E \\ E'_2 &= E_2 - \frac{1}{2} (E_1 + E_2) = \frac{1}{2} (E_2 - E_1) \equiv \frac{1}{2} \Delta E \\ \hat{H}'_0 &= \frac{1}{2} \Delta E \hat{\sigma}_3 \end{aligned} \quad (\text{II.7.10})$$

II Photonen und Atome

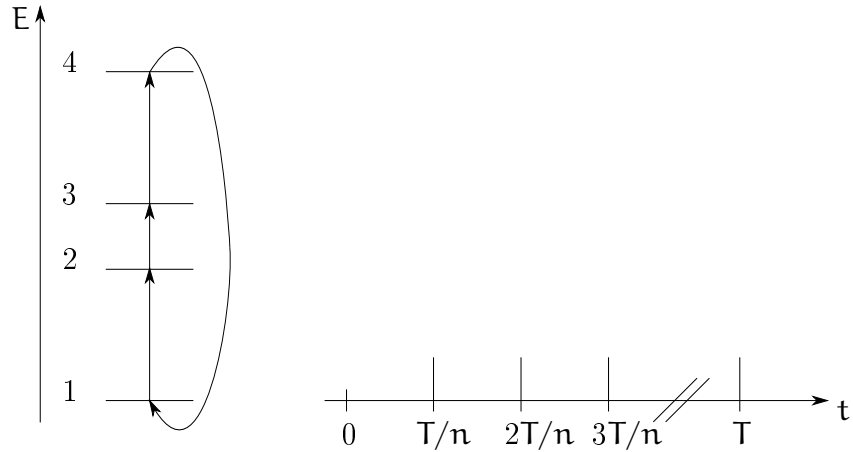


Abbildung II.14: links: zyklische Permutation für $n = 4$, rechts: Kontrollsequenzen für n Zustände, Periodendauer T

Unitärer Permutationsoperator \hat{U}_{zp} :

$$\left. \begin{array}{l} \hat{U}_{zp} |m\rangle = |m+1\rangle \\ \hat{U}_{zp} |n\rangle = |1\rangle \end{array} \right\} \implies \mathbf{u}_{zp} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \end{pmatrix} \quad (\text{II.7.11})$$

Kontrollsequenzen (Dimension n des Hilbertraumes, T : Periodendauer): siehe Abb. II.14 rechts. Betrachte einen beliebigen Zustand $|m\rangle$, Start bei $t = 0$:

$ m(0)\rangle$	Zustands-Nr
$ m(T/n)\rangle = e^{-iE_m T/n\hbar} m(0)\rangle$	\downarrow
$\hat{U}_{zp} m(T/n)\rangle = e^{-iE_m T/n\hbar} m+1(0)\rangle$	$(m+1) \bmod n$
$ m(2T/n)\rangle = e^{-iE_m T/n\hbar} e^{-iE_{m+1} T/n\hbar} m+1(0)\rangle$	
$\hat{U}_{zp} m(2T/n)\rangle = \dots \dots \dots m+2(0)\rangle$	$(m+2) \bmod n$
\vdots	
$ m(T)\rangle = \exp\left(-i \underbrace{\sum_{j=1}^n E_j T/n\hbar}_{\equiv 0}\right) m(0)\rangle = m(0)\rangle$	

Dies gilt für alle m :

$$\boxed{|\psi(t)\rangle = \sum_m c_m |m(T)\rangle = \sum_m |m(0)\rangle = |\psi(0)\rangle} \quad (\text{II.7.12})$$

$$|\psi(\mathbf{t})\rangle = [\hat{U}_{zp} \hat{U}_0(\mathbf{T}/\mathbf{n})]^n |\psi(0)\rangle = |\psi(0)\rangle \quad (\text{II.7.13})$$

und auch für beliebig viele (Überlagerungs-) Zustände und n -Niveau-Systeme mit beliebigen Spektren.

Trick: Jedes $|\mathbf{m}\rangle$ verbringt die gleiche Zeit in jedem anderen Zustand! Für $n = 4$ siehe Abb. II.14 links.

II.7.3 Spin-„Dephasing“ und Spinecho

Für $n = 2$ ist der Permutationsoperator die Pauli-Matrix $\hat{\sigma}_1$:

$$\mathbf{u}_{zp} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \hat{\sigma}_1 \quad (\text{II.7.14})$$

Aus (II.6.13):

$$\tilde{\mathbf{H}} = \frac{1}{2} \hbar g_C \hat{\sigma}_1 \implies \hat{U}(\Delta t) = \exp\left(-\frac{1}{2} i g_C \Delta t \hat{\sigma}_1\right) \quad (\delta = 0) \quad (\text{II.7.15})$$

$$\mathbf{u}(\Delta t) = \begin{pmatrix} \cos \frac{1}{2} g_C \Delta t & i \sin \frac{1}{2} g_C \Delta t \\ i \sin \frac{1}{2} g_C \Delta t & \cos \frac{1}{2} g_C \Delta t \end{pmatrix} \quad \mathbf{u}(\pi/g_C) = i \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{II.7.16})$$

Dies entspricht einem π -Puls gemäß (II.6.33).

Bloch-Vektorbild im rotierenden Bezugssystem

Betrachte ein Ensemble von Zwei-Niveau-Atomen mit verschiedenen Eigenfrequenzen ω_{12} („inhomogenes Ensemble“). Es wird beschrieben durch eine mittlere Frequenz $\bar{\omega}_{12}$ und einer Verteilungsfunktion $f(\delta)$, wobei hier $\delta = \omega_{12} - \bar{\omega}_{12}$ (siehe Abb. II.15 rechts). Transformiere auf ein rotierendes Bezugssystem (ω) mit der mittleren Frequenz $\bar{\omega}_{12}$. Die Pulse führen zu Drehungen um die λ_1 -Achse, vgl. (II.6.31).

Verlauf beim Spinecho: siehe Abb. II.16.

- Ausgangszustand $\lambda_3(0) = -\lambda_0 \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 0$
- $\pi/2$ -Puls, Präparation nach (II.6.32)
- Freie Präzession nach (II.6.26)
- π -Puls nach (II.6.33), vgl. Abb. II.17

Die Pulse haben die angegebene Funktion ($\pi/2$ -Puls, π -Puls), unabhängig von δ , solange $|\delta| \ll |g_C|$. Nach $\mathbf{t} = \mathbf{T}$ (wobei $\Delta t \ll T$ angenommen wird) ist die Polarisation wieder maximal, was zum Echo-Puls führt. Der zweite π -Puls wird dabei weggelassen. Mit Dämpfung: freier Induktionszerfall (free induction decay, FID, siehe Abschnitt III.3.5).

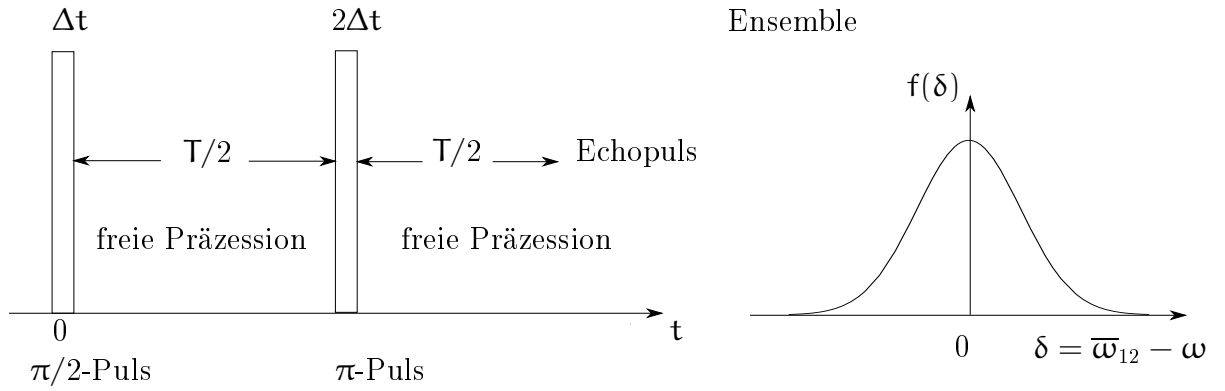


Abbildung II.15: Spinecho ($n = 2$), links: Pulsschema, rechts: Verteilungsfunktion $f(\delta)$

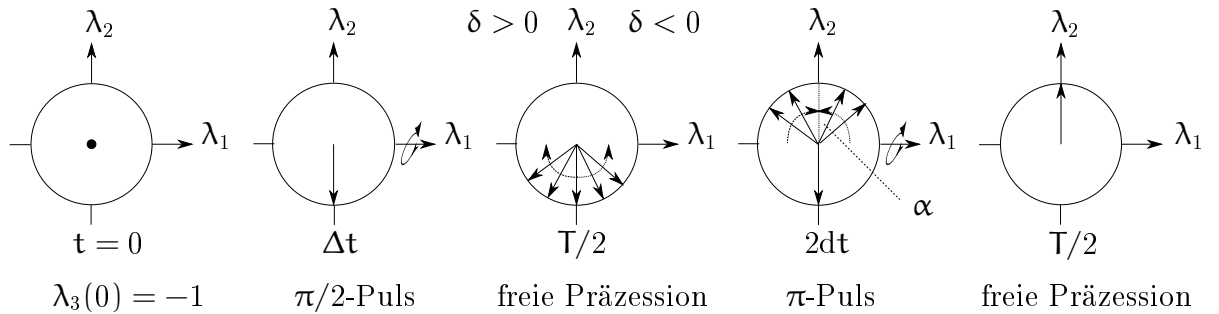


Abbildung II.16: Polarisationsverlauf und Dephasierung beim Spinecho (Ensemble)

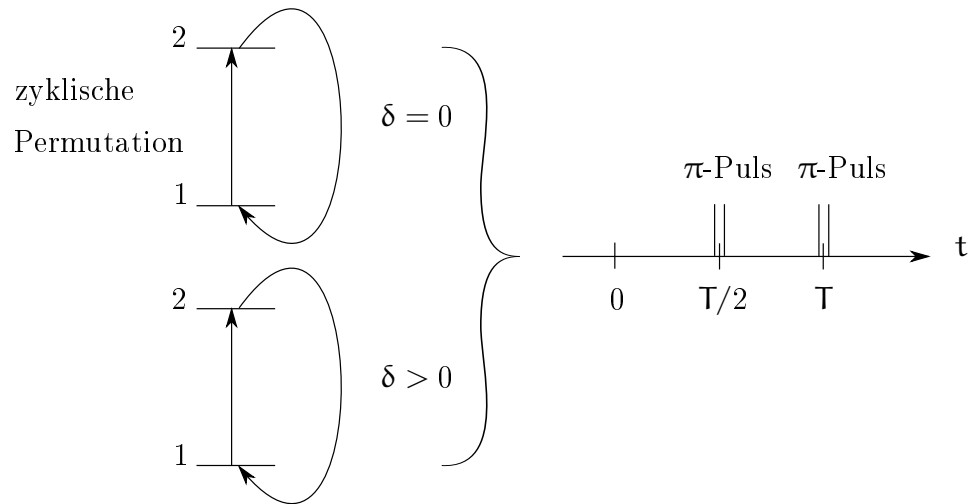
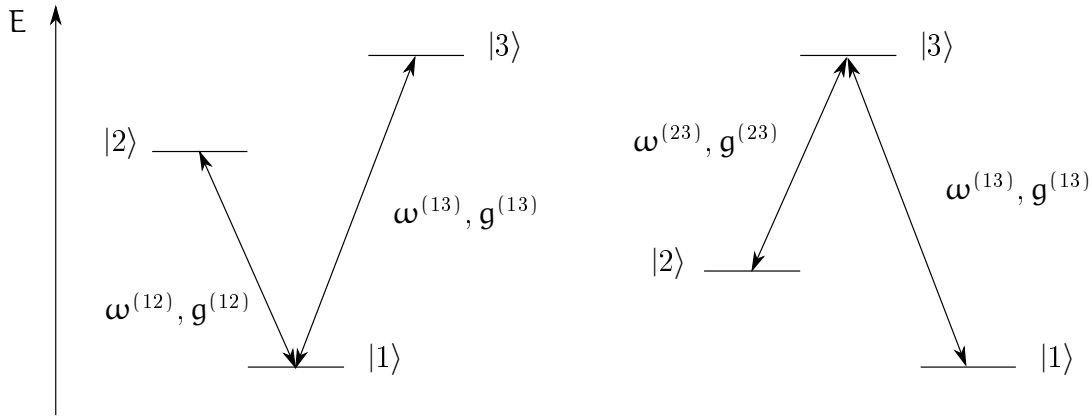


Abbildung II.17: π -Puls als zyklische Permutation ($1 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 1$), unabhängig von δ .


 Abbildung II.18: Drei-Niveau-Atom mit zwei Treiberfeldern: links ν -, rechts λ -Szenario

II.8 Getriebene Drei-Niveau-Atome

Literatur:

G. Mahler, V. Weberruß, Quantum Networks, Springer
 Scully, Zubairy, Quantum Optics

II.8.1 Was ist neu hier?

Betrachte nun Szenarien mit zwei Treiberfeldern so wie in Abb. II.18 dargestellt. Die ν - und λ -Szenarien unterscheiden sich erst bei der Berücksichtigung von Dissipationskanälen! In Szenarien mit drei Treiberfeldern ist keine Transformation auf ein Bezugssystem ohne explizite Zeitabhängigkeit mehr möglich, d. h. es kann keine Rotating Wave Approximation (RWA) mehr durchgeführt werden.

II.8.2 RWA als zeitabhängige unitäre Transformation

Betrachte die Schrödinger-Gleichung mit zeitabhängigem Hamilton-Operator:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = \hat{H}(t) |\psi(t)\rangle \quad (\text{II.8.1})$$

Sei

$$\hat{U}^\dagger(t)\hat{U}(t) = \hat{U}(t)\hat{U}^\dagger(t) = \hat{1} \quad (\text{II.8.2})$$

$$i\hbar \hat{U}^\dagger \frac{\partial}{\partial t} \hat{U} \underbrace{\hat{U}^\dagger |\psi(t)\rangle}_{|\psi'\rangle} = \underbrace{\hat{U}^\dagger \hat{H} \hat{U}}_{\hat{H}'} \hat{U}^\dagger |\psi(t)\rangle \quad (\text{II.8.3})$$

$$i\hbar \hat{U}^\dagger \frac{\partial}{\partial t} \hat{U} |\psi'(t)\rangle = \hat{H}'(t) |\psi'(t)\rangle$$

Nun gilt:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\hat{U} |\psi'\rangle) = \left(\frac{\partial}{\partial t} \hat{U} \right) |\psi'\rangle + \hat{U} \frac{\partial}{\partial t} |\psi'\rangle$$

und man erhält daher

$$\boxed{\begin{aligned} i\hbar |\psi'(t)\rangle &= \hat{H}_{\text{eff}}(t) |\psi'(t)\rangle \\ \hat{H}_{\text{eff}}(t) &= \hat{H}' - i\hbar \hat{U}^\dagger \frac{\partial}{\partial t} \hat{U} \end{aligned}} \quad (\text{II.8.4})$$

Vgl. auch Basdevant, Dalibard, The Quantum Mechanics Solver, S. 227. Hier war \hat{U} zunächst beliebig.

Transformation mit harmonischer Zeitableitung

Definiere

$$\alpha_k \equiv \omega t \quad (\text{II.8.5})$$

und wähle

$$\begin{aligned} \hat{U}_k(\alpha_k) &\equiv e^{i\alpha_k \hat{P}_{kk}} = \hat{1} + i\alpha_k \hat{P}_{kk} + \frac{1}{2!} (i\alpha_k)^2 (\hat{P}_{kk})^2 + \dots \\ &= \hat{1} + \hat{P}_{kk} \left(i\alpha_k + \frac{1}{2!} (i\alpha_k)^2 + \dots \right) \end{aligned}$$

$$\boxed{\hat{U}_k(\alpha_k) = \hat{1} + \hat{P}_{kk} (e^{i\alpha_k} - 1)} \quad (\text{II.8.6})$$

Daraus folgt:

$$\hat{U}_k^\dagger(\alpha_k) \hat{P}_{mn} \hat{U}_k(\alpha_k) = \hat{P}_{mn} \quad (m, n \neq k \text{ oder } m = n = k) \quad (\text{II.8.7})$$

$$\boxed{\begin{aligned} \hat{U}_k^\dagger(\alpha_k) \hat{P}_{kn} \hat{U}_k(\alpha_k) &= \hat{P}_{kn} e^{-i\alpha_k} \\ \hat{U}_k^\dagger(\alpha_k) \hat{P}_{nk} \hat{U}_k(\alpha_k) &= \hat{P}_{nk} e^{i\alpha_k} \end{aligned}} \quad (\text{II.8.8})$$

Anwendung:

$$\hat{H}^{(jk)} \equiv \frac{1}{2} g_C^{(jk)} \hbar \left(\hat{P}_{jk} e^{i\omega^{(jk)} t} + \hat{P}_{kj} e^{-i\omega^{(jk)} t} \right) \quad \text{für } j < k \quad (\text{II.8.9})$$

$$\implies \hat{H}^{(jk)'} = \hat{U}_j^\dagger(\alpha_j) \hat{H}^{(jk)} \hat{U}_j(\alpha_j) = \frac{1}{2} g_C^{(jk)} \hbar (\hat{P}_{jk} + \hat{P}_{kj}) \quad \text{mit } \alpha_j = \omega^{(jk)} t \quad (\text{II.8.10})$$

Setzt man nun

$$\frac{\partial}{\partial t} \hat{U}_j = i\omega^{(jk)} \hbar \hat{P}_{jj} \hat{U}_j$$

ein in (II.8.4), dann ist

$$\boxed{\hat{H}_{\text{eff}} = \hat{H}' + \hbar \omega^{(jk)} \hat{P}_{jj}} \quad (\text{II.8.11})$$

Beispiel: Zwei-Niveau-System

$$\hat{H}(t) = E_1 \hat{P}_{11} + E_2 \hat{P}_{22} + \frac{1}{2} g_C^{(12)} \hbar \left(\hat{P}_{12} e^{i\omega^{(12)} t} + \hat{P}_{21} e^{-i\omega^{(12)} t} \right)$$

Wähle

$$\hat{U} \longrightarrow \hat{U}_1 = \exp(i\omega^{(12)}t \hat{P}_{11})$$

$$\hat{H}_{\text{eff}} = (E_1 + \hbar\omega^{(12)})\hat{P}_{11} + E_2\hat{P}_{22} + \frac{1}{2}\hbar g_C^{(12)}(\hat{P}_{12} + \hat{P}_{21}) \quad (\text{II.8.12})$$

$$|\psi'\rangle = \hat{U}_1^\dagger |\psi\rangle$$

Die Transformation ist mit diesem Ziel nicht eindeutig! Ebenso funktioniert beispielsweise $\hat{U}_2 = \exp(i\omega^{(12)}t \hat{P}_{22})$ oder $\hat{U}_1 \cdot \hat{U}_2 = \exp(-\frac{1}{2}i\omega^{(12)}t(\hat{P}_{22} - \hat{P}_{11}))$

Beispiel: Drei-Niveau-System (λ -Szenario)

$$\hat{H}(t) = E_1\hat{P}_{11} + E_2\hat{P}_{22} + E_3\hat{P}_{33} + \hat{H}^{(13)}(t) + \hat{H}^{(23)}(t) \quad (\text{II.8.13})$$

$$\hat{U}_1 = \exp(i\omega^{(13)}t \hat{P}_{11}) \quad (\text{II.8.14})$$

$$\hat{U}_2 = \exp(i\omega^{(23)}t \hat{P}_{22})$$

Transformation auf ein verallgemeinertes rotierendes Bezugssystem:

$$\hat{H}' = \hat{U}_2^\dagger \hat{U}_1^\dagger \hat{H} \hat{U}_1 \hat{U}_2 \quad (\text{II.8.15})$$

Effektiver Hamilton-Operator:

$$\boxed{\begin{aligned} \hat{H}_{\text{eff}} &= (E_1 + \hbar\omega^{(13)})\hat{P}_{11} + (E_2 + \hbar\omega^{(23)})\hat{P}_{22} + E_3\hat{P}_{33} \\ &+ \frac{1}{2}g_C^{(13)}\hbar(\hat{P}_{13} + \hat{P}_{31}) + \frac{1}{2}g_C^{(23)}\hbar(\hat{P}_{23} + \hat{P}_{32}) \end{aligned}} \quad (\text{II.8.16})$$

Beziehung zum Wechselwirkungsbild

Betrachte wiederum ein Zwei-Niveau-System ($n = 2$) mit

$$E_1 = -\frac{1}{2}\hbar\omega_{12} \quad E_2 = \frac{1}{2}\hbar\omega_{12} \quad (E_1 + E_2 = 0)$$

Statt \hat{U}_1 oder \hat{U}_2 betrachte nun die Kombination aus beiden mit einer jeweiligen Wirkungszeit von $t/2$:

$$\hat{U}_{12} \equiv \hat{U}_1 \cdot \hat{U}_2 = \exp(-\frac{i}{2}\omega t(\hat{P}_{22} - \hat{P}_{11}))$$

Gemäß (II.8.12):

$$\hat{H}_{\text{eff}} = (-\frac{1}{2}\hbar\omega_{12} + \frac{1}{2}\hbar\omega)\hat{P}_{11} + (\frac{1}{2}\hbar\omega_{12} - \frac{1}{2}\hbar\omega)\hat{P}_{22} + \frac{1}{2}\hbar g_C(\hat{P}_{12} + \hat{P}_{21})$$

$$\delta = \omega_{12} - \omega \quad \hat{P}_{22} - \hat{P}_{11} = \hat{\lambda}_3$$

$$\implies \boxed{\hat{H}_{\text{eff}} = \frac{1}{2}\hbar\delta\hat{\lambda}_3 + \frac{1}{2}\hbar g_C\hat{\lambda}_1}$$

Vgl. auch (II.6.13). Bei $\delta = 0$ ist

$$\hat{U}_{12} = \exp\left(-\frac{i}{2}\omega_{12}\mathbf{t}(\hat{P}_{22} - \hat{P}_{11})\right) = \exp(-i\hat{H}_0\mathbf{t}/\hbar) = \hat{U}_0(\mathbf{t})$$

Dies ist ein Ausdruck im Wechselwirkungsbild! Der Wechselwirkungsterm bzw. Hamilton-Operator ist demnach

$$\boxed{\hat{H}_{\text{eff}} = \frac{1}{2}\hbar g_C \hat{\lambda}_1}$$

Für $\delta = 0$ ist eine Transformation auf ein rotierendes Bezugssystem also äquivalent zum Übergang ins Wechselwirkungsbild!

Die Schrödinger-Gleichung bezüglich des rotierenden Bezugssystems erhält man aus (II.6.10) und (II.6.11) nach Anwendung auf die Bloch-Gleichungen. Der effektive Hamilton-Operator \hat{H}_{eff} ist dabei (II.6.13) für $\delta = 0$.

Alternativ ist die Heisenberg-Bewegungsgleichung bezüglich des rotierenden Bezugssystems:

$$\frac{d}{dt}\hat{\lambda}_j = \frac{i}{\hbar}[\hat{H}_{\text{eff}}, \hat{\lambda}_j]$$

Dies bezieht sich jedoch *nicht* auf das Wechselwirkungsbild, dort wäre nun \hat{H}_0 zu nehmen!

II.8.3 Dunkelzustände

Sei speziell

$$\hbar\delta \equiv E_3 - E_2 - \hbar\omega^{(23)} = E_3 - E_1 - \hbar\omega^{(13)} \quad (\text{II.8.17})$$

und folglich

$$E_2 + \hbar\omega^{(23)} = E_1 + \hbar\omega^{(13)} \quad (\text{II.8.18})$$

$$\mathcal{H}_{\text{eff}} = \begin{pmatrix} E_1 + \hbar\omega^{(13)} & 0 & \frac{1}{2}g_C^{(13)} \\ 0 & E_2 + \hbar\omega^{(23)} & \frac{1}{2}g_C^{(23)} \\ \frac{1}{2}g_C^{(13)} & \frac{1}{2}g_C^{(23)} & E_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & g_C^{(13)} \\ 0 & 0 & g_C^{(23)} \\ g_C^{(13)} & g_C^{(23)} & 2\delta \end{pmatrix} + E_0 \hat{1} \quad (\text{II.8.19})$$

mit

$$E_0 = E_1 + \hbar\omega^{(13)} = E_3 - \hbar\delta$$

Mit (II.8.4):

$$\hat{H}_{\text{eff}} |\psi'\rangle = E' |\psi'\rangle \quad (\text{II.8.20})$$

Für die Determinante gilt (ohne die Konstante E_0):

$$\det \begin{pmatrix} -E' & 0 & \frac{1}{2}g_C^{(13)} \\ 0 & -E' & \frac{1}{2}g_C^{(23)} \\ \frac{1}{2}g_C^{(13)} & \frac{1}{2}g_C^{(23)} & \delta - E' \end{pmatrix} = 0 \quad (\text{II.8.21})$$

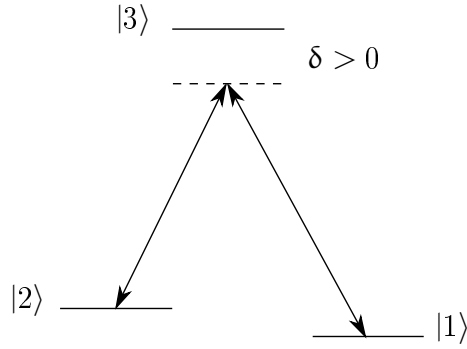


Abbildung II.19: Dunkelzustand

Die Entwicklung dieser Determinante liefert:

$$E' \left(E'(\delta - E') - \frac{1}{4} |g_C^{(23)}|^2 + \frac{1}{4} |g_C^{(13)}|^2 \right) = 0$$

Daraus folgt

$E'_1 = 0$	(II.8.22a)
$E'_{2,3} = \frac{1}{2} (\delta \pm \Omega)$	(II.8.22b)
$\Omega^2 = \delta^2 + g_C^2$	(II.8.22c)
$g_C^2 = g_C^{(23)} ^2 + g_C^{(13)} ^2$	(II.8.22d)

Eigenfunktionen: Setze $|\psi'\rangle = (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})^T$

$$\begin{pmatrix} -E' & 0 & \frac{1}{2} g_C^{(13)} \\ 0 & -E' & \frac{1}{2} g_C^{(23)} \\ \frac{1}{2} g_C^{(13)} & \frac{1}{2} g_C^{(23)} & \delta - E' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \\ \mathbf{c} \end{pmatrix} = 0 \quad (II.8.23)$$

Zustand $E'_1 = 0$: Aus dem Ansatz in (II.8.23)

$$\begin{aligned} 0 &= g_C^{(13)} \cdot \mathbf{c} \\ 0 &= g_C^{(23)} \cdot \mathbf{c} \\ 0 &= g_C^{(13)} \mathbf{a} + g_C^{(23)} \mathbf{b} + 2\delta \mathbf{c} \end{aligned}$$

folgt sowohl $\mathbf{c} = 0$ als auch

$$\frac{g_C^{(13)}}{g_C^{(23)}} = -\frac{\mathbf{b}}{\mathbf{a}} \quad (II.8.24)$$

Dann ist

$$\begin{aligned} \mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 &= 1 \\ \mathbf{a} &= \cos \theta \quad \mathbf{b} = -\sin \theta \end{aligned} \quad (\text{II.8.25})$$

und somit

$$\frac{g_C^{(13)}}{g_C^{(23)}} = \tan \theta \quad (\text{II.8.26})$$

Der zugehörige Eigenzustand lautet also

$$\boxed{|\psi'_1\rangle = \cos \theta |1\rangle - \sin \theta |2\rangle} \quad (\text{II.8.27})$$

Dieser Zustand ist unabhängig von δ und enthält nicht den Zustand $|3\rangle$, obwohl beide Treiber in diesen führen! Sofern $|3\rangle$ der einzige Zustand ist mit Zerfallskanal (Lumineszenz), ist $|\psi'_1\rangle$ ein Dunkelzustand!

Adiabatic Following: $|1\rangle \longleftrightarrow |2\rangle$ durch Variation von $g_C^{(13)}/g_C^{(23)}$!

Übrige Zustände: Aus (II.8.23) folgt

$$\begin{aligned} 0 &= -(\delta \pm \Omega)\mathbf{a} + g_C^{(13)}\mathbf{c} \\ 0 &= -(\delta \pm \Omega)\mathbf{b} + g_C^{(23)}\mathbf{c} \\ 0 &= g_C^{(13)}\mathbf{a} + g_C^{(23)}\mathbf{b} - (\delta \pm \Omega)\mathbf{c} \end{aligned}$$

und damit

$$\mathbf{a} = \frac{g_C^{(13)}}{\delta \pm \Omega} \mathbf{c} \quad \mathbf{b} = \frac{g_C^{(23)}}{\delta \pm \Omega} \mathbf{c}$$

Mit

$$\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 + \mathbf{c}^2 = 1 \quad \text{und} \quad D = g_C^2 + \delta \pm \Omega^2 \quad (\text{II.8.28})$$

ist schließlich, mit g_C nach (II.8.22a) und δ nach (II.8.17):

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbf{a}^2 &= g_C^{(13)2}/D \\ \mathbf{b}^2 &= g_C^{(23)2}/D \\ \mathbf{c}^2 &= (\delta \pm \Omega)^2/D \end{aligned}} \quad (\text{II.8.29})$$

II.9 Lichtausbreitung im Zwei-Niveau-Medium

Materiemodell: Ensemble von Zwei-Niveau-Zentren (Atome) ohne Wechselwirkung, fest in einer Matrix eingebaut, oder als Gas.

Anzahldichte (Dipoldichte): $N_A = \frac{dN}{dV}$. Sei \mathbf{R}_0 der Vektor vom Ursprung zu einem bestimmten Volumenelement. Semiklassisch, pro Atom im Volumenelement ist nach (II.1.14):

$$\hat{V}(\mathbf{R}_0, t) = -\mathbf{E}(\mathbf{R}_0, t) \int d^3\mathbf{r} \mathbf{d} \hat{\psi}_{\mathbf{R}_0}^\dagger(\mathbf{r}) \hat{\psi}_{\mathbf{R}_0}(\mathbf{r})$$

Nach (II.1.20):

$$\hat{\psi}^\dagger \hat{\psi} = \sum_{n', n} \hat{b}_{n'}^\dagger \hat{b}_n u_{n'}^*(\mathbf{r}, \mathbf{R}_0) u_n(\mathbf{r}, \mathbf{R}_0)$$

also ist

$$\hat{V}(\mathbf{R}_0, t) = -\mathbf{E}(\mathbf{R}_0, t) \sum_{n', n} \hat{b}_{n'}^\dagger \hat{b}_n \underbrace{\int d^3\mathbf{r} \mathbf{d} u_{n'}^* u_n}_{=\mathbf{d}_{n'n}(\mathbf{R}_0)=\mathbf{d}_{n'n} \text{ homogen}}$$

Mit (II.1.4): ersetze $\hat{b}_{n'}^\dagger \hat{b}_n \longrightarrow \hat{P}_{n'n}$ und schreibe obigen Ausdruck als

$$\hat{V}(\mathbf{R}_0, t) = \mathbf{E}(\mathbf{R}_0, t) \underbrace{\sum_n \hat{P}_{n'n} \mathbf{d}_{n'n} \mathbf{n}_0}_{=\hat{\mathbf{d}}(\mathbf{R}_0)} \quad (\text{II.9.1})$$

II.9.1 Komplexer Polarisationsvektor $\mathbf{P}(\mathbf{R}_0, t)$

Übergangsdipol:

$$\mathbf{d}_{21} = \mathbf{d}_{12}^* = \text{Re } \mathbf{d}_{12} - i \text{Im } \mathbf{d}_{12}$$

Annahme:

$$\text{Im } \mathbf{d}_{12} = 0 \implies \mathbf{d}_{12} = \mathbf{d}_{21} = \text{Re } \mathbf{d}_{12} \quad \text{homogen}$$

Hier ist mit (II.9.1):

$$\hat{\mathbf{d}}(\mathbf{R}_0) = \mathbf{d}_{12} (\hat{P}_{12}(\mathbf{R}_0) + \hat{P}_{21}(\mathbf{R}_0)) = \mathbf{d}_{12} \hat{\lambda}_1(\mathbf{R}_0) \quad (\text{II.9.2a})$$

$$\boxed{\mathbf{P}(\mathbf{R}_0, t) = n_A \mathbf{d}_{12} \lambda_1(\mathbf{R}_0, t)} \quad (\text{II.9.2b})$$

\mathbf{R}_0 ist hierbei kontinuierlich (coarse-grained). \mathbf{P} und λ_1 sind also phänomenologische („hydrodynamische“) Felder! In Komponenten der Dichtematrix ausgedrückt schreibt sich \mathbf{P} :

$$\mathbf{P}(\mathbf{R}_0, t) = n_A \mathbf{d}_{12} (\rho_{12}(\mathbf{R}_0, t) + \rho_{21}(\mathbf{R}_0, t)) \equiv \mathbf{P}^{(+)} + \mathbf{P}^{(-)}$$

bzw.

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^{(+)} &= n_A \mathbf{d}_{12} \text{Spur}\{\hat{P}_{12} \hat{\rho}\} \\ \mathbf{P}^{(-)} &= n_A \mathbf{d}_{12} \text{Spur}\{\hat{P}_{21} \hat{\rho}\} = (\mathbf{P}^{(+)})^* \end{aligned} \quad (\text{II.9.3})$$

Schreibe nun um auf den Bloch-Vektor, d. h. die Erwartungswerte der Pauli-Operatoren, unter Benutzung von (II.2.5):

$$\begin{aligned}\hat{\lambda}_1 &= \hat{P}_{12} + \hat{P}_{21}; & i\hat{\lambda}_2 &= \hat{P}_{21} - \hat{P}_{12} \\ \mathbf{P}^{(+)}(\mathbf{R}_0, t) &= \frac{1}{2} n_A \mathbf{d}_{12} (\lambda_1(\mathbf{R}_0, t) - i\lambda_2(\mathbf{R}_0, t)) \\ \mathbf{P}^{(-)}(\mathbf{R}_0, t) &= \frac{1}{2} n_A \mathbf{d}_{12} (\lambda_1(\mathbf{R}_0, t) + i\lambda_2(\mathbf{R}_0, t))\end{aligned}\tag{II.9.4}$$

Transformation auf rotierendes Bezugssystem: Die Inverse von (II.6.10) ist

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \omega t & -\sin \omega t & 0 \\ \sin \omega t & \cos \omega t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\lambda}_1 \\ \tilde{\lambda}_2 \\ \tilde{\lambda}_3 \end{pmatrix}\tag{II.9.5}$$

woraus man die $\tilde{\lambda}_i$ in Abhängigkeit von den λ_i erhält. Drückt man nun $\mathbf{P}^{(+)}$ und $\mathbf{P}^{(-)}$ durch jene $\tilde{\lambda}_i$ aus, erhält man zunächst

$$\mathbf{P}^{(+)}(\mathbf{R}_0, t) = \frac{1}{2} n_A \mathbf{d}_{12} (\tilde{\lambda}_1(\mathbf{R}_0, t) - i\tilde{\lambda}_2(\mathbf{R}_0, t)) e^{-i\omega t}$$

Durch Vergleich mit (II.9.4),

$$\tilde{\mathbf{P}}^{(+)}(\mathbf{R}_0, t) = \frac{1}{2} n_A \mathbf{d}_{12} (\tilde{\lambda}_1(\mathbf{R}_0, t) - i\tilde{\lambda}_2(\mathbf{R}_0, t))\tag{II.9.6}$$

erhält man entsprechend

$$\mathbf{P}^{(+)}(\mathbf{R}_0, t) = \tilde{\mathbf{P}}^{(+)}(\mathbf{R}_0, t) e^{-i\omega t}\tag{II.9.7a}$$

$$\mathbf{P}^{(-)}(\mathbf{R}_0, t) = \tilde{\mathbf{P}}^{(-)}(\mathbf{R}_0, t) e^{i\omega t}\tag{II.9.7b}$$

II.9.2 “Envelope“-Näherung der inhomogenen Wellengleichung

Literatur: Meystre, S. 6,7

Maxwell-Gleichung:

$$\boxed{-\Delta \mathbf{E} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{E} = -\frac{1}{c^2 \epsilon_0} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{P}}\tag{II.9.8}$$

mit $\mathbf{E} = \mathbf{E}^{(+)} + \mathbf{E}^{(-)}$ und $|\mathbf{k}| = \omega/c$. Skalarer Ansatz:

$$\mathbf{E}^{(+)}(\mathbf{z}, t) = \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{z}, t) e^{i(\mathbf{kz} - \omega t - \phi(\mathbf{z}, t))}\tag{II.9.9}$$

mit $\tilde{E}(z, t)$ als reeller Einhüllender (Envelope). Näherungen in erster Ordnung bezüglich Inhomogenitäten in Ort und Zeit:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial t} E^{(+)} &= \left(-i(\omega + \dot{\phi}) \tilde{E} + \dot{\tilde{E}} \right) e^{i(\dots)} \\
 \frac{\partial^2}{\partial t^2} E^{(+)} &\approx \left(-i(\omega + \dot{\phi}) \tilde{E} + \dot{\tilde{E}} \right) (-i\omega + \cancel{\dots}) e^{i(\dots)} \\
 \frac{\partial}{\partial z} E^{(+)} &= \left(-i(-k + \phi') \tilde{E} + \tilde{E}' \right) e^{i(\dots)} \\
 \frac{\partial^2}{\partial z^2} E^{(+)} &\approx \left(-i(-k + \phi') \tilde{E} + \tilde{E}' \right) (-ik + \cancel{\dots}) e^{i(\dots)}
 \end{aligned} \tag{II.9.10}$$

Entsprechend: wähle $P(z, t) = p^{(+)}(z, t) + P^{(-)}(z, t)$ als skalares Feld. Mit (II.9.7b) ist dann

$$\begin{aligned}
 P^{(+)} &\equiv \tilde{P}^{(+)}(z, t) e^{i(kz - \omega t - \phi(z, t))} \\
 \frac{\partial^2}{\partial t^2} &\approx -\omega^2 \tilde{P}^{(+)} e^{i(\dots)} \\
 -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} &\approx k^2 \tilde{P}^{(+)} e^{i(\dots)}
 \end{aligned} \tag{II.9.11}$$

Mit (II.9.6):

$$\tilde{P}^{(+)}(z, t) = \frac{1}{2} n_A d_{12} (\tilde{\lambda}_1(z, t) - i\tilde{\lambda}_2(z, t))$$

Einsetzen des Realteils von (II.9.10) in die linke Seite der Maxwell-Gleichung (II.9.8):

$$-\frac{1}{c^2} (\omega + \dot{\phi}) \omega \tilde{E} - (-k + \phi') k \tilde{E} \tag{II.9.12}$$

Rechte Seite:

$$k^2 n_A d_{12} \tilde{\lambda}_1 / 2\epsilon_0$$

Unter Beachtung von $\omega/c = k$ und nach Umformen ergibt sich

$$\boxed{\tilde{E} \left(\frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) = -k n_A d_{12} \tilde{\lambda}_1 / 2\epsilon_0} \tag{II.9.13}$$

Setzt man den Imaginärteil in die linke Seite der Maxwell-Gleichung ein, erhält man analog:

$$\boxed{-\frac{1}{c} \frac{\partial \tilde{E}}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{E}}{\partial z} = k n_A d_{12} \tilde{\lambda}_2 / 2\epsilon_0} \tag{II.9.14}$$

Das gleiche lineare Verhalten erhält man entsprechend für die Fourier-Komponenten $E^{(-)}, P^{(-)}$. Die Gleichungen (II.9.13) und (II.9.14) bilden zusammen mit den Bloch-Gleichungen für das Bloch-Vektorfeld $\lambda(z, t)$ ein abgeschlossenes Gesamtsystem, die Maxwell-Bloch-Gleichungen. Diese lassen sich auch als Operatorgleichungen formulieren, vgl. z. B. Fleischhauer, PRL **84**, 5094 (2000) sowie das nächste Kapitel.

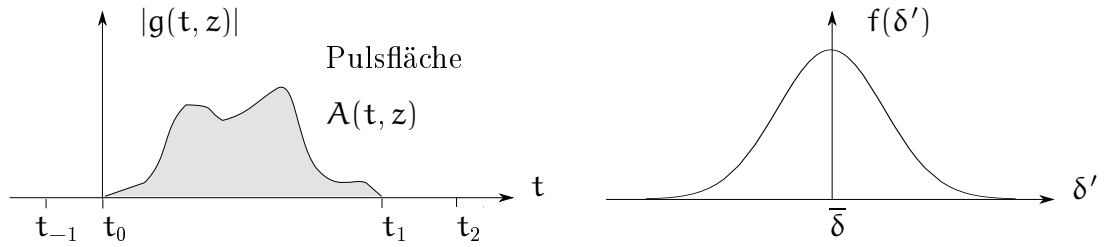


Abbildung II.20: Selbstinduzierte Transparenz. Links: Pulsfläche, rechts: Inhomogenes Ensemble (Materiemodell)

II.9.3 Selbstinduzierte Transparenz

Literatur: L. Allen, Eberly, Optical Resonance and Two-level atoms, S. 85,86; 10, 13, 16

Betrachte die Feld-Einhüllende $\tilde{E}(z, t)$ mit (II.6.31):

$$|g(z, t)| = \frac{2d_{12}}{\hbar} \tilde{E}(z, t) \quad d_{12} > 0$$

Für die Pulsfläche aus Abb. II.20 links gilt:

$$A(t, z) = \int_{-\infty}^{\infty} |g(z, t)| dt \quad (\text{II.9.15})$$

wobei $|g(z, t)| = (\text{II.6.34})$

Materiemodell:

Betrachte ein inhomogenes Ensemble von Zwei-Niveau-Atomen mit der Dichte n_A . Man führt die Verteilung $f(\delta)$ ein (Abb. II.20 rechts), für die gelte:

$$\begin{aligned} \bar{\delta}' = 0 &\implies \omega = \bar{\omega} \\ \int_{-\infty}^{\infty} f(\delta') d\delta' &= 1 \end{aligned} \quad (\text{II.9.16})$$

Damit wird die rechte Seite von Gl. (II.9.14) gemittelt; die Motivation für die Einführung von $f(\delta)$ wird jedoch erst weiter unten klar:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \tilde{E}}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{E}}{\partial z} = kn_A d_{12} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\lambda}_2(z, t, \delta') f(\delta') d\delta' \quad (\text{II.9.17})$$

Integriere (II.9.17) in den Grenzen von $t_{-1} < t_0$ bis $t = t_2 > t_1$ und beachte für die linke Seite:

$$\int_{t_{-1}}^{t_2} \frac{\partial}{\partial t} \tilde{E} = \tilde{E}(t_2) - \tilde{E}(t_{-1}) = 0 \quad (\text{II.9.18})$$

Einsetzen von (II.9.18) und (II.9.15) in (II.9.17):

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial z} \mathbf{A}(t_2, z) = \frac{d_{12}^2 k n_A}{\hbar} \int_{t_{-1}}^{t_2} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\lambda}_2(z, t, \delta') f(\delta') d\delta' dt} \quad (\text{II.9.19})$$

Dies ist die räumliche Änderung der Pulsfläche \mathbf{A} , ausgedrückt durch die Dynamik des Bloch-Vektors. Nun benutze aus den Bloch-Gleichungen (II.6.11):

$$\dot{\tilde{\lambda}}_2 = \delta \tilde{\lambda}_1$$

und setze ein in (II.9.19). Das Zeitintegral wird dann trivial; an der unteren Integrationsgrenze ist $\tilde{\lambda}_1(t_{-1}, z) = 0$, also:

$$\frac{\partial}{\partial z} \mathbf{A}(t_2, z) = -\frac{d_{12}^2 k n_A}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\lambda}_1(z, t_2) f(\delta') \frac{1}{\delta'} d\delta' \quad (\text{II.9.20})$$

An der oberen Integrationsgrenze gilt die freie Präzessions-Lösung der Bloch-Gleichungen, vgl. (II.6.26), mit den Anfangsbedingungen

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda}_{20}(z) &= \tilde{\lambda}_2(z, t_1) \\ \tilde{\lambda}_{10}(z) &= \tilde{\lambda}_1(z, t_1) \end{aligned}$$

Daraus erhält man

$$\tilde{\lambda}_1(z, t_2) = \tilde{\lambda}_{10}(z) \cos \delta'(t_2 - t_1) - \tilde{\lambda}_{20}(z) \sin \delta'(t_2 - t_1)$$

Dies eingesetzt in (II.9.20):

$$\frac{\partial}{\partial z} \mathbf{A}(t_2, z) = -\frac{d_{12}^2 k n_A}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} f(\delta') \frac{1}{\delta'} (\tilde{\lambda}_{10}(z) \cos \delta'(t_2 - t_1) - \tilde{\lambda}_{20}(z) \sin \delta'(t_2 - t_1)) d\delta' \quad (\text{II.9.21})$$

Der erste Term mit $\frac{1}{\delta'} \cos \delta'$ verschwindet bei der Mittelung, da eine ungerade Funktion von δ' vorliegt. Dafür wird die Verteilung über δ' gebraucht!

Für den zweiten Term erhält man durch Integration: $\frac{1}{\delta'} \sin \delta' \longrightarrow \pi \delta_F(\delta')$ wobei δ_F die Dirac-Deltafunktion ist. Übrig bleibt:

$$\frac{\partial}{\partial z} \mathbf{A}(t_2, z) = -\frac{\pi}{\hbar} d_{12}^2 k n_A f(0) \tilde{\lambda}_2(z, t_1; \delta' = 0)$$

Setze $k \equiv \bar{\omega}/c$ und definiere

$$\boxed{\alpha = \frac{\pi \bar{\omega}}{\hbar c} n_A \cdot d_{12}^2 k \cdot f(0)} \quad (\text{II.9.22})$$

Verwende die Pulslösung (II.6.31) mit der Anfangsbedingung (Grundzustand)

$$\tilde{\lambda}_3(t_0) = -1$$

$$\implies \tilde{\lambda}_1(z, t_1) = -\sin A(z, t_1) = -\sin A(z, t_2) \quad (\text{II.9.23})$$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial z} A(z) = -\alpha \sin A(z)} \quad (\text{II.9.24})$$

vgl. auch E. L. Hahn, McCall, 1967. Interessant sind nun folgende Fälle:

- Selbstinduzierte Transparenz:

$$A = n\pi; \quad n = 1, 2, \dots \quad (n = 0 \text{ ist trivial})$$

Dadurch wird die rechte Seite von (II.9.24) gleich Null:

$$\frac{\partial A}{\partial z} = 0 \quad (\text{II.9.25})$$

Die Pulsfläche ist also konstant, es gibt keinen Energieverlust!

- Schwaches Feld bzw. Puls: $A \ll 1$, also

$$\begin{aligned} \sin A \sim A \implies \frac{\partial A}{\partial z} &= -\alpha A \\ A &\sim e^{-\alpha z} \end{aligned} \quad (\text{II.9.26})$$

Dies ist nichts anderes als das Beer-Gesetz, mit α^{-1} als Absorptionslänge. Für selbstinduzierte Transparenz ist Nichtlinearität (Sättigung) wesentlich! Ein forminvarianter Puls wird unter Resonanzbedingung „Soliton“ genannt.

II.10 Ultra-langsameres Licht

II.10.1 Brechungsindex

Literatur: J. Schmiedmayer et al, PRL **74**, 1043 (1995)

Man betrachtet „getriebene Materie“ („dressed“-Zustand).

Voraussetzungen: Kalte Zwei-Niveau-Atome mit $\Delta E = \hbar\omega_{21}$, Dichte n_A in kohärentem Zustand und mit stationärem Pumpen. Sei $|\delta| \gg |g_C|$, dann ist Absorption vernachlässigbar. Das Lichtfeld ω_P („Probenfeld“) habe feste Polarisation, also genügt eine skalare Betrachtung.

Bloch-Gleichungen: die stationäre Lösung nach Gl. (II.4.16) lautet im rotierenden Bezugssystem

$$\tilde{\lambda}_1 = g_C / \Omega_R \quad (\text{II.10.1})$$

Mit \mathbf{d}_{12} reell und (II.9.4):

$$\tilde{\mathbf{P}} = \mathbf{d}_{12} \tilde{\lambda}_1 n_A = \mathbf{d}_{12} n_A g_C / \Omega_R \quad (\text{II.10.2})$$

Mit (II.6.3):

$$\begin{aligned} g_C &= -2\mathbf{d}_{12} \tilde{\mathbf{E}}_0 \quad \text{da} \quad \mathbf{d}_{12} \parallel \tilde{\mathbf{E}}_0 \\ \Rightarrow \tilde{\mathbf{P}} &= -2n_A |\mathbf{d}_{12}|^2 \tilde{\mathbf{E}}_0 / \Omega_R \equiv \epsilon_0 \chi' \tilde{\mathbf{E}}_0 \end{aligned}$$

χ' ist der Realteil der Suszeptibilität, der Imaginärteil ist $\chi'' = 0$, d. h. keine Absorption. Durch Vergleich folgt

$$\boxed{\chi' = -\frac{2n_A |\mathbf{d}_{12}|^2}{\epsilon_0 \Omega_R}} \quad (\text{II.10.3})$$

Die Rabi-Frequenz ist nach (II.6.14)

$$\Omega_R = (\delta^2 + g_C^2)^{1/2} \quad \delta = \omega_{12} - \omega_P$$

Ableiten nach ω_P ergibt

$$\frac{d}{d\omega_P} \frac{1}{\Omega_R} = -(\dots)^{-3/2} (\omega_{12} - \omega_P) \approx -\frac{1}{\Omega_R^2} \quad \text{falls} \quad \delta \gg g_C \quad (\text{II.10.4})$$

und für die Suszeptibilität schließlich

$$\boxed{\frac{d\chi'}{d\omega_P} = \frac{2n_A |\mathbf{d}_{12}|^2}{\epsilon_0 \Omega_R^2}} \quad (\text{II.10.5})$$

Der Brechungsindex ist nach Scully, S. 237:

$$n' \approx (1 + \chi')^{1/2} \approx 1 + \frac{1}{2} \chi' \quad (\text{II.10.6})$$

II Photonen und Atome

Phasengeschwindigkeit:

$$v = \frac{\omega_P}{k} = \frac{c}{n'} \approx \frac{c}{1 + \frac{1}{2}\chi'} \approx c \quad (\text{II.10.7})$$

Gruppengeschwindigkeit: Aus (II.10.7) ($|\chi''| \ll |\chi'|$)

$$k(\omega_P) = n'(\omega_P) \frac{\omega_P}{c}$$

$$\frac{dk}{d\omega_P} = \frac{1}{c} \left(\omega_P \frac{dn'}{d\omega_P} + n' \right)$$

$$\boxed{v_g = \frac{d\omega_P}{dk} = \frac{c}{\omega_P \frac{dn'}{d\omega_P} + n'(\omega_P)}} \quad (\text{II.10.8})$$

Mit (II.10.5) gilt für den Brechungsindex:

$$\frac{dn'}{d\omega_P} \approx \frac{1}{2} \frac{d\chi'}{d\omega_P} = \frac{n_A |d_{12}|^2}{\varepsilon_0 \Omega_R^2} \quad (\text{II.10.9})$$

Mit (II.10.3) und (II.10.6):

$$n' = 1 - \frac{n_A |d_{12}|^2}{\varepsilon_0 \Omega_R} \implies \omega_P \frac{dn'}{d\omega_P} = (1 - n') \underbrace{\frac{\omega_P}{\Omega_R}}_{\gg 1!}$$

Man kann also die Gruppengeschwindigkeit schreiben als

$$\boxed{v_g = \frac{c}{1 + \frac{n_A |d_{12}|^2}{\varepsilon_0 \Omega_R} \left(\frac{\omega_P}{\Omega_R} - 1 \right)}} \quad (\text{II.10.10})$$

Für eine Rabi-Frequenz $\Omega_R \rightarrow 0$, d. h. $\delta \rightarrow 0$ und $g_C \rightarrow 0$ (dies widerspricht jedoch den Voraussetzungen!) würde sich ergeben:

$$v_g \approx c \frac{\varepsilon_0 \Omega_R^2}{|d_{12}|^2 \omega_P n_A} \rightarrow 0 \quad (\text{II.10.11})$$

Bei Zwei-Niveau-Atomen wächst mit $\Omega_R \rightarrow 0$ die Absorption für das skalare klassische Feld (Probenfeld), d. h. Gl. (II.10.7) usw. ist nicht gültig!

Bei Drei-Niveau-Atomen lässt sich ein kohärenter Effekt sowie die Unterdrückung der Absorption (EIT = electron induced transparency) realisieren! Vergleiche folgenden Abschnitt.

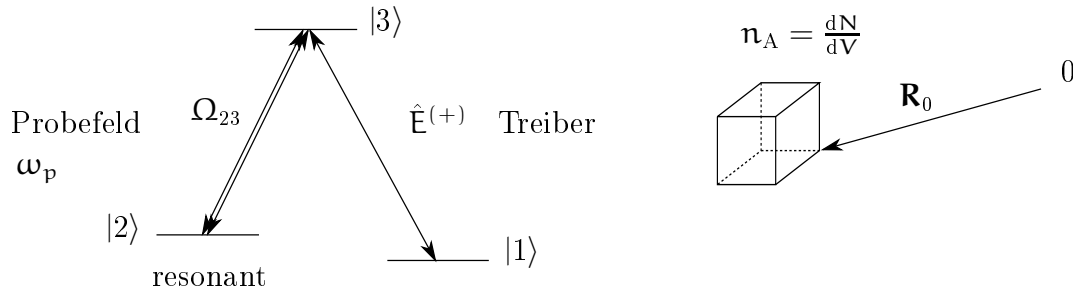


Abbildung II.21: Drei-Niveau-Atom mit Treiber

II.10.2 Ensemble von Drei-Niveau-Atomen

Literatur: Fleischhauer, PRL **84**, 5094 (2000), siehe Abb. II.21.

a. Behandlung des skalaren klassischen Feldes $2 \leftrightarrow 3$:

Betrachte (II.6.13) mit $\delta = 0$

$$\boxed{\hat{H}_{\text{eff}} = \frac{1}{2} \hbar g_C \hat{\Lambda}_1} = \frac{1}{2} \hbar \Omega_{23} (\hat{P}_{23} + \hat{P}_{32}) \quad (\text{II.10.12})$$

b. Kopplung an ein quantisiertes Feld $1 \leftrightarrow 3$ (Treiberfeld): Mit (II.1.22) ist

$$\boxed{\hat{V} = \hbar \gamma_{13} \hat{P}_{13} \hat{q} + \hbar \gamma_{31}^* \hat{P}_{31} \hat{q}^\dagger} \quad (\text{II.10.13})$$

Um die Heisenberg-Bewegungsgleichungen anstatt der verallgemeinerten Bloch-Gleichungen zu erhalten, führt man folgende Näherung durch: $\langle \hat{P}_{11} \rangle \approx 1$, es werden nur Terme erster Ordnung in kleinen Größen $\langle \hat{q} \rangle$, $\langle \hat{P}_{jj} \rangle$ verwendet. Dies führt zu

$$\frac{\partial}{\partial t} \hat{P}_{21} = \frac{i}{\hbar} [\hat{H}_{\text{eff}} + \hat{V}, \hat{P}_{21}] = \frac{i}{2} \Omega_{23} \hat{P}_{31} - \cancel{i \gamma_{13} \hat{P}_{23} \hat{q}}$$

$$\boxed{\hat{P}_{31} = -\frac{2i}{\Omega_{23}} \frac{\partial}{\partial t} \hat{P}_{21}} \quad (\text{II.10.14})$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \hat{P}_{31} = \frac{i}{\hbar} [\hat{H}_{\text{eff}} + \hat{V}, \hat{P}_{31}] = \frac{i}{2} \Omega_{23} \hat{P}_{21} - i \gamma_{13} \hat{P}_{11} \hat{q} \stackrel{!}{=} 0$$

$$\boxed{\hat{P}_{21} \approx -\frac{2\gamma_{13}}{\Omega_{23}} \hat{q}} \quad (\text{II.10.15})$$

c. Maxwell-Bloch-Gleichungen Literatur:

J. Marangos, Nature **397**, 559 (1999)

L. Hau, Nature **397**, 594 (1999)

Aus (II.1.19):

$$\hat{\mathbf{E}} = i\mathcal{E} (\hat{\mathbf{q}} - \hat{\mathbf{q}}^\dagger) \quad (\text{II.10.16})$$

Schreibe (II.9.13) als Operatorgleichung:

$$\left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \right) \hat{\mathbf{E}} = -\frac{k}{2} \mathbf{n}_A \mathbf{d}_{13} (\hat{\mathbf{P}}_{13} - \hat{\mathbf{P}}_{31}) \quad (\text{II.10.17})$$

Rechte Seite: Mit (II.10.14) und (II.10.15):

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{P}}_{31} &= -\frac{2i}{\Omega_{23}} \frac{\partial}{\partial t} \hat{\mathbf{P}}_{21} = \frac{4i\gamma_{13}}{\Omega_{23}^2} \frac{\partial}{\partial t} \hat{\mathbf{q}} \\ \hat{\mathbf{P}}_{13} &= \frac{4i\gamma_{13}^*}{\Omega_{23}^2} \frac{\partial}{\partial t} \hat{\mathbf{q}}^\dagger \\ \gamma_{13} &= -\frac{i}{2} \mathbf{d}_{13} \mathcal{E} \\ \gamma_{13}^* &= -\gamma_{13} \end{aligned} \quad (\text{II.10.18})$$

Subtrahiere $\hat{\mathbf{P}}_{31}$ von $\hat{\mathbf{P}}_{13}$:

$$\hat{\mathbf{P}}_{13} - \hat{\mathbf{P}}_{31} = \frac{4i\gamma_{13}}{\Omega_{23}^2} \frac{\partial}{\partial t} (\hat{\mathbf{q}}^\dagger - \hat{\mathbf{q}}) = -\frac{4\gamma_{13}}{\mathcal{E}\Omega_{23}^2} \frac{\partial}{\partial t} \hat{\mathbf{E}} \quad (\text{II.10.19})$$

Linke Seite:

$$\left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \right) \hat{\mathbf{E}} = -\frac{2k\mathbf{n}_A \mathbf{d}_{13} \gamma_{13}}{\mathcal{E}\Omega_{23}^2} \frac{\partial}{\partial t} \hat{\mathbf{E}}; \quad k = \omega_{13}/c$$

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{1}{c} \left(1 + \frac{m}{\Omega_{23}^2} \right) \frac{\partial}{\partial t} \hat{\mathbf{E}} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{\mathbf{E}} &= 0 \\ m &= \frac{2}{\mathcal{E}} \omega_{13} \gamma_{13} \mathbf{b}_A \mathbf{d}_{13} \end{aligned}} \quad (\text{II.10.20})$$

Die Geschwindigkeit der Einhüllenden ist die Gruppengeschwindigkeit, d. h. mit (II.10.20):

$$\mathbf{v}_g = \frac{c}{1 + \frac{m}{\Omega_{23}}}$$

folgt

$$\boxed{\frac{\mathbf{v}_g}{c} \approx \frac{\Omega_{23}^2}{m} = \frac{\hbar\Omega_{23}^2}{2|\mathbf{d}_{13}|^2 \omega_{13} \mathbf{n}_A}} \quad (\text{II.10.21})$$

Es wird $\mathbf{v}_g < 60\text{km/h} \approx 17\text{m/s}$ gemessen. Vergleiche diese Beziehung mit (II.10.11)! Versuchsanordnung: siehe Abb. II.21. Für Ω_{23} gibt es keine Absorption, da Niveau 2 praktisch unbesetzt ist!

Anmerkung: Auch in photonischen Kristallen kann $\mathbf{v}_g \sim \frac{d\omega}{dk}$ klein sein.

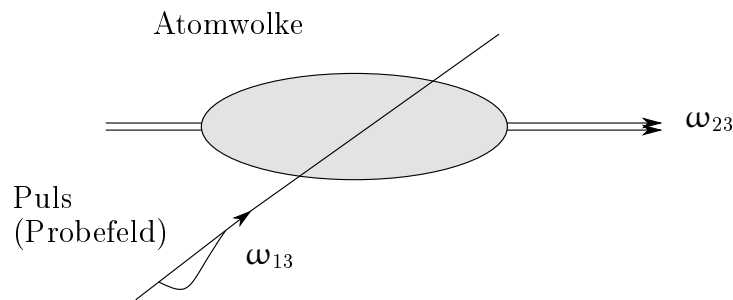


Abbildung II.22: Atomwolke mit Probefeld

Diskussion

M. Fleischhauer et al, Rev. mod. Phys **77**, 633 (2005)

- a. Kohärente Präparation ist ein neuer Weg, optische Eigenschaften zu verändern.
Ursache: Laser-induzierte Kohärenz atomarer Zustände, führt zu Interferenz zwischen Anregungspfaden.
- b. Absorptionsfreie Verlangsamung von Licht führt zu räumlicher Kompression von Lichtpulsen. Im Experiment von Hau (Nature **397**, 594 (1999)) erfolgte eine Kompression von 1 km bis auf 1 mm!
- c. Die Zahl der Photonen im starken Feld (probe field) wird reduziert durch den Faktor v_g/c . Es bleibt also nur ein winziger Teil der Energie elektromagnetisch!
- d. Ein kohärent getriebenes Medium ist transparent bezüglich dem „probe field“.
- e. Anwendungen sind:
Erhöhte Wechselwirkungszeit innerhalb des Materiebereiches
Erhöhte Effizienz nichtlinearer Effekte
eine Verzögerungszeit (delay time) bezüglich des Pulses
- f. $v_g \rightarrow 0$ ist nicht möglich mit einem stationären Treiberfeld (coupling field)
- g. Interpretation: Propagation von „dark-state“-Polaritonen, vgl. Abschnitt II.8.

II.11 Kubisches Schrödinger-Feld S3: Solitonen

II.11.1 Bewegungsgleichung

$$\boxed{i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi + \gamma^2 |\psi|^2 \psi = 0} \quad (\text{II.11.1})$$

Entstehung dieser Gleichung? Sie hat keinen fundamentalen Charakter, es wurde ein Fremdfeld ϕ eliminiert. Ursprünglicher Ansatz, mit Ladung e :

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi + e\phi_e \psi = 0 \quad (\text{II.11.2a})$$

Poisson-Gleichung fürs Potential:

$$\Delta \phi_e = -\rho/\epsilon_0 = -\frac{e}{\epsilon_0} \psi^* \psi \quad (\text{II.11.2b})$$

Lösung:

$$\phi_e(\mathbf{r}) = \int d^3 \mathbf{r}' V(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \psi^* \psi \quad (\text{II.11.3})$$

Ersetze:

$$V(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \longrightarrow \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (\text{II.11.4})$$

V bekommt somit lokalen Charakter. Für das Fremdfeld folgt schließlich

$$e\phi_e(\mathbf{r}) \equiv \gamma^2 |\psi|^2 \quad (\text{II.11.5})$$

Dieser Term stellt eine Selbstwechselwirkung in lokaler Näherung dar. Damit folgt aus (II.11.2a) die Gleichung (II.11.1).

Effektive Lagrange-Dichte:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}'_{\text{eff}} \quad (\text{II.11.6})$$

Gemäß (I.4.2):

$$\mathcal{L}_0 = i\hbar \psi^* \dot{\psi} - \frac{\hbar^2}{2m} \nabla \psi^* \cdot \nabla \psi \quad (\text{II.11.7a})$$

$$\mathcal{L}'_{\text{eff}} = -V_{\text{eff}}(\mathbf{r}) \psi^* \psi \quad (\text{II.11.7b})$$

$$V_{\text{eff}} = e\phi(\mathbf{r}) \longrightarrow V_{\text{eff}}(\psi^* \psi) = \frac{1}{2} \gamma^2 \psi^* \psi \quad (\text{II.11.7c})$$

$\mathcal{L}'_{\text{eff}}$ lässt sich somit umschreiben:

$$\boxed{\mathcal{L}'_{\text{eff}} = -\frac{1}{2} \gamma^2 |\psi|^2 \cdot |\psi|^2} \quad (\text{II.11.8})$$

Gl. (II.11.1) ergibt sich also als Euler-Lagrange-Gleichung zu (II.11.6). Die Quantisierung wird durchgeführt wie üblich.

II.11.2 Solitonen: klassisch

Literatur: Scott, Proc. IEEE **61**, 1443 (1973)

Trotz der Nichtlinearität hat Gl. (II.11.1) in einer Dimension exakte Lösungen: Solitonen (nichtlineare Moden). Wir betrachten die klassische Feldgleichung, d. h. die Struktur von (II.11.1) in einer Dimension.

$$i\psi_t + \psi_{xx} + \gamma^2 |\psi|^2 \psi = 0 \quad (\text{II.11.9})$$

mit

$$\psi_t = \dot{\psi} \quad \psi_{xx} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \quad \text{etc.}$$

Ansatz:

$$\psi(x, t) = \phi(x, t) e^{i\theta(x, t)} \quad (\text{II.11.10})$$

Hierbei ist $\phi(x, t)$ die reelle Einhüllende und $\theta(x, t)$ die ebenfalls reelle Phase. Man setzt nun (II.11.10) in (II.11.9) ein und spaltet in Real- und Imaginärteil auf:

$$\begin{aligned} \phi_{xx} - \phi \theta_x^2 - \phi \theta_t + \gamma^2 \phi^3 &= 0 & \text{Realteil} \\ \phi \theta_{xx} + 2\phi_x \theta_x + \phi_t &= 0 & \text{Imaginärteil} \end{aligned} \quad (\text{II.11.11})$$

Wählt man mit geeigneten Koordinaten ξ, ξ_e speziell:

$$\begin{aligned} \theta(\xi) &\equiv \theta(x - vt) \\ \phi(\xi_e) &\equiv \phi(x - u_e t) \end{aligned} \quad (\text{II.11.12})$$

dann schreiben sich die obigen Ausdrücke wie folgt:

$$\boxed{\begin{aligned} \phi_{\xi\xi} - \phi \theta_\xi^2 + v \phi \theta_\xi + \gamma^2 \phi^3 &= 0 \\ \phi \theta_{\xi\xi} + 2\phi_\xi \theta_\xi + u_e \phi_\xi &= 0 \end{aligned}} \quad \begin{aligned} &(\text{II.11.13a}) \\ &(\text{II.11.13b}) \end{aligned}$$

Multipliziere nun Gl. (II.11.13b) mit 2ϕ :

$$\begin{aligned} \implies 2\phi^2 \phi_{\xi\xi} + 4\phi \phi_\xi \theta_\xi - 2u_e \phi \phi_\xi & \\ = 2\phi_\xi \phi (2\theta_\xi - u_e) + 2\phi^2 \theta_{\xi\xi} & \\ = \frac{d}{d\xi} (\phi^2 (2\theta_\xi - u_e)) = 0 & \\ \implies \phi^2 (2\theta_\xi - u_e) = \text{const} = d & \end{aligned} \quad (\text{II.11.14})$$

Randbedingungen:

$$\phi(\pm\infty) = 0 \implies d = 0 \quad (\text{Pulsform})$$

Dies gilt immer, wobei i. A. $\phi(\xi) \neq 0$, also

$$\theta_\xi = u_e/2 \quad (\text{II.11.15})$$

und nach Integration

$$\boxed{\theta = \frac{1}{2} \mathbf{u}_e \xi + \theta_0} \quad (\text{II.11.16})$$

Setze nun (II.11.15) und (II.11.16) ein in (II.11.13a):

$$\theta_{\xi\xi} - \frac{1}{4}(\mathbf{u}_e^2 - 2\mathbf{u}_e\mathbf{v})\phi + \gamma^2\phi^3 = 0 \quad (\text{II.11.17})$$

Multipliziere dann Gl. (II.11.17) mit ϕ_ξ und beachte

$$\begin{aligned} \phi^3\phi_\xi &= \frac{1}{4} \frac{d}{d\xi}(\phi^4) \\ \phi\phi_\xi &= \frac{1}{2} \frac{d}{d\xi}(\phi^2) \\ \phi_\xi\phi_{\xi\xi} &= \frac{1}{2} \frac{d}{d\xi}(\phi_\xi^2) \end{aligned} \quad (\text{II.11.18})$$

dann folgt

$$(\theta_\xi)^2 = \underbrace{\frac{1}{4}(\mathbf{u}_e^2 - 2\mathbf{u}_e\mathbf{v})\phi^2 - \frac{1}{2}\eta^2\phi^4 + c}_{\equiv Q(\phi)} \quad (\text{II.11.19})$$

mit c als Integrationskonstante.

$$\phi_\xi = \frac{d\phi}{d\xi} = \sqrt{Q(\phi)}$$

Durch Variablentrennung wird $d\phi = \sqrt{Q(\phi)}d\xi$. Integration über korrespondierende Grenzen:

$$\int_{\phi(\xi_0)}^{\phi(\xi)} \frac{d\phi}{\sqrt{Q}} = \xi_e - \xi_0 = x - \mathbf{u}_e t - \xi_0 \quad (\text{II.11.20})$$

Wegen (II.11.19) ist $Q(\phi) > 0$. Annahmen:

$$r^2 \equiv \mathbf{u}_e^2 - 2\mathbf{u}_e\mathbf{v} > 0 \quad c \equiv 0$$

Schreibe (II.11.19) um als

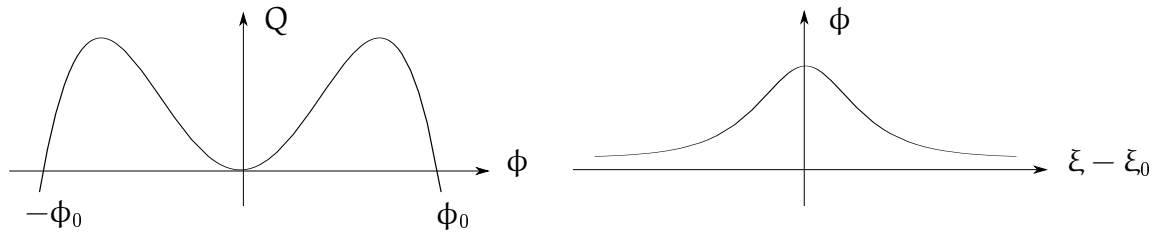
$$Q(\phi) = r^2\phi^2 - \frac{1}{2}\eta^2\phi^4 \quad (\text{II.11.21})$$

(siehe Abb. II.23 links) An den Nullstellen ist

$$Q(\phi_0) = r^2\phi_0^2 - \frac{1}{2}\eta^2\phi_0^4 \stackrel{!}{=} 0$$

Eine Lösung hiervon ist die doppelte Nullstelle $\phi_0 = 0$. Außerdem:

$$r^2 - \frac{1}{2}\eta^2\phi_0^2 = 0$$


 Abbildung II.23: Solitonen, links: Verlauf von $Q(\phi)$, rechts: $\phi(\xi)$

Lösung:

$$\phi_0 = \pm \left(\frac{2\tau^2}{\eta^2} \right)^{1/2} = \pm \left(\frac{2u_e^2 - 4u_e v}{\eta^2} \right)^{1/2} \quad (\text{II.11.22})$$

Integriere (II.11.20) von $\phi(\xi_0) = \phi_0$ bis $\phi(\xi_e)$

$$\int_{\phi(\xi_0)}^{\phi(\xi)} \frac{d\phi}{\left(\tau^2 \phi^2 - \frac{1}{2} \eta^2 \phi^4 \right)^{1/2}} = \int_{\phi(\xi_0)}^{\phi(\xi)} \frac{d\phi}{\phi \left(\phi_0^2 - \phi^2 \right)^{1/2}} \cdot \sqrt{2\eta^{-2}} = \xi_e - \xi_0 \quad (\text{II.11.23})$$

Hilfsformel:

$$\int \frac{dx}{x(a^2 - x^2)^{1/2}} = -\frac{1}{a} \ln \frac{a + (a^2 - x^2)^{1/2}}{x} \quad a = \phi_0 \quad (\text{II.11.24})$$

Damit erhält man einerseits:

$$\begin{aligned} \left[\ln \frac{\phi_0 + (\phi_0^2 - \phi^2)^{1/2}}{\phi} \right]_{\phi_0}^{\phi} &= -\phi_0 \sqrt{2\eta^{-2}} (\xi_e - \xi_0) \\ \frac{1}{\phi} (\phi_0 + (\phi_0^2 - \phi^2)^{1/2}) &= \exp \left(-\phi_0 \sqrt{2\eta^{-2}} (\xi_e - \xi_0) \right) \\ \frac{\phi}{\phi_0 + (\phi_0^2 - \phi^2)^{1/2}} &= \exp \left(\phi_0 \sqrt{2\eta^{-2}} (\xi_e - \xi_0) \right) \end{aligned} \quad (\text{II.11.25})$$

Andererseits:

$$\frac{\phi}{\phi_0 + (\phi_0^2 - \phi^2)^{1/2}} = \frac{1}{\phi} (\phi_0 - (\phi_0^2 - \phi^2)^{1/2})$$

Vergleiche mit (II.11.25):

$$\frac{\phi}{\phi_0 - (\phi_0^2 - \phi^2)^{1/2}} = \exp \left(-\phi_0 \sqrt{2\eta^{-2}} (\xi_e - \xi_0) \right) \quad (\text{II.11.26})$$

Aus (II.11.25) und (II.11.26):

$$\frac{2\phi}{\phi} = e^{+\dots} + e^{-\dots} \quad (\text{II.11.27})$$

Es ist

$$\text{sech}(x) = \frac{2}{e^x + e^{-x}} = \text{sech}(-x)$$

Letztendlich erhält man für $\phi(\xi)$:

$$\boxed{\phi(\xi) = \phi_0 \operatorname{sech}\left(\sqrt{2\eta^{-2}}\phi_0(\xi_e - \xi_0)\right)} \quad (\text{II.11.28})$$

Dies ist das „Glockensoliton“ mit ϕ_0 nach (II.11.23) mit dem der Integrationsgrenze entsprechenden ξ_0 (siehe Abb. II.23 rechts). Für $\phi_0 > 0$ ist mit (II.11.10), (II.11.16) und (II.11.28)

$$\boxed{\psi = \phi_0 \operatorname{sech}(\dots)e^{i(\mathbf{u}_e(x-vt)+\theta_0)/2}} \quad (\text{II.11.29})$$

Der erste Teil hiervon hat „teilchenartigen“ Charakter, der zweite ist „wellenartig“. Es liegt eine Vier-Parameter-Familie vor mit $(\mathbf{u}_e, v, \theta_0, \xi_0)$. Darüber hinaus existieren N-Soliton-Lösungen mit 4N Parametern.

II.12 Nichtlineare Strahlungsfelder

II.12.1 Phänomenologische Bewegungsgleichung

vgl. Kapitel II.9, II.11

$$\boxed{\Delta E_l - \frac{1}{c^2}\ddot{E}_l - \frac{1}{\epsilon_0 c^2}\ddot{P}_l(E_k) = 0} \quad (\text{II.12.1a})$$

$$\boxed{\frac{1}{\epsilon_0}P_l(E_k) = \chi_{lm}^{(1)}E_m + \chi_{lmn}^{(2)}E_m E_n + \chi_{lmnp}^{(3)}E_m E_n E_p + \dots} \quad (\text{II.12.1b})$$

mit den Suszeptibilitäten $\chi^{(j)}$. Der Zusammenhang $\mathbf{P}(\mathbf{E})$ ist im allgemeinen nichtlokal in Ort und Zeit. Lokalität besteht nur im (ω, \mathbf{k}) -Raum. Hier wird er zur Näherung jedoch als lokal angesehen.

In Gleichung (II.12.1) gilt die Summenkonvention! Sie entsteht nach der Eliminierung des Fremdfeldes der Polarisation \mathbf{P} , einem phänomenologischen Materiefeld. Vergleiche auch Abschnitt II.11.

Wegen $\Delta E_l = \dot{A}_l$ entsteht Gl. (II.12.1a)

$$\Delta A_l = \frac{1}{c^2}\ddot{A}_l = \frac{1}{\epsilon_0 c^2}\dot{P}_l \quad (\text{II.12.2})$$

Lagrange-Dichte:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}' \quad (\text{II.12.3})$$

mit

$$\mathcal{L}' = -\mathbf{P} \cdot \dot{\mathbf{A}} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{E} \quad (\text{II.12.4})$$

Konjugierter Impuls:

$$\Pi_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_i} = \epsilon_0 \dot{A}_i - P_i = -(\epsilon_0 E_i + P_i) = -D_i \quad (\text{II.12.5})$$

D_i ist die dielektrische Verschiebung. Euler-Lagrange-Gleichung:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_i} + \sum_j \frac{d}{dr_j} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_{i,j}} = 0 \quad (\text{II.12.6})$$

Durch Einsetzen der obigen Beziehungen in die Euler-Lagrange-Gleichung stellt man fest, dass Gl. (II.12.2) gleich Gl. (II.12.6) ist. Damit ist (II.12.2) die Euler-Lagrange-Gleichung zu (II.12.3)

II.12.2 Effektive Lagrange-Dichten

Gemäß (II.12.1b) wird P_l als abhängiges Feld wieder durch $E_k = -\dot{A}_k$ ausgedrückt. Dies führt zu effektiven Lagrange-Dichten, vgl. das kubische Schrödinger-Feld.

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}'_{\text{eff}} \quad (\text{II.12.7a})$$

$$\mathcal{L}'_{\text{eff}} = \mathcal{L}_{\text{eff}}^{(1)} + \mathcal{L}_{\text{eff}}^{(2)} + \mathcal{L}_{\text{eff}}^{(3)} + \dots \quad (\text{II.12.7b})$$

Die Komponenten $\mathcal{L}_{\text{eff}}^{(j)}$ sind

$$\mathcal{L}_{\text{eff}}^{(1)} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \chi_{lm}^{(1)} E_l E_m \quad (\text{II.12.8a})$$

$$\mathcal{L}_{\text{eff}}^{(2)} = \frac{1}{3} \varepsilon_0 \chi_{lmn}^{(2)} E_l E_m E_n \quad (\text{II.12.8b})$$

$$\mathcal{L}_{\text{eff}}^{(3)} = \frac{1}{4} \varepsilon_0 \chi_{lmnp}^{(3)} E_l E_m E_n E_p \quad (\text{II.12.8c})$$

Konjugierter Impuls (vgl. (II.12.5)):

$$\Pi_l = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_l} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial E_l} = -\varepsilon_0 E_l - \varepsilon_0 \chi_{lm}^{(1)} E_m - \varepsilon_0 \chi_{lmn}^{(2)} E_m E_n - \dots$$

$$\Pi_l = -(\varepsilon_0 E_l + P_l) = -D_l \quad \checkmark$$

Je nachdem, welche Suszeptibilitäten $\chi^{(j)}$ auftreten, entstehen unterschiedliche Modelle.

II.12.3 Kubische Wellengleichung für das Strahlungsfeld

Nach (II.12.1a) war

$$\Delta E_l - \frac{1}{c^2} \ddot{E}_l = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2} \ddot{P}_l(E_k)$$

Polarisationsmodell über $\chi^{(3)}$ (analog S3):

$$\frac{1}{\varepsilon_0} P_l(E_k) \equiv \chi^{(3)} |\mathbf{E}|^2 E_l \quad (\text{II.12.9})$$

$$\Delta E_l - \frac{1}{c^2} \ddot{E}_l = \frac{1}{c^2} \chi^{(3)} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (|\mathbf{E}|^2 E_l) \quad (\text{II.12.10})$$

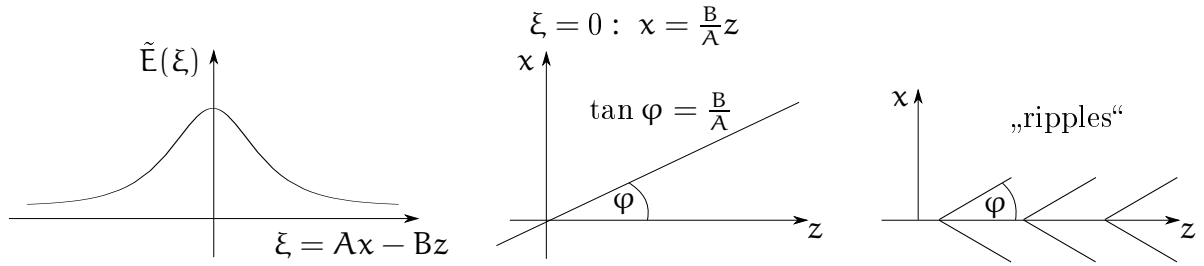


Abbildung II.24: Kubische Wellengleichung. Links: $\tilde{E}(\xi)$, Mitte: Fall $\xi = 0$, rechts: Interpretation als „räumliches Soliton“

Ansatz:

$$E_{\perp} = \tilde{E}(x, y, z) \cdot R_{\perp}(z, t) \quad (\text{II.12.11})$$

wobei E_{\perp} die Einhüllende ist und $R_{\perp} = \mathbf{e}_{\perp} e^{i(kz - \omega t)}$ mit \mathbf{e}_{\perp} als Polarisations-Einheitsvektor und

$$\omega^2 = k^2 c^2 \quad (\text{II.12.12})$$

Durch Einsetzen erhält man:

$$\frac{\partial}{\partial z} E_{\perp} = \frac{\partial \tilde{E}_{\perp}}{\partial z} R_{\perp} + ik \tilde{E}_{\perp} R_{\perp} \quad (\text{II.12.13a})$$

$$\frac{\partial}{\partial x} E_{\perp} = \frac{\partial \tilde{E}_{\perp}}{\partial x} R_{\perp} \quad (\text{II.12.13b})$$

$$\frac{\partial}{\partial y} E_{\perp} = \frac{\partial \tilde{E}_{\perp}}{\partial y} R_{\perp} \quad (\text{II.12.13c})$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} E_{\perp} = \frac{\partial^2 \tilde{E}_{\perp}}{\partial z^2} + 2ik \frac{\partial \tilde{E}_{\perp}}{\partial z} R_{\perp} - k^2 \tilde{E}_{\perp} R_{\perp} \quad (\text{II.12.13d})$$

Aus (II.12.11):

$$|\mathbf{E}|^2 = |\tilde{\mathbf{E}}|^2 \quad (\text{II.12.14})$$

und

$$\frac{\partial}{\partial t} |\mathbf{E}|^2 = 0 \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2} E_{\perp} = -\omega^2 \tilde{E}_{\perp} R_{\perp} \quad (\text{II.12.15})$$

Setze dann (II.12.13), (II.12.14) und (II.12.15) ein in (II.12.10). Unter Berücksichtigung von (II.12.12) und mit der Forderung $\frac{\partial^2 \tilde{E}}{\partial z^2}$ ergibt sich die zweidimensionale S3-Gleichung (vgl. auch mit (II.11.1)):

$$\boxed{2ik \frac{\partial \tilde{E}}{\partial z} + \frac{\partial^2 \tilde{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{E}}{\partial y^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \chi^{(3)} |\tilde{E}|^2 \tilde{E}} \quad (\text{II.12.16})$$

wobei formal gilt:

$$t \longrightarrow \frac{1}{2} \hbar z k \quad (\text{II.12.17})$$

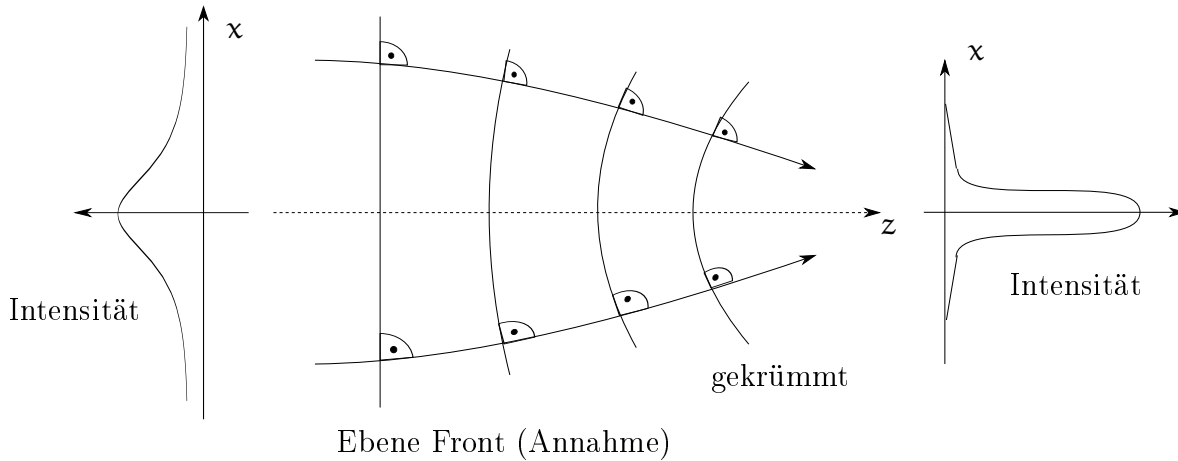


Abbildung II.25: Selbstfokussierung, Wellenfeld: Linien gleicher Phase

mit konstantem k . Sei zusätzlich

$$\frac{\partial^2 \tilde{E}}{\partial y^2} = 0 \quad (\text{II.12.18})$$

Dann können wir die Soliton-Lösung zu (II.12.16) übernehmen:
Analog wie in Gl. (II.11.12) sei

$$\xi_e = Ax - Bz \quad (\text{II.12.19})$$

und folglich (Abb. II.24 links):

$$\boxed{\tilde{E}(x, z) \sim \text{sech}(Ax - Bz)} \quad (\text{II.12.20})$$

Mit

$$\tilde{E}(x, z, t) = \tilde{E}(x, z) \mathbf{e}_1 e^{i(kz - \omega t)} \quad (\text{II.12.21})$$

Nullstelle: Bei $\xi = 0$ ist $x = \frac{B}{A}z$ und $\tan \varphi = \frac{B}{A}$ (siehe Abb. II.24 Mitte).

Interpretation:

Eine Lichtwelle in z -Richtung induziert Wellenleiter-artige Kanäle im Winkel $\tan \varphi = B/A$. „Räumliches Soliton“ (siehe Abb. II.24 rechts).

Siehe auch P. L. Kelly, PRL **15**, 1005 sowie PRL **13**,479

II.12.4 Selbstfokussierung

Näherung: \tilde{E} sei nur schwach ortsabhängig:

$$\frac{\partial^2 \tilde{E}}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \tilde{E}}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \tilde{E}}{\partial z^2} = 0$$

Ansatz:

$$\tilde{E}(x, y, z) = \tilde{E}_0(x, y) e^{i\alpha z} \quad (\text{II.12.22})$$

Eingesetzt in (II.12.16):

$$-2k\alpha\tilde{E}_0 + \frac{\omega^2}{c^2}\chi^{(3)}|\tilde{E}_0|^2\tilde{E}_0 = 0 \quad (\text{II.12.23})$$

Mit (II.12.12) wird dies zu

$$\alpha = \frac{\omega^2}{2kc^2}\chi^{(3)}|\tilde{E}_0|^2 = \frac{k}{2}\chi^{(3)}|\tilde{E}_0|^2 \quad (\text{II.12.24})$$

(II.12.24) in (II.12.22), und dann beides in (II.12.11):

$$\boxed{E_1(x, y, z) = \mathbf{e}_1 \tilde{E}_0 \exp \left[i \left(\left(\frac{1}{2} \chi^{(3)} |\tilde{E}_0|^2 + 1 \right) kz - \omega t \right) \right]} \quad (\text{II.12.25})$$

Phasengeschwindigkeit: Der Exponent muss verschwinden, also

$$\left(\frac{1}{2} \chi^{(3)} |\tilde{E}_0|^2 + 1 \right) kz = \omega t$$

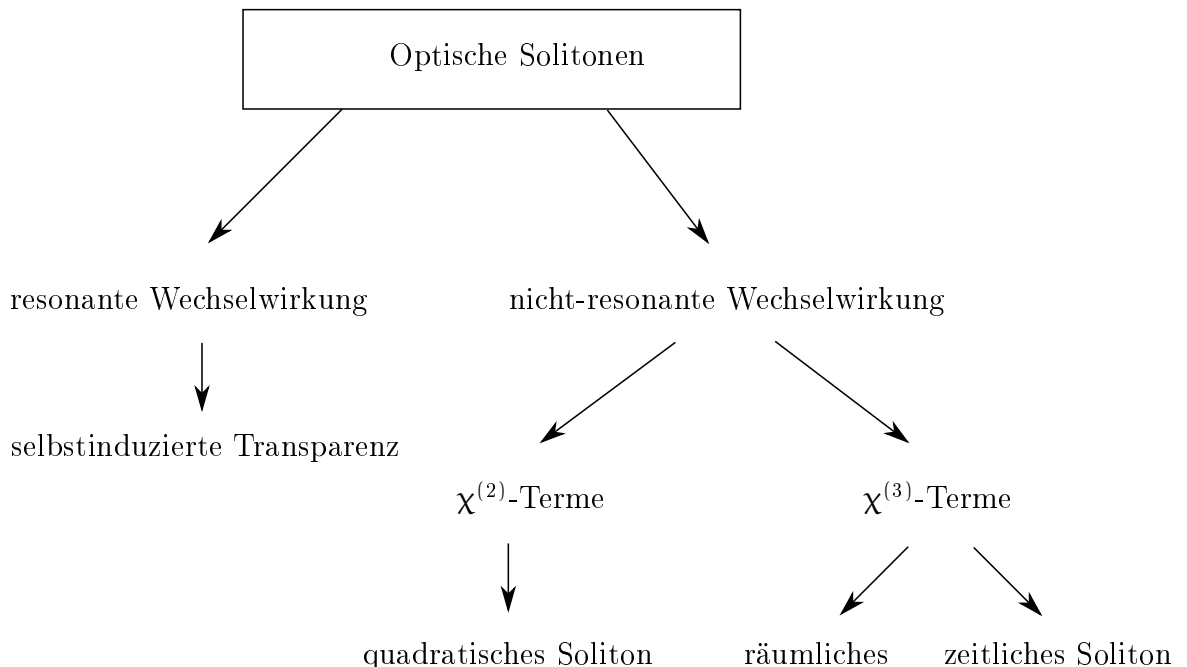
und

$$\boxed{v_p = \frac{dz}{dt} = \frac{\omega}{k} \frac{1}{1 + \frac{1}{2} \chi^{(3)} |\tilde{E}_0|^2}} \quad (\text{II.12.26})$$

Die Phasengeschwindigkeit nimmt mit der Intensität ab! Die geometrische Optik ist in diesem Fall also ungültig! Betrachte das Wellenfeld mit Linien gleicher Phase $\varphi = \text{const}$ (Abb. II.25).

II.12.5 Überblick: Solitonen

Literatur: G. Leuchs, Optics and Photonic News, Februar 2002, S. 64



II.13 Nichtlineare Hamilton-Modelle

II.13.1 Hamilton-Dichten

Literatur:

Mandel, Wolf, S. 1069

R. Loudon, S. 347

D'Ariano, quant-phys/9902013

S. Scheel, quant-phys/0006025

Aus den effektiven Lagrange-Dichten (II.12.8) lassen sich effektive Hamilton-Dichten konstruieren. Im folgenden gelte die Summenkonvention.

$$\Pi_l = -\varepsilon_0 \left(E_l + \chi_{lm}^{(1)} E_m + \chi_{lmn}^{(2)} E_m E_n + \dots E_l E_m E_n E_p \right) = -D_l \quad (\text{II.13.1})$$

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}'_{\text{eff}} \quad (\text{II.13.2})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \Pi_l \dot{A}_l - \mathcal{L}_0 - \mathcal{L}'_{\text{eff}} = -D_l E_l - \frac{\varepsilon_0}{2} E_l E_l + \frac{1}{2\mu_0} B_l B_l \\ &= -\frac{\varepsilon_0}{2} \chi_{lm}^{(1)} E_l E_m - \frac{\varepsilon_0}{3} \chi_{lmn}^{(2)} E_l E_m E_n - \dots \end{aligned} \quad (\text{II.13.3})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \frac{\varepsilon_0}{2} E_l E_l + \frac{1}{2\mu_0} B_l B_l + \frac{\varepsilon_0}{2} \chi_{lm}^{(1)} E_l E_m + \frac{2\varepsilon_0}{3} \chi_{lmn}^{(2)} E_l E_m E_n + \dots \\ &= \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_{\text{eff}}^{(1)} + \mathcal{H}_{\text{eff}}^{(2)} + \dots \end{aligned} \quad (\text{II.13.4})$$

Effektive Hamilton-Dichten:

$$\mathcal{H}_{\text{eff}}^{(1)} = \frac{\varepsilon_0}{2} \chi_{lm}^{(1)} E_l E_m \quad (\text{II.13.5a})$$

$$\mathcal{H}_{\text{eff}}^{(2)} = \frac{2\varepsilon_0}{3} \chi_{lmn}^{(2)} E_l E_m E_n \quad (\text{II.13.5b})$$

$$\mathcal{H}_{\text{eff}}^{(3)} = \frac{3\varepsilon_0}{4} \chi_{lmnp}^{(3)} E_l E_m E_n E_p \quad (\text{II.13.5c})$$

$$H = \int d^3\mathbf{r} \mathcal{H} \quad (\text{II.13.6})$$

Die Gleichungen (II.13.5) beschreiben eine lokale Feldtheorie, die allerdings nur näherungsweise gilt.

Quantisierung (Feldoperatoren)

Gemäß (I.3.41) ist:

$$[\hat{\Pi}_i(\mathbf{r}, t), \hat{A}_j(\mathbf{r}', t)] = -i\hbar \delta_{ij}^T(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (\text{II.13.7})$$

Man löst die linearen Feldgleichungen wiederum durch Einführung von Modenoperatoren $\hat{q}_{\mathbf{k}\nu}$, $\hat{q}_{\mathbf{k}\nu}^\dagger$ mit linearen Moden wie bisher.

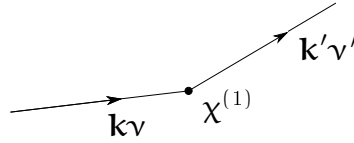


Abbildung II.26: Elementarer Prozess

II.13.2 Darstellung durch Modenoperatoren

z. B. (II.13.5a):

$$\hat{H}^{(1)} = \frac{\epsilon_0}{2} \int d^3 \mathbf{r} \chi_{lm}^{(1)} \hat{E}_l \hat{E}_m \quad (\text{II.13.8})$$

Das Integral wird umgeschrieben zu

$$\int d^3 \mathbf{r} \chi_{lm}^{(1)} \hat{E}_l^{(-)} \hat{E}_m^{(+)} = \sum_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \sum_{\nu\nu'} \omega_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k}'} \hat{q}_{\mathbf{k}'\nu'}^\dagger \hat{q}_{\mathbf{k}\nu} \alpha_{lm}$$

wobei

$$\alpha_{lm}^{k k'} \equiv \int d^3 \mathbf{r} \chi_{lm} u_{l|k\nu} u_{m|k'\nu'}^* \quad \text{etc.}$$

$$\hat{H}^{(1)} = \frac{\epsilon_0}{2} \sum_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \omega_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k}'} \left(\alpha_{lm}^{k k'} \hat{q}_{\mathbf{k}'\nu'}^\dagger \hat{q}_{\mathbf{k}\nu} + (\alpha_{lm}^{k k'})^* \hat{q}_{\mathbf{k}'\nu'} \hat{q}_{\mathbf{k}\nu}^\dagger \right) + o(\hat{q}\hat{q}) + o(\hat{q}^\dagger \hat{q}^\dagger) \quad (\text{II.13.9})$$

Elementarer Prozess: sei $\omega_{\mathbf{k}} = \omega'_{\mathbf{k}}$ (siehe Abb. II.26) Man lässt einen \hat{H} -Term auf einen Input-Zustand wirken.

Speziell: Zwei-Moden-Fall, Selektion: $\hat{q} \rightarrow \{\hat{a}, \hat{b}\}$

$$\hat{H}^{(1)} = \hbar K^{(1)} (\hat{a}\hat{b}^\dagger + \hat{a}^\dagger\hat{b}) \quad (\text{II.13.10})$$

mit dem phänomenologischen Parameter $K^{(1)}$.

II.13.3 Strahlteiler-Hamiltonian

Lineare Kopplung mit $\chi^{(1)}$: Betrachte die unitäre Transformation mit $\hat{H}^{(1)}$ gemäß Gl. (II.13.10)

$$\hat{U} = \exp(-i\tau K^{(1)} (\hat{a}\hat{b}^\dagger + \hat{a}^\dagger\hat{b})) \quad (\text{II.13.11})$$

mit der Wechselwirkungszeit τ . Setze nun

$$\left. \begin{aligned} \hat{a}\hat{b}^\dagger &= \hat{P}_{21} \\ \hat{a}^\dagger\hat{b} &= \hat{P}_{12} \end{aligned} \right\} \hat{a}\hat{b}^\dagger + \hat{a}^\dagger\hat{b} = \hat{\sigma}_x \quad \alpha = -K^{(1)}\tau$$

Dies stellt einen Ein-Photon-Zustandsraum dar. Man kann nun schreiben:

$$\hat{U}_0 = \exp(i\alpha \hat{\sigma}_x)$$



Abbildung II.27: Nichtlineare Kopplung: Drei-Moden-Fall

Nach einer Reihenentwicklung dieses Ausdrucks und mit $(\hat{\sigma}_x)^2 = \hat{1}$ ist dies identisch mit

$$\hat{U}_0 = \hat{1} \cos \alpha + i\hat{\sigma}_x \sin \alpha$$

Die Transformationsmatrix ist dann

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \cos(Kt) & -i \sin(Kt) \\ -i \sin(Kt) & \cos(Kt) \end{pmatrix} \quad (\text{II.13.12})$$

Die Ein-Photon-Zustände sind

$$|1\rangle = \hat{a}^\dagger |0\rangle \quad |2\rangle = \hat{b}^\dagger |0\rangle \quad \text{und} \quad |\psi\rangle = \alpha |1\rangle + \beta |2\rangle$$

Im Schrödinger-Bild schreibt sich die Transformation

$$|\psi\rangle' = \begin{pmatrix} \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \mathbf{u} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \quad (\text{II.13.13})$$

II.13.4 Nichtlineare Kopplung $\chi^{(2)}$: Drei-Moden-Fall

$$\hat{H}^{(2)} = \frac{2\varepsilon_0}{3} \int d^3\mathbf{r} \chi_{ijk}^{(2)} \hat{E}_i \hat{E}_j \hat{E}_k \quad (\text{II.13.14})$$

Andere Schreibweise, vgl. voriger Abschnitt:

$$\hat{H}^{(2)} = \hbar K^{(2)} (\hat{a}\hat{b}\hat{c}^\dagger + \hat{a}^\dagger\hat{b}^\dagger\hat{c}) \quad (\text{II.13.15})$$

II.13.5 Squeezer-Hamiltonian

Literatur: Braunstein, quant-ph/9904002

Parametrische Näherung: klassisches Treiberfeld

$$\begin{aligned} \hat{c} &\rightarrow i\gamma(t) & \hat{c}^\dagger &\rightarrow -i\gamma^*(t) \\ \implies \hat{H}_p^{(2)} &= i\hbar K^{(2)} (\hat{a}^\dagger\hat{b}^\dagger\gamma(t) - \hat{a}\hat{b}\gamma^*(t)) \end{aligned} \quad (\text{II.13.16})$$

Betrachte den entarteten Verstärker mit $\hat{a} = \hat{b}$ („Squeezer“, vgl. Scully, S 40):

$$\hat{H}_p^{(2)}(t) = i\hbar K^{(2)} (\gamma(t)(\hat{a}^\dagger)^2 - \gamma^*(t)(\hat{a})^2) \quad (\text{II.13.17})$$

$$\hat{H}(t) = \hbar\omega \hat{a}^\dagger\hat{a} + \hat{H}_p^{(2)}(t) \quad (\text{II.13.18})$$

Bei $t = 0$ liegt der Feldzustand $|0\rangle$ vor, bei $t > 0$ ein Squeezed State.

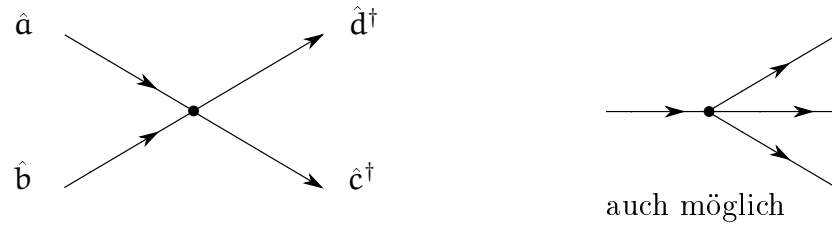


Abbildung II.28: Kerr: Vier-Moden-Fall

II.13.6 Kerr-Hamiltonian

Literatur:

Scully, S. 543: QND-Messung

M. O. Scully, PRA **59**, 4095 (1999)

Betrachte die nichtlineare Kopplung mit $\chi^{(3)}$:

$$\hat{H}^{(3)} = \frac{3\epsilon_0}{4} \int d^3\mathbf{r} \chi_{ijkl}^{(3)} \hat{E}_i \hat{E}_j \hat{E}_k \hat{E}_l \quad (\text{II.13.19})$$

Es liegt ein Vier-Moden-Fall vor:

$$\hat{H}^{(3)} = \hbar K^{(3)} (\hat{a}\hat{b}\hat{c}\hat{d} + \hat{a}\hat{b}\hat{c}\hat{d}) \quad (\text{II.13.20})$$

Bei Entartung ist

$$\hat{a} = \hat{c} \quad \hat{b} = \hat{d} \quad (\text{II.13.21})$$

d. h. man hat nur noch einen Zwei-Moden-Fall:

$$\hat{H}_{\text{Kerr}} = \hbar K^{(3)} (\hat{a}\hat{a} + \hat{b}\hat{b}) \quad (\text{II.13.22})$$

II.13.7 Anmerkung: Nichtlineare Prozesse im Ein-Moden-Fockraum

Auch die nichtlinearen Terme werden durch lineare Operatoren dargestellt! Nach Abschnitt II.5 lässt sich in einem diskreten Hilbertraum jeder Operator schreiben als

$$\hat{A} = \sum_{i,j} \hat{P}_{i,j} \text{Spur}\{\hat{A}\hat{P}_{i,j}\} \quad (\text{II.13.23})$$

Betrachte den Fock-Raum zu einer festen Mode \hat{a}^\dagger, \hat{a} . Für Modenoperatoren und deren Produkte gilt:

$$\begin{aligned} \hat{a} &= \hat{P}_{01} + \sqrt{2} \hat{P}_{12} + \sqrt{3} \hat{P}_{23} + \dots + \sqrt{s} \hat{P}_{s-1,s} + \dots \\ \hat{a}^\dagger &= \hat{P}_{10} + \sqrt{2} \hat{P}_{21} + \sqrt{3} \hat{P}_{32} + \dots \\ \hat{a}^\dagger \hat{a} &= 1\hat{P}_{11} + 2\hat{P}_{11} + \dots \quad \text{diagonal} \end{aligned} \quad (\text{II.13.24})$$

Operatorquadrate:

$$\begin{aligned} (\hat{a})^2 &= \sqrt{2} \hat{P}_{02} + \sqrt{2 \cdot 3} \hat{P}_{13} + \sqrt{3 \cdot 4} \hat{P}_{24} + \dots \\ (\hat{a}^\dagger)^2 &= \sqrt{2} \hat{P}_{20} + \sqrt{2 \cdot 3} \hat{P}_{31} \end{aligned} \quad (\text{II.13.25})$$

Lineare Prozesse: Änderung der Photonenzahl $\Delta n = \pm 1$

Nichtlineare Prozesse: Änderung der Photonenzahl $\Delta n = \pm 2$ (quadratisch), $\Delta n \pm 3$ (kubisch)

Lineare wie nichtlineare Prozesse entstehen durch Wechselwirkung von Licht mit Materie. Nichtlineare Prozesse werden üblicherweise phänomenologisch eingeführt über ein Polarisationsfeld.

II.14 Zur räumlichen Auflösung von Lichtfeldern

II.14.1 Fundamentales Coarse-Graining?

Bekannte Längenbegrenzungen sind:

- die klassische Auflösungsgrenze $d \sim \lambda$
- in der Quantenoptik ist der Streuquerschnitt eines Zwei-Niveau-Atoms: $\sigma \sim \lambda$
- die Photon-Wellenfunktion: $\Delta x \sim \lambda$.

Diese Grenzen lassen sich unterbieten:

- in der **Nahfeldoptik** (SNOM = Scanning near field optical microscope)
- bei **evaneszenten Wellen** (Totalreflexion an einer Grenzfläche) in zwei Dimensionen
- an **Grenzflächen** mit charakteristischen Längen kleiner als eine Wellenlänge
- bei **optischen Antennen** (s. u.)
- in **Wellenleiter** mit coaxialen Aperturen (s. u.)

Anwendungen:

- verbesserte Ankopplung Fernfeld-lokalisierter Quantensysteme
- Anisotrope (gerichtete) Lichtemission
- Atom-Nanooptik

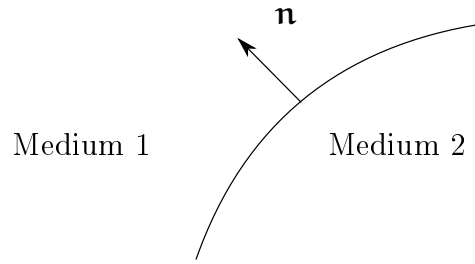


Abbildung II.29: Grenzfläche

II.14.2 Grenzflächen-Bedingungen

Maxwell-Gleichungen

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \operatorname{rot} \mathbf{B} &= -\mu_0 \mathbf{j} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \\ \operatorname{div} \mathbf{E} &= -\rho / \varepsilon_0 \\ \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0 \end{aligned} \tag{II.14.1}$$

An einer Grenzfläche gilt für die Tangentialkomponenten:

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{E}(2) - \mathbf{E}(1)) = 0 \tag{II.14.2a}$$

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{B}(2) - \mathbf{B}(1)) = \mu_0 \mathbf{j}_{2D} \tag{II.14.2b}$$

Normalkomponenten:

$$\mathbf{E}_n(1) - \mathbf{E}_n(2) = \rho_{2D} / \varepsilon_0 \tag{II.14.3a}$$

$$\mathbf{B}_n(1) - \mathbf{B}_n(2) = 0 \tag{II.14.3b}$$

Das äußere Medium wird dabei mit 1 bezeichnet, das innere mit 2. Weiterhin sind \mathbf{j}_{2D} die Grenzflächenstromdichte und ρ_{2D} die Grenzflächenladungsdichte.

Feldverstärkung

Feldverstärkung entsteht durch Ströme, die durch Beleuchtung induziert werden. Diese sind notwendig, um die Randbedingungen (z. B. im Metall) zu erfüllen: $\mathbf{E}_{\parallel} = 0$

Beispiel: Gold-Antenne auf Si unter einfallender ebener Welle mit $\lambda = 10 \mu\text{m}$. Die Verstärkung ist etwa 4000-fach (Intensität). Beachte: Intensitätsstrukturen $\simeq 50 \text{nm}$. Siehe dazu K. B. Crozier, J. Appl. Phys **94**, 4632.

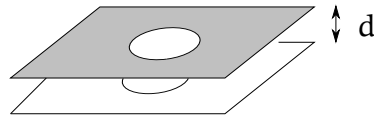


Abbildung II.30: Wellenleiter-Schema

II.14.3 Optische Antennen

Vgl. die Emission akustischer Wellen einer gespannten Gitarrensaite. Die Antenne ist also ein Resonanzboden. Herunterskalieren auf Längen in Größenordnung einer Wellenlänge: $\lambda/2$ -Antenne bzw. Bow-Tie. Material: Das Metall von Radioantennen ist ein fast perfekter Spiegel. Optische Antennen werden durch Elektron-Resonanzen beeinflusst (Oberflächenwellen, Plasmonen, usw.)

II.14.4 Optische Punkte und Löcher

Literatur:

- J. Greffet, Science **308**, 1561 (2005)
- K. B. Crozier et al, J. Appl. Phys **94**, 4632 (2003)
- P. S. Schuck et al, PRL **94**, 017402 (2005)
- V. Balykin, Optics and Photonics News, März 2005, S. 44

Betrachte einen Wellenleiter mit coaxialen Aperturen im Abstand d . Ein Punkt oder Loch steht, je nach Feldrichtung, senkrecht oder parallel zu den Platten.

II.15 Zusammenfassung

- a. **Felder:** hier klassische Raumkoordinaten.
 Fundamentale Felder: \mathbf{A} , \mathbf{E} , \mathbf{B} , ψ (lokal, linear)
 Phänomenologische Felder: \mathbf{D} , $\boldsymbol{\lambda}$, \mathbf{P} (i. a. nichtlokal, nichtlinear)
- b. **Dynamik:**
 Heisenberg-Bewegungsgleichung
 Wellengleichung (klassisch und quantenmechanisch): Startpunkt
 Bloch-, Maxwell-Bloch-Gleichungen
 Nichtlineare Feldgleichungen (z. B. kubische Schrödingergleichung S3)
- c. **Zustände:**
 Lichtfeld: Fock-Zustände, kohärente Zustände, squeezed states
 Gekoppelt/lokal: Dressed states (quantenmechanisch, semiklassisch), dark states, trapping states

Gekoppelt/Feldbeschreibung:

Raum-zeitlich: Selbstinduzierte Transparenz (SIT); Soliton

Räumlich: Selbstfokussierung

Zeitlich: Kollaps und Wiederkehr

d. **Diskrete Transformationen**

π -Pulse, $\pi/2$ -Pulse, Quantengatter, Echo

e. **Hamilton-Modelle**

Jaynes-Cummings, effektiver dressed-state Hamiltonian, Strahlteilermodell, Squeezed- und Kerr-Modell (passive Bauelemente)

III Offene Systeme

Motivation:

„Relevanzkonzept“: Nicht alles ist gleich wichtig, die Perspektive ist nur teilweise subjektiv, vielmehr erzwungen durch typische Beobachtungsweisen, vgl. in der Thermodynamik.

Man betrachtet ein partitioniertes System, bestehend aus einem kleinen Subsystem S und seiner Umgebung, dem Bad B. Der Gesamt-Hamiltonian ist dann:

$$\hat{H} = \hat{H}_S + \hat{H}_B + \hat{H}_{SB}$$

Man interessiert sich nur für das System, dessen Dichtematrix man durch partielles Aussparen aller Bad-Freiheitsgrade erhält:

$$\hat{\rho}_S = \text{Spur}_B\{\hat{\rho}\}$$

Problem: im allgemeinen legt $\hat{\rho}_S$ nicht die Dynamik von $\hat{\rho}_S$ fest, es gibt keine abgeschlossene Bewegungsgleichung. Genäherte, kompliziertere Beschreibungen (enthalten statistische Elemente):

- Schrödinger-Bild: Liouville-von-Neumann-Gleichung \rightarrow Mastergleichung
- Heisenberg-Bild: Heisenberg-Bewegungsgleichung \rightarrow Quanten-Langevin-Gleichung

Die Beschreibung im Schrödinger-Bild erscheint fundamentaler.

Vgl. H. D. Zeh, quant-ph/0512078

Inhalt des Kapitels: thermische Strahlung, Superstrahlung, Quantenschwebungen, Mess-Szenarien, Laser-Gleichung

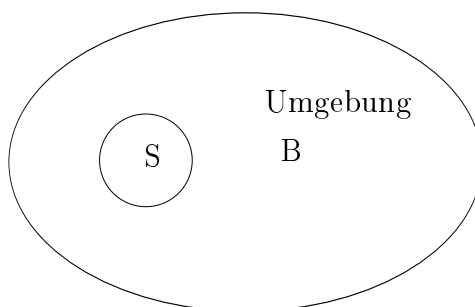


Abbildung III.1: System S mit Umgebung B

III.1 Heisenberg-Bild: Quanten-Langevin-Gleichung

III.1.1 Brownsches Teilchen

Literatur: Cohen-Tannoudji, Atom-Phonon-Interactions, S. 334

- Brown (1826): Beobachtungen unterm Mikroskop; „Organische Moleküle (Pollen)“ mit Leben?
- Einstein (1905): Physikalische Deutung, Stöße der Bewegung des Lösungsmittel aufintegriert.

Klassische Langevin-Gleichung:

$$\dot{v} + \alpha v = F(t) \quad (\text{III.1.1})$$

Es sind v die Teilchengeschwindigkeit und α das Maß für Dissipation. $F(t)$ beschreibt fluktuierende Kräfte/Masse und kann in Form von Kraftstößen ausgedrückt werden:

$$F(t) = F_0 \sum_j (-1)^j \delta(t - t_j) \quad (\text{III.1.2})$$

Annahmen:

$$\langle F(t) \rangle = 0 \quad (\text{III.1.3a})$$

$$\langle F(t)F(t') \rangle = C\delta(t - t') \quad (\text{III.1.3b})$$

c ist ein Maß für Fluktuationen („weißes Rauschen“) und kann geschrieben werden als Spektralfunktion:

$$F(\omega) = \int d\tau \langle F(\tau)F(0) \rangle e^{i\omega\tau} = C = \text{const} \quad (\text{III.1.4})$$

Gesucht werden nun Aussagen im Mittel. Betrachte die homogene DGL

$$\dot{v} + \alpha v = 0 \quad (\text{III.1.5})$$

mit der Lösung

$$v(t) = v(0)e^{-\alpha t} \quad (\text{III.1.6})$$

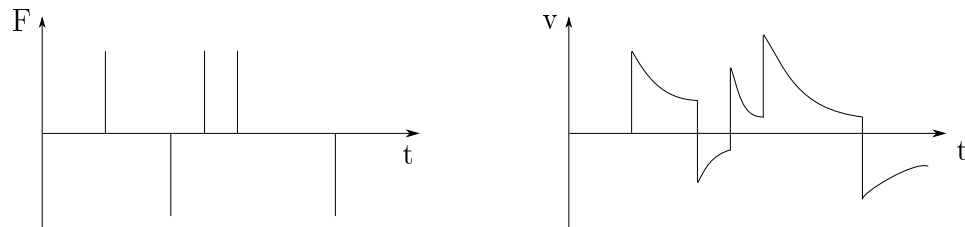


Abbildung III.2: Zeitliches Verhalten von Teilchengeschwindigkeit und fluktuierender Kraft

Ansatz für die spezielle Lösung der inhomogenen DGL:

$$v(t) = \int_0^t G(t-\tau)F(\tau)d\tau \quad (\text{III.1.7})$$

$$\dot{v}(t) = \int_0^t \dot{G}(t-\tau)F(\tau)d\tau + F(t)G(0) \quad (\text{III.1.8})$$

$G(t-\tau)$ ist die Green-Funktion. Für den zweiten Term in (III.1.8) wurde die Leibniz-Regel berücksichtigt. Durch Einsetzen in (III.1.7) erhält man

$$\int_0^t \dot{G}(t-\tau)F(\tau)d\tau + F(t)G(0) + \alpha \int_0^t G(t-\tau)F(\tau)d\tau = F(t)$$

Sei $G(0) = 1$:

$$\begin{aligned} \implies \dot{G}(t-\tau) + \alpha G(t-\tau) &= 0 \\ \implies G(t-\tau) &= e^{-\alpha(t-\tau)} \end{aligned} \quad (\text{III.1.9})$$

Die gesamte Lösung setzt sich zusammen aus (III.1.6) und der Lösung der inhomogenen DGL:

$$\boxed{v(t) = \int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)}F(\tau)d\tau + v(0)e^{-\alpha t}} \quad (\text{III.1.10})$$

Im folgenden sei $v(0) = 0$. Dann ist wegen (III.1.3a):

$$\langle v(t) \rangle = 0 \quad (\text{III.1.11})$$

Geschwindigkeits-Korrelations-Funktion:

$$\langle v(t)v(t') \rangle = \int_0^t \int_0^{t'} e^{-\alpha(t-\tau)}e^{-\alpha(t'-\tau')} \underbrace{\langle F(\tau)F(\tau') \rangle}_{=\delta(t-t')} d\tau d\tau'$$

Für $t > t'$:

$$\begin{aligned} \dots &= C \int_0^{t'} e^{-\alpha(t-\tau)}e^{-\alpha(t'-\tau')} d\tau' \\ &= Ce^{-\alpha(t+t')} \int_0^{t'} e^{-2\alpha\tau} d\tau' = \frac{C}{2\alpha} e^{-\alpha(t+t')} (e^{-2\alpha t'} - 1) \\ &= \frac{C}{2\alpha} (e^{-\alpha(t-t')} - e^{-\alpha(t+t')}) \end{aligned}$$

III Offene Systeme

Für $t < t'$:

$$\begin{aligned} \dots &= C \int_0^t e^{\dots} d\tau' && \text{vertausche } t, t' \\ &= \frac{C}{2\alpha} \left(e^{+\alpha(t-t')} - e^{-\alpha(t+t')} \right) \end{aligned}$$

Im Fall von $t + t' \gg \frac{1}{\alpha}$:

$$\boxed{\langle v(t)v(t') \rangle = \frac{C}{\alpha} e^{-\alpha|t-t'|}} \quad (\text{III.1.12})$$

$\tau = 1/\alpha$ ist die Korrelationszeit („Vorhersagezeit“). Für $t = t'$:

$$\langle v^2 \rangle = \frac{C}{2\alpha} \quad (\text{III.1.13})$$

Nach Einstein:

$$\frac{m}{2} \langle v^2 \rangle = \frac{1}{2} k_B T \quad (\text{III.1.14})$$

$$\implies C = \frac{2\alpha}{m} k_B T \quad (\text{III.1.15})$$

Beispiel für Fluktuations-Dissipations-Theorem: $C \sim \alpha$
 Fluktuationsspektrum:

$$S(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \langle v(0)v(\tau) \rangle \cos \omega\tau d\tau = \frac{C}{\pi} \frac{1}{\alpha^2 + \omega^2} \quad (\text{III.1.16})$$

III.1.2 Quanten-Langevin-Gleichung

Problem: Dämpfung im Heisenberg-Bild (Meystre, S. 392). Falsch wäre

$$\frac{d}{dt} \hat{A} = -\frac{\gamma}{2} \hat{A}$$

Denn mit

$$\hat{A}(t) = \hat{A}(0)e^{-\gamma t/2}, \quad \hat{A}^\dagger(t) = \hat{A}^\dagger(0)e^{-\gamma t/2}$$

würde folgen:

$$[\hat{A}(t), \hat{A}^\dagger(t)] \sim e^{-\gamma t} \rightarrow 0$$

Richtig ist:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \hat{A} &= -\frac{\gamma}{2} \hat{A} + \hat{K}(t) \\ \frac{d}{dt} \hat{A}^\dagger &= -\frac{\gamma}{2} \hat{A}^\dagger + \hat{K}^\dagger(t) \end{aligned}$$

Dissipation ist also verknüpft mit Fluktuationen! Scheibe die Bloch-Gleichungen als Mittelwertgleichung (ohne kohärenten Anteil):

$$\frac{d}{dt} \langle \hat{\lambda}_i \rangle = \sum_{i,j} B_{ij} \langle \hat{\lambda}_j \rangle + \eta_i \quad (\text{III.1.17})$$

Vergleiche mit der Heisenberg-Langevin-Gleichung (Operatorgleichung):

$$\boxed{\frac{d}{dt} \hat{\lambda}_i = \sum_{i,j} B_{ij} \hat{\lambda}_j + \eta_i \hat{1} + \hat{K}_i(t)} \quad (\text{III.1.18})$$

wobei

$$\langle \hat{K}_i(t) \rangle = 0 \quad (\text{III.1.19})$$

$$\langle \hat{K}_i(t) \hat{K}_j(t') \rangle = \alpha_{ij} \delta(t - t') \quad (\text{III.1.20})$$

Die $\hat{K}_i(t)$ sind Fluktuationsoperatoren.

Anmerkungen:

Man kann die (Heisenberg-) Quanten-Langevin-Gleichung für jeden Operator aufstellen. Der Fluktuationsoperator $\hat{K}(t)$ hängt von der Wahl ab. Seine explizite Form wird innerhalb der Markoff-Näherung nicht gebraucht (Meystre, S. 413). Vgl. auch Wiseman, Quantum Semiclass. Optics **8**, 205 (1996)

Quantenform für Brownsches Teilchen: Caldeira-Legett (vgl. Abschnitt III.3.D)

III.2 Lindblad-Mastergleichung

III.2.1 Grundlagen der Gruppentheorie

Definition einer Gruppe: Eine algebraische Struktur mit innerer Verknüpfung (\cdot) heißt Gruppe G , wenn für $a, b, c \in G$ gilt:

- a. $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ Assoziativität
- b. Es existiert ein Eins-Element e mit $e \cdot a = a \cdot e = e$ für alle $a \in G$
- c. Zu jedem a gibt es ein inverses Element

$$a^{-1} \in G \quad \text{mit} \quad a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = e \quad (\text{III.2.1})$$

Halbgruppe: Gruppe ohne die letzten beiden Eigenschaften.

Homeomorphe Abbildung: Sei $a, b \in G$ und $a', b' \in G'$. Es wird abgebildet:

$$\begin{aligned} a &\longrightarrow a' \\ b &\longrightarrow b' \end{aligned}$$

unter Erhaltung der Gruppenbeziehungen: $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})' = \mathbf{a}' \cdot \mathbf{b}'$

Die Darstellung von Gruppen erfolgt über Matrizen. Die Gruppe quadratischer Matrizen ist homeomorph zur Gruppe G .

Lie-Gruppen („kontinuierliche“ Gruppen):

Die Gruppenelemente \mathbf{a}, \mathbf{b} hängen analytisch von kontinuierlichen Parametern ab.

Beispiele: Lorentz- und Galilei-Gruppe, unitäre Gruppe

III.2.2 Unitäre Dynamik

•

$$|\psi(t)\rangle = \hat{U}(t) |\psi(0)\rangle \quad (\text{III.2.2})$$

Lie-Gruppe:

$$\hat{U}(t) = e^{i\hat{H}t/\hbar} \quad \hat{U}(0) = \hat{1} \quad \hat{U}^{-1} = \hat{U}^\dagger \quad (\text{Inverses})$$

$$\hat{U}(t_1 + t_2) = \hat{U}(t_2) \cdot \hat{U}(t_1)$$

•

$$\hat{\rho}(t) = \hat{G}_{\text{coh}}(t) \hat{\rho}(0) \quad (\text{III.2.3})$$

Definition: Superoperator

$$\hat{G}_{\text{coh}}(t) \hat{\rho}(0) \equiv \hat{U}(t) \hat{\rho}(0) \hat{U}^\dagger(t) \quad (\text{III.2.4})$$

Dieser Operator definiert ebenfalls eine einparametrische Lie-Gruppe:

$$\begin{aligned} \hat{G}_{\text{coh}}(t_2) \hat{G}_{\text{coh}}(t_1) \hat{\rho}(0) &= \hat{U}(t_2) \hat{U}(t_1) \hat{\rho}(0) \hat{U}^\dagger(t_1) \hat{U}^\dagger(t_2) \\ &= \hat{G}_{\text{coh}}(t_1 + t_2) \hat{\rho}(0) \end{aligned}$$

Der Superoperator erzeugt also aus einem Operator einen anderen Operator.

Erzeugender Superoperator $\hat{\mathcal{L}}$:

$$\hat{G}_{\text{coh}}(t) \equiv \exp(\hat{\mathcal{L}}_{\text{coh}} t) \quad (\text{III.2.5})$$

$$\frac{d}{dt} \hat{\rho}(t) = \hat{\mathcal{L}}_{\text{coh}} \hat{\rho}(t) \quad (\text{III.2.6})$$

Liouville-von-Neumann-Gleichung: (vgl. Abschnitt I.5)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \hat{\rho}(t) &= -\frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \hat{\rho}] \\ \implies \boxed{\hat{\mathcal{L}}_{\text{coh}} \hat{\rho}(t) \equiv -\frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \hat{\rho}]} & \quad (\text{III.2.7}) \end{aligned}$$

Die reversible Dynamik von $\hat{\rho}$ wird vermittelt durch einen Superoperator $\hat{G}_{\text{coh}}(t)$. Er definiert eine einparametrische Lie-Gruppe mit dem Parameter t .

III.2.3 Irreversible Dynamik

(axiomatischer Zugang)

Theorem von Gorini, Kossakowski, Sudharsan, Lindblad (1976):

Behauptung: Die irreversible Dynamik von $\hat{\rho}$ wird erzeugt durch einen Superoperator $\hat{\mathcal{L}}$. Dieser definiert eine einparametrische Halbgruppe und muss die folgende Struktur haben:

$$\hat{\mathcal{L}}\hat{\rho} = -\frac{i}{\hbar}[\hat{H}, \hat{\rho}]_- + \frac{1}{2} \sum_{q,r}^s \mathcal{A}_{qr} \left([\hat{G}_q, \hat{\rho}\hat{G}_r^\dagger]_- + [\hat{G}_q\hat{\rho}, \hat{G}_r^\dagger]_- \right) \quad (\text{III.2.8})$$

mit $s = n^2 - 1$, wobei n die Dimension des Hilbertraums ist. Die \hat{G}_q sind Umgebungsoperatoren (Lindblad-Operatoren) mit

$$\text{Spur}\{\hat{G}_q\} = 0 \quad (\text{III.2.9})$$

$$\text{Spur}\{\hat{G}_q\hat{G}_r^\dagger\} = \delta_{qr} \quad (\text{III.2.10})$$

Die Parametermatrix \mathcal{A} ist positiv definit, d. h. $\mathcal{A}_{rr} > 0$, und hermitesch. Daher gilt die Schwarzsche Ungleichung:

$$|\mathcal{A}_{qr}|^2 \leq \mathcal{A}_{qq}\mathcal{A}_{rr} \quad (\text{III.2.11})$$

Im speziellen Fall von zwei Niveaus entspricht dies:

$$\det \mathcal{A} = \mathcal{A}_{11}\mathcal{A}_{22} - |\mathcal{A}_{12}|^2 \geq 0$$

Der Lindblad-Operator wird explizit geschrieben als:

$$\hat{\mathcal{L}} = \hat{\mathcal{L}}_{\text{coh}} + \hat{\mathcal{L}}_{\text{inc}} \quad (\text{III.2.12})$$

mit einem Fluktuations- (f) und einem Dissipationsanteil (d):

$$\hat{\mathcal{L}}_{\text{inc}}\hat{\rho} = \hat{\mathcal{L}}_{\text{inc}}^{(f)}\hat{\rho} + \hat{\mathcal{L}}_{\text{inc}}^{(d)}\hat{\rho} \quad (\text{III.2.13})$$

wobei

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{L}}_{\text{inc}}^{(f)}\hat{\rho} &= \sum_{q,r} \mathcal{A}_{qr} \hat{G}_q \hat{\rho} \hat{G}_r^\dagger \\ \hat{\mathcal{L}}_{\text{inc}}^{(d)}\hat{\rho} &= -\frac{1}{2} \sum_{q,r} \mathcal{A}_{qr} (\hat{\rho} \hat{G}_r^\dagger \hat{G}_r + \hat{G}_r^\dagger \hat{G}_r \hat{\rho}) \end{aligned} \quad (\text{III.2.14})$$

Die formale Lösung der Mastergleichung mit dem Superoperator aus Gl. (III.2.8),

$$\frac{d}{dt}\hat{\rho} = \hat{\mathcal{L}}\hat{\rho} \quad (\text{III.2.15})$$

III Offene Systeme

ist

$$\hat{\rho}(t) = e^{\hat{\mathcal{L}}t} \hat{\rho}(0) \quad (\text{III.2.16})$$

Mittelwerte:

$$\begin{aligned} \bar{A}(t) &= \text{Spur}\{\hat{A}\hat{\rho}(t)\} = \text{Spur}\{\hat{A}e^{\hat{\mathcal{L}}t}\hat{\rho}(0)\} \\ &= \text{Spur}\{\hat{A}\hat{\rho}(t)\} = \text{Spur}\{\hat{A}(t)\hat{\rho}(0)\} \end{aligned}$$

Im Heisenberg-Bild:

$$\hat{A}(t) = \hat{A}e^{\hat{\mathcal{L}}t} \quad (\text{III.2.17})$$

Spurerhaltung der Lindblad-Dynamik:

$$\begin{aligned} \text{Spur}\{\hat{\mathcal{L}}_{\text{inc}}^{(f)}\} &= \sum_{q,r} \text{Spur}\{\hat{G}_r^\dagger \hat{G}_q \hat{\rho}\} \\ \text{Spur}\{\hat{\mathcal{L}}_{\text{inc}}^{(d)}\} &= -\frac{1}{2} \sum_{q,r} \text{Spur}\{\hat{G}_r^\dagger \hat{G}_q \hat{\rho}\} - \frac{1}{2} \dots \\ \implies \frac{d}{dt} \text{Spur}\{\hat{\rho}\} &= \text{Spur}\{\hat{\mathcal{L}}_{\text{coh}}\hat{\rho}\} + \text{Spur}\{\hat{\mathcal{L}}_{\text{inc}}\hat{\rho}\} = 0 \quad \checkmark \end{aligned} \quad (\text{III.2.18})$$

Schreibweise nach Saito, PRE **61**, 2397 (2000): Beachte

$$\begin{aligned} (\hat{G}\hat{\rho}\hat{G}^\dagger - \hat{\rho}\hat{G}^\dagger\hat{G})^\dagger &= (\hat{\rho}\hat{G}^\dagger)^\dagger \hat{G}^\dagger - \hat{G}^\dagger (\hat{\rho}\hat{G}^\dagger) \\ &= \hat{G}\hat{\rho}\hat{G}^\dagger - \hat{G}^\dagger\hat{G}\hat{\rho} \\ &= [\hat{G}\hat{\rho}, \hat{G}^\dagger] \end{aligned} \quad (\text{III.2.19})$$

Der inkohärente Teil \hat{G} der Mastergleichung schreibt sich dann:

$$\hat{\mathcal{L}}_{\text{inc}} = \frac{1}{2} \mathcal{A} \left([\hat{G}, \hat{\rho}\hat{G}^\dagger] + [\hat{G}, \hat{\rho}\hat{G}^\dagger]^\dagger \right) \quad (\text{III.2.20})$$

Literatur:

T. Felbinger et al, quant-ph/9903089

A. A. Budini et al, J. Phys A **32**, 631 (1999)

J. Pöttinger et al, PRA **31**, 1295 (1985)

H. P. Breuer et al, The theory of open quantum systems, Oxford U. P., 2003

Herleitung der Mastergleichung für den harmonischen Oszillator:

W. H. Louisell, Quantum statistical properties of radiation (Wiley, 1990)

Walls, Milburn

III.2.4 Nicht-hermitesche Hamilton-Operatoren

$$\Delta\hat{H} \equiv -\frac{i\hbar}{2} \sum_{q,r} A_{qr} \hat{G}_r^\dagger \hat{G}_q \quad (\text{III.2.21})$$

$$\Delta\hat{H}^\dagger = \frac{i\hbar}{2} \sum_{q,r} A_{qr} \hat{G}_r^\dagger \hat{G}_q$$

Im zweiten Ausdruck wurden q und r vertauscht, und wegen Hermitizität ist $A_{qr}^* = A_{rq}$. Man erhält damit

$$\hat{\mathcal{L}}_{\text{inc}}^{(d)} \hat{\rho} = -\frac{i}{\hbar} (\Delta\hat{H}\hat{\rho} - \hat{\rho}\Delta\hat{H}^\dagger) \quad (\text{III.2.22})$$

$$\hat{H}_{\text{eff}} \equiv \hat{H} + \Delta\hat{H} \quad (\text{III.2.23})$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d}{dt} \hat{\rho} = -\frac{i}{\hbar} (\hat{H}_{\text{eff}} \hat{\rho} - \hat{\rho} \hat{H}_{\text{eff}}^\dagger) + \hat{\mathcal{L}}_{\text{inc}}^{(f)} \hat{\rho}} \quad (\text{III.2.24})$$

Die Vernachlässigung von $\hat{\mathcal{L}}_{\text{inc}}^{(f)} \hat{\rho}$ verletzt die Bedingung $\text{Spur}\{\hat{\rho}\} = \text{const}$, vgl. (III.2.18).

Vereinfachte Zerfallsmodelle für spezielle Anwendungen: z. B.

$$\hat{H}_{\text{eff}} = \hat{H} - i\gamma\hat{1}$$

III.2.5 Äquivalenztransformationen

vgl. Breuer, S. 121-123

a. Es sei

$$\begin{aligned} \hat{G}_q &\equiv \sum_k u_{kq} \hat{F}_k \\ \hat{G}_r^\dagger &\equiv \sum_{k'} u_{k'r}^* \hat{F}_{k'}^\dagger \end{aligned} \quad (\text{III.2.25})$$

mit unitärer Koeffizientenmatrix. Setze dies ein in $\hat{\mathcal{L}}_{\text{inc}}^{(f)} \hat{\rho}$ (entsprechend für $\hat{\mathcal{L}}_{\text{inc}}^{(d)} \hat{\rho}$):

$$\hat{\mathcal{L}}_{\text{inc}}^{(f)} \hat{\rho} = \sum_{q,r,k,k'} A_{qr} u_{kq} u_{k'r}^* \hat{F}_k \hat{\rho} \hat{F}_{k'}^\dagger$$

Damit ist

$$\boxed{\sum_{q,r} u_{kq} A_{qr} u_{k'r}^* \equiv \gamma_{kk'}} \quad (\text{III.2.26})$$

Die Parametermatrix A_{qr} lässt sich damit diagonalisieren:

$$\gamma_{kk'} = W_k \delta_{kk'} \quad (\text{III.2.27})$$

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{L}}_{\text{inc}}^{(f)} \hat{\rho} &= \sum_k \mathcal{W}_k \hat{F}_k \hat{\rho} \hat{F}_k^\dagger \\ \hat{\mathcal{L}}_{\text{inc}}^{(d)} \hat{\rho} &= -\frac{1}{2} \sum_k \mathcal{W}_k \left(\hat{\rho} \hat{F}_k^\dagger \hat{F}_k + \hat{F}_k^\dagger \hat{F}_k \hat{\rho} \right) \end{aligned} \quad (\text{III.2.28})$$

wobei

$$\mathcal{W}_k \geq 0 \quad (\text{III.2.29})$$

positiv definit ist („Rate“).

b.

$$\hat{F}'_j = \hat{F}_j + \alpha_j \hat{1} \quad (\text{III.2.30})$$

d. h.

$$\text{Spur}\{\hat{F}'_j\} = n\alpha_j \neq 0$$

Diese Trafo führt zum gleichen Lindblad-Operator $\hat{\mathcal{L}}$, sofern

$$\hat{H}' = \hat{H} - \frac{i}{2} \mathcal{W}_j \left(\alpha_j^* \hat{F}_j - \alpha_j \hat{F}_j^\dagger \right) \quad (\text{III.2.31})$$

Insbesondere ist $\hat{H}' = \hat{H}$, falls

$$\hat{F}_j = \hat{F}_j^\dagger \quad \alpha_j = \alpha_j^* \quad \text{reell}$$

Beispiel:

$$\hat{F}'_j = \hat{P}_{22}, \quad \text{Spur}\{\hat{F}'_j\} = 1 \quad \implies \alpha_j = \frac{1}{n} \quad \text{reell}$$

Anmerkungen:

- a. Axiomatischer Zugang zur Irreversibilität. Mathematisch über (Halb-) Gruppen, Dynamik über zeitlich lokale Mastergleichung.
- b. Alternative: Herleitung von Mastergleichungen durch konkrete Einbettung und Näherungen.
- c. Kohärente und inkohärente Treiber sind additiv:

$$\hat{\mathcal{L}} \hat{\rho} = \hat{\mathcal{L}}_{\text{coh}} \hat{\rho} + \hat{\mathcal{L}}_{\text{inc}} \hat{\rho}$$

- d. Innerhalb der inkohärenten Anteile sind die Dämpfungskanäle nach Diagonalisierung der Parametermatrix \mathcal{A} additiv.
- e. Für den Hilbertraum des Systems mit der Dimension n gibt es $n^2 - 1$ unabhängige (orthogonale) Lindblad-Operatoren \hat{F}_k .

III.3 Dämpfungsmodelle

Mit (III.2.28) ist für einen gegebenen Umgebungsoperator \hat{F}_r :

$$\boxed{(\hat{\mathcal{L}}_{\text{inc}}\hat{\rho})_r = \frac{1}{2} \mathcal{W}_r (2\hat{F}_r\hat{\rho}\hat{F}_r^\dagger - \hat{\rho}\hat{F}_r^\dagger\hat{F}_r - \hat{F}_r^\dagger\hat{F}_r\hat{\rho})} \quad (\text{III.3.1a})$$

oder

$$(\hat{\mathcal{L}}_{\text{inc}}\hat{\rho})_r = \frac{1}{2} \mathcal{W}_r (\hat{F}_r\hat{\rho}\hat{F}_r^\dagger - \hat{F}_r^\dagger\hat{F}_r\hat{\rho} + \text{h. c.}) \quad (\text{III.3.1b})$$

Die Operatoren \hat{F}_r sind bezüglich der Eigenbasis eines n -Niveau-Systems definiert.

III.3.1 Dephasierung

Definiere für $n = 2$:

$$\boxed{\hat{F} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{P}_{22} - \hat{P}_{11}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{\lambda}_z \quad \mathcal{W} \equiv \frac{1}{\tau}} \quad (\text{III.3.2})$$

Eigenschaften: \hat{F} ist hermitesch und unitär.

$$\hat{F}^\dagger = \hat{F} \quad \hat{F}^\dagger\hat{F} = \frac{1}{2} \hat{1}$$

$$\text{Spur}\{\hat{F}^\dagger\hat{F}\} = 1 \quad \text{Spur}\{\hat{F}\} = 0$$

Der inkohärente Teil wird zu

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{L}}_{\text{inc}}\hat{\rho} &= \frac{1}{2\tau} (2\hat{F}\hat{\rho}\hat{F}^\dagger - \hat{\rho}) \\ &= \frac{1}{2\tau} (\hat{P}_{22}\hat{\rho}\hat{P}_{22} + \hat{P}_{11}\hat{\rho}\hat{P}_{11} - \hat{P}_{11}\hat{\rho}\hat{P}_{22} - \hat{P}_{22}\hat{\rho}\hat{P}_{11}) \\ \implies \boxed{\hat{\mathcal{L}}_{\text{inc}}\hat{\rho} = -\frac{1}{\tau} (\hat{P}_{22}\hat{\rho}\hat{P}_{11} + \hat{P}_{11}\hat{\rho}\hat{P}_{22})} \end{aligned} \quad (\text{III.3.3})$$

Matrixdarstellung:

$$(\hat{\mathcal{L}}_{\text{inc}}\hat{\rho})_{12} = -\frac{1}{\tau} \rho_{12} \quad (\text{III.3.4})$$

$$(\hat{\mathcal{L}}_{\text{inc}}\hat{\rho})_{21} = -\frac{1}{\tau} \rho_{21} \quad (\text{III.3.5})$$

$$(\hat{\mathcal{L}}_{\text{inc}}\hat{\rho})_{11} = (\hat{\mathcal{L}}_{\text{inc}}\hat{\rho})_{22} = 0$$

$\hat{\mathcal{L}}_{\text{inc}}$ hat also keinen Einfluss auf die Besetzungszahlen! Für $n = 2$ gibt es nur einen Dephasierungskanal.

III Offene Systeme

Für $n = 3$: Sei

$$\hat{F}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{2\pi i/3} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2\pi i/3} \end{pmatrix} \quad \hat{F}_1^\dagger = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2\pi i/3} & 0 \\ 0 & 0 & e^{2\pi i/3} \end{pmatrix} \quad (\text{III.3.6})$$

Eigenschaften: \hat{F}_1 ist unitär,

$$\hat{F}_1 \hat{F}_1^\dagger = \frac{1}{3} \quad \text{Spur}\{\hat{F}_1 \hat{F}_1^\dagger\} = 1 \quad \text{Spur}\{\hat{F}_1\} = 0$$

In diesem Fall erhält man

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{L}}_{\text{inc}} \hat{\rho} &= \frac{1}{2\tau} \left(2\hat{F}_1 \hat{\rho} \hat{F}_1^\dagger - \frac{2}{3} \hat{\rho} \right) \\ &= \frac{1}{3\tau} \left[(\hat{P}_{11} + e^{2\pi i/3} \hat{P}_{22} + e^{-2\pi i/3} \hat{P}_{33}) \hat{\rho} (\hat{P}_{11} + e^{-2\pi i/3} \hat{P}_{22} + e^{2\pi i/3} \hat{P}_{33}) - \hat{\rho} \right] \end{aligned}$$

Mit

$$\frac{1}{\tau_{\pm}} = \frac{1}{3\tau} (1 - e^{\pm 2\pi i/3}) \quad (\text{III.3.7})$$

wird schließlich

$$\hat{\mathcal{L}}_{\text{inc}} \hat{\rho} = -\frac{1}{\tau_+} \hat{P}_{22} \hat{\rho} \hat{P}_{11} - \frac{1}{\tau_-} \hat{P}_{11} \hat{\rho} \hat{P}_{22} - \frac{1}{\tau_+} \hat{P}_{11} \hat{\rho} \hat{P}_{33} - \frac{1}{\tau_-} \hat{P}_{33} \hat{\rho} \hat{P}_{11} - \frac{1}{\tau_+} \hat{P}_{33} \hat{\rho} \hat{P}_{22} - \frac{1}{\tau_-} \hat{P}_{11} \hat{\rho} \hat{P}_{33} \quad (\text{III.3.8})$$

$$\text{Re} \frac{1}{\tau_{\pm}} = \frac{1}{\tau_3} \left(1 - \cos \frac{2\pi}{3} \right) = \frac{1}{2\tau} \quad (\text{III.3.9})$$

$$\left(\hat{\mathcal{L}}_{\text{inc}} \hat{\rho} \right)_{ij} = \frac{1}{2\tau} \hat{\rho}_{ij} \quad i \neq j \quad (\text{III.3.10})$$

Wiederum besteht kein Einfluss auf die Besetzungszahlen! Die Nicht-Diagonalelemente werden alle in gleicher Weise weggedämpft. Der Imaginärteil von $\frac{1}{\tau_{\pm}}$ kann mit dem Frequenzterm zu einer effektiven Frequenz kombiniert werden. Der zweite unitäre Operator ist

$$\hat{F} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{2\pi i/3} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2\pi i/3} \end{pmatrix} \quad (\text{III.3.11})$$

Zusammen mit dem \hat{I} -Operator lassen sich damit auch „selektive“ Operatoren erzeugen, z. B.

$$\hat{F}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{III.3.12})$$

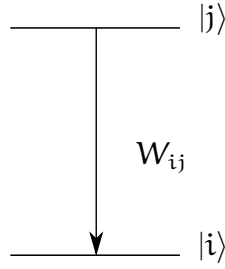


Abbildung III.3: Selektiver Übergangskanal

III.3.2 Selektiver Übergangskanal

Der einfache Index r wird hier zu einem Doppelindex $r \leftrightarrow \{i, j\}$

$$\boxed{\hat{F}_r = \hat{P}_{ij}} \quad \hat{F}_r^\dagger = \hat{P}_{ji} \quad (\text{III.3.13})$$

$$\hat{F}_r^\dagger \hat{F}_r = \hat{P}_{ji} \hat{P}_{ij} = \hat{P}_{jj} \quad (\text{III.3.14})$$

$$\text{Spur} \{ \hat{P}_{ji} \hat{P}_{kl}^\dagger \} = \text{Spur} \{ \hat{P}_{ji} \hat{P}_{lk} \} = \delta_{jl} \delta_{ik}$$

$$\boxed{\hat{\mathcal{L}}_{\text{inc}} \hat{\rho} = \frac{1}{2} W_{ij} (2 \hat{P}_{ij} \hat{\rho} \hat{P}_{ji} - \hat{\rho} \hat{P}_{jj} - \hat{P}_{jj} \hat{\rho})} \quad (\text{III.3.15})$$

Matrixdarstellung: ($m \neq i, n \neq j$)

$$\begin{aligned} (\hat{\mathcal{L}}_{\text{inc}} \hat{\rho})_{mn} &= (\hat{\mathcal{L}}_{\text{inc}} \hat{\rho})_{nm} & (\hat{\mathcal{L}}_{\text{inc}} \hat{\rho})_{ii} &= W_{ij} \rho_{jj} \\ (\hat{\mathcal{L}}_{\text{inc}} \hat{\rho})_{in} &= -\frac{1}{2} W_{ij} \rho_{in} & (\hat{\mathcal{L}}_{\text{inc}} \hat{\rho})_{jj} &= -W_{ij} \rho_{jj} \\ (\hat{\mathcal{L}}_{\text{inc}} \hat{\rho})_{mj} &= -\frac{1}{2} W_{ij} \rho_{mj} & (\hat{\mathcal{L}}_{\text{inc}} \hat{\rho})_{mn} &= 0 \quad (m \neq i; n \neq j) \end{aligned} \quad (\text{III.3.16})$$

Nicht-adiabatische Dämpfung von Diagonal und Nicht-Diagonalelementen. Es gilt (vgl. (III.2.18)):

$$\text{Spur} \{ \hat{\mathcal{L}}_{\text{inc}} \} = \frac{1}{2} W_{ij} (2 \rho_{jj} - \rho_{jj} - \rho_{jj}) = 0 \quad \checkmark$$

III.3.3 Nicht-selektive Übergangskanäle

Bisher wurde angenommen, dass die Kanäle unabhängig sind, d. h. die Parametermatrix diagonal ist bezüglich der gewählten Umgebungsoperatoren \hat{F} . Dann gilt es nur, die Raten phänomenologisch festzulegen. Es ist allgemein schwierig, Werte für eine nicht-diagonale Matrix \mathcal{A} einzuführen.

Sei für den Übergang nach Abb. III.4 (Grafik links)

$$|\psi\rangle = \cos \alpha |2\rangle + \sin \alpha |3\rangle \quad (\text{III.3.17})$$

$$\hat{F} = |1\rangle \langle \psi| = \cos \alpha \hat{P}_{12} + \sin \alpha \hat{P}_{13} \quad (\text{III.3.18})$$

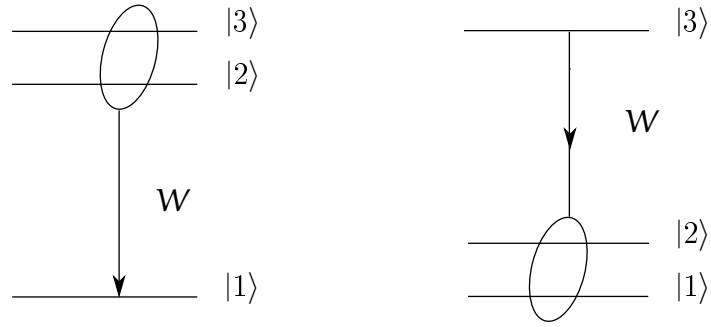


Abbildung III.4: Nicht-selektive Übergangskanäle

Einzelner Kanal

$$\text{Spur}\{\hat{F}\} = 0$$

Schreibe analog zu (III.2.25):

$$\hat{F} = \mathbf{u}_a \hat{G}_a + \mathbf{u}_b \hat{G}_b \quad (\text{III.3.19})$$

$$\hat{G}_a = \hat{P}_{12} \quad \hat{G}_b = \hat{P}_{13} \quad (\text{III.3.20})$$

$$\mathbf{u}_a = \cos \alpha \quad \mathbf{u}_b = \sin \alpha \quad (\text{III.3.21})$$

War die Parametermatrix bzgl. \hat{F} diagonal ($= W$), so ist sie bzgl. \hat{G}_a, \hat{G}_b nicht-diagonal, man hat zwei gekoppelte Kanäle (vgl. Abb. III.4 links). Nach (III.2.26) ist

$$\boxed{\gamma_{ab} = \mathbf{u}_a W \mathbf{u}_b} \quad (\text{III.3.22})$$

Es entstehen also Kreuzterme. Diese sind hier reell und haben daher nicht die Bedeutung von Raten. Zur formal gleichen Matrix führt der Übergang nach Abb. III.4 (Grafik rechts). Hier ist

$$|\varphi\rangle = \cos \alpha |2\rangle + \sin \alpha |3\rangle \quad (\text{III.3.23})$$

$$\hat{F} = |\varphi\rangle\langle 3| = \mathbf{u}_a \hat{G}_a + \mathbf{u}_b \hat{G}_b$$

$$\hat{G}_a = \hat{P}_{13} \quad \hat{G}_b = \hat{P}_{23} \quad (\text{III.3.24})$$

Wiederum zwei gekoppelte Kanäle (vgl. Abb. III.4 rechts):

$$\gamma_{ab} = \mathbf{u}_a W \mathbf{u}_b \quad (\text{III.3.25})$$

Dynamisch wirken sich beide Szenarien jedoch unterschiedlich aus: Vgl. Kapitel III.8.

III.3.4 Übergangskanäle beim Harmonischen Oszillator

Literatur: Louisell, Quantum statistic properties of radiation

$$\begin{aligned} \hat{F}_1 &= \hat{a}^\dagger & \text{Rate } k_\downarrow \\ \hat{F}_2 &= \hat{a} & \text{Rate } k_\uparrow \end{aligned} \quad (\text{III.3.26})$$

$$\hat{\mathcal{L}}_{\text{inc}}\hat{\rho} = k_{\downarrow} (2\hat{a}^{\dagger}\hat{\rho}\hat{a} - \hat{\rho}\hat{a}\hat{a}^{\dagger} - \hat{a}\hat{a}^{\dagger}\hat{\rho}) + k_{\uparrow} (2\hat{a}\hat{\rho}\hat{a}^{\dagger} - \hat{\rho}\hat{a}^{\dagger}\hat{a} - \hat{a}^{\dagger}\hat{a}\hat{\rho}) \quad (\text{III.3.27})$$

Verhältnis der Raten:

$$\frac{k_{\uparrow}}{k_{\downarrow}} = e^{-\hbar\omega/k_{\text{B}}T} \quad (\text{III.3.28})$$

III.3.5 Caldeira-Legett-Modell

Literatur:

Caldeira, Leggett, Physica **121 A**, 587 (1983) (Pfadintegralmethode)

Breuer et al, The theory of open quantum systems, S. 172

Mikroskopische Herleitung einer Mastergleichung: Das System sei ein Brownsches Teilchen,

$$\hat{H}_{\text{S}} = \frac{1}{2} m\hat{p}^2 + V(\hat{x}) \quad (\text{III.3.29})$$

und das Bad bestehe aus Oszillatoren:

$$\hat{H}_{\text{B}} = \sum_{\text{n}} \left(\frac{\hat{p}_{\text{n}}^2}{2m_{\text{n}}} + \frac{1}{2} m_{\text{n}}\omega_{\text{n}}^2 \hat{x}_{\text{n}}^2 \right) \quad (\text{III.3.30})$$

Kopplung :

$$\hat{H}_{\text{I}} = -\hat{x} \sum_{\text{n}} g_{\text{n}}\hat{x}_{\text{n}} \quad (\text{III.3.31})$$

Spektrale Dichte (Ohmsches Modell, phänomenologisch):

$$J(\omega) \sum_{\text{n}} \frac{g_{\text{n}}^2}{2m_{\text{n}}\omega_{\text{n}}} \longrightarrow \frac{2mW}{\pi} \frac{\omega\Omega^2}{\Omega^2 + \omega^2} \quad (\text{III.3.32})$$

Es ergibt sich (vgl. Breuer):

$$\frac{d}{dt}\hat{\rho}_{\text{S}} = -\frac{i}{\hbar} [\hat{H}_{\text{eff}}, \hat{\rho}_{\text{S}}] + \hat{\mathcal{L}}_{\text{inc}}\hat{\rho} \quad (\text{III.3.33})$$

$$\hat{G}_{\text{a}} = \hat{x} \quad \hat{G}_{\text{b}} = \hat{p} \quad (\text{III.3.34})$$

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 4mWk_{\text{B}}T/\hbar^2 & -iW/\hbar \\ iW/\hbar & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{III.3.35})$$

Offensichtlich ist \mathcal{A} wegen $\det \mathcal{A} = -(W/\hbar)^2 < 0$ nicht positiv definit! Addiere deshalb den Korrekturterm

$$\mathcal{A}_{\text{bb}} \equiv \frac{W}{4mk_{\text{B}}T} \implies \mathcal{A}_{\text{ab}} = \mathbf{u}_{\text{a}} W \mathbf{u}_{\text{b}}^* \quad (\text{III.3.36})$$

wobei

$$\mathbf{u}_a = \sqrt{4mk_B\bar{T}/\hbar} \quad \mathbf{u}_b = i/\sqrt{4mk_B\bar{T}}$$

Diagonalisiere danach \mathcal{A} ! Man erhält einen einzelnen Kanal mit Dämpfungskonstante W und

$$\hat{\mathbf{F}} = \mathbf{u}_a \hat{\mathbf{x}} + \mathbf{u}_b \hat{\mathbf{p}} \quad (\text{III.3.37a})$$

Vgl. für einen Oszillator:

$$\hat{\mathbf{b}} = (m\omega_0/2\hbar)^{1/2} \hat{\mathbf{x}} + i(2m\hbar\omega_0)^{-1/2} \hat{\mathbf{p}} \quad (\text{III.3.37b})$$

Anmerkungen:

- a. Der axiomatische Zugang zur Dämpfung erlaubt keine Bestimmung der Parametermatrix \mathcal{A} . Damit ist auch nicht bekannt, bzgl. welchem Satz von Umgebungsoperatoren sie diagonal sein sollte.
- b. Übliche Annahme: die Übergänge sind unabhängig in der Eigenbasis zu \hat{H} . Gegenbeispiel: Quantenschwebungen, Kapitel III.8.
- c. Es gibt maximal $n^2 - 1$ unabhängige Parameter für diagonales \mathcal{A} . Die Diagonalelemente sind Raten.
- d. Dephasierungsmodelle enthalten nur Projektoren, Übergangskanäle nur Übergangsoperatoren.
- e. Es gibt $n - 1$ unabhängige Dephasierungsmodelle.
- f. Die mikroskopische Herleitung nach Caldeira-Legett enthält etliche Näherungen. Sie kann nur durch eine ad-hoc-Korrektur auf Lindblad-Form gebracht werden!
- g. Bei Caldeira-Legett ist $\hat{\mathbf{F}}$ *nicht* allein eine Eigenschaft des Systems, sondern hängt auch von der Badtemperatur ab!
(Caldeira-Legett zitiert *nicht* Lindblad, obwohl später veröffentlicht!)

III.4 Einsteinsches Ratengleichungsmodell

Wie entsteht ein Strahlungsgleichgewicht?

III.4.1 Modell

Ein System von Zwei-Niveau-Atomen ist angekoppelt an die Strahlungsmoden eines Hohlraums. Das Atom wird als offenes System behandelt.

Dynamik: inkohärenter Grenzfall

$$\hat{\mathcal{L}}_{\text{coh}}\hat{\rho} \equiv 0 \quad (\text{III.4.1})$$

Sei von Anfang an:

$$\rho_{mn} = \rho_{mm}\delta_{mn} \quad (\text{III.4.2})$$

Was ist $\hat{\mathcal{L}}_{\text{inc}}\hat{\rho}$? In diesem Fall spielen Dekohärenzkanäle keine Rolle. Für selektive Übergangskanäle im Atom, $|i\rangle \rightarrow |j\rangle$ gilt (vgl. (III.3.16)):

$$\begin{aligned} (\hat{\mathcal{L}}_{\text{inc}}\hat{\rho})_{ii} &= W_{ij}\rho_{jj} \\ (\hat{\mathcal{L}}_{\text{inc}}\hat{\rho})_{jj} &= -W_{ij}\rho_{jj} \end{aligned} \quad (\text{III.4.3})$$

$$\boxed{\frac{d\rho_{ii}}{dt} = -\frac{d\rho_{jj}}{dt} = -W_{ij}\rho_{jj}} \quad i, j = 1, 2 \quad (\text{III.4.4})$$

$$\rho_{11} + \rho_{22} = 1 \quad (\text{III.4.5})$$

Mit (III.4.4) folgen die Übergangsraten nach Einstein (siehe Abb. III.5):

$$\boxed{\frac{d\rho_{11}}{dt} = -\frac{d\rho_{22}}{dt} = \rho_{22}A_{12} - \rho_{11}W_{21} + \rho_{22}W_{12}} \quad (\text{III.4.6})$$

Annahme für die induzierten Raten:

$$\boxed{W_{12} = \epsilon(\omega)B_{12}} \quad (\text{III.4.7a})$$

$$\boxed{W_{21} = \epsilon(\omega)B_{21}} \quad (\text{III.4.7b})$$

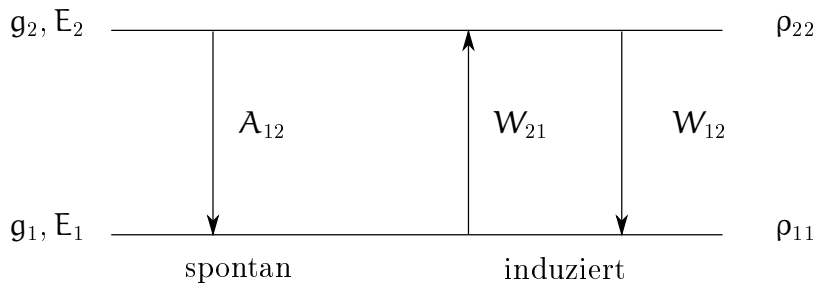


Abbildung III.5: Übergangsraten nach Einstein

III Offene Systeme

g_1, g_2 sind die Entartungsgrade, $\epsilon(\omega)$ ist die Energiedichte der Strahlung bei Frequenz ω , und A_{12}, B_{12}, B_{21} sind die Einstein-Koeffizienten. Stationarität:

$$\frac{d}{dt} \dots = 0$$

Mit (III.4.6) folgt daraus

$$\epsilon(\omega) (\rho_{11} B_{21} - \rho_{22} B_{12}) = \rho_{22} A_{12} \quad (\text{III.4.8})$$

$$\epsilon(\omega) = A_{12} / \left(\frac{\rho_{11}}{\rho_{22}} B_{21} - B_{12} \right) \quad (\text{III.4.9})$$

Das Atom sei durch Wechselwirkung mit anderen Atomen im thermischen Gleichgewicht:

$$\frac{\rho_{11}}{\rho_{22}} = \frac{g_1 e^{-E_1/k_B T}}{g_2 e^{-E_2/k_B T}} = \frac{g_1}{g_2} e^{\hbar\omega/k_B T} \quad (\text{III.4.10})$$

unter Verwendung der Beziehung (Resonanz)

$$E_2 - E_1 = \hbar\omega \quad (\text{III.4.11})$$

Setze (III.4.10) und (III.4.11) ein in (III.4.9):

$$\boxed{\epsilon(\omega) = A_{12} / \left(\frac{\rho_{11}}{\rho_{22}} e^{\hbar\omega/k_B T} B_{21} - B_{12} \right)} \quad (\text{III.4.12})$$

Diese Strahlungsdichte sollte sich im Gleichgewicht einstellen. Allerdings sind die Raten unbekannt! Trick: Betrachte das Problem von der Photonen-Seite, siehe dazu den nächsten Abschnitt III.4.2.

III.4.2 Vergleich mit Planck-Strahlungsgesetz

Plancksche Strahlungsformel:

$$\epsilon(\omega) = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3} \frac{1}{\exp(\hbar\omega/k_B T) - 1} = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3} \bar{n} \quad (\text{III.4.13})$$

Mit (III.4.12) erhält man Relationen zwischen den Einstein-Koeffizienten im Fall des schwarzen Körpers

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{g_1}{g_2} b_{21} &= B_{12} \\ \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3} B_{12} &= A_{12} \end{aligned}} \quad (\text{III.4.14})$$

Daraus folgt, mit (III.4.13) und (III.4.14):

$$B_{12} \epsilon(\omega) = A_{12} \bar{n} \quad (\text{III.4.15})$$

d. h. (thermisch) stimulierte Emissionsrate entspricht der spontanen Rate mal der mittleren Besetzungszahl der Moden mit der Übergangsfrequenz ω .

Zusammenhang zwischen Photonverteilung ρ_{nm} und Atombesetzungszahlen N_1, N_2 :
Definiere

$$B_T \equiv e^{-\hbar\omega/k_B T};$$

Dann, mit (III.4.13),

$$\begin{aligned} \bar{n} &= \frac{B_T}{1 - B_T} \implies B_T = \frac{\bar{n}}{1 + \bar{n}} \\ 1 - B_T &= \frac{1}{1 + \bar{n}} \end{aligned} \quad (\text{III.4.16})$$

Zustandssumme:

$$Z = \sum_n B_T^n = \frac{1}{1 - B_T}$$

Aus (III.4.10) und (III.4.16):

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{g_1}{g_2} \frac{1}{B_T} = \frac{g_1}{g_2} \frac{1 + \bar{n}}{\bar{n}}$$

$$\boxed{\bar{n} = g_1 N_2 (g_2 N_1 - g_1 N_2)^{-1}} \quad (\text{III.4.17})$$

$$W_n = \left(\frac{g_1 N_2}{g_2 N_1} \right)^n \left(1 - \frac{g_1 N_2}{g_2 N_1} \right) \quad (\text{III.4.18})$$

Voraussetzung dafür ist thermisches Gleichgewicht; es wurde (III.4.13) benutzt. Eine entsprechende Analyse ist für jeden Frequenzbereich erforderlich!

III.5 Gedämpfte Bloch-Gleichungen

III.5.1 Dämpfungsmodell

Hier ist $n = 2 \longrightarrow n^2 - 1 = 3$ unabhängige Kanäle

$$\hat{F}_1 = \hat{P}_{12} = \frac{1}{2} (\hat{\lambda}_x - i\hat{\lambda}_y) \quad (\text{III.5.1a})$$

$$\hat{F}_2 = \hat{P}_{21} = \frac{1}{2} (\hat{\lambda}_x + i\hat{\lambda}_y) \quad (\text{III.5.1b})$$

$$\hat{F}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{P}_{22} - \hat{P}_{11}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{\lambda}_z \quad (\text{III.5.1c})$$

Mit (III.3.15)

$$\hat{\mathcal{L}}_{\text{inc}} \hat{\rho} = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^3 W_r (2\hat{F}_r \hat{\rho} \hat{F}_r^\dagger - \hat{\rho} \hat{F}_r^\dagger \hat{F}_r - \hat{F}_r^\dagger \hat{F}_r \hat{\rho})$$

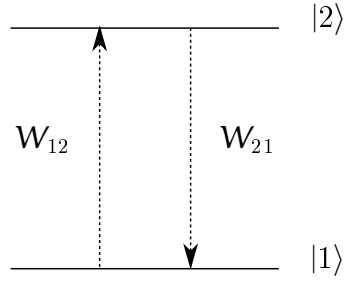


Abbildung III.6: Dämpfungsmodell für Zwei-Niveau-System

Matrixdarstellung nach (III.3.16), (III.3.4):

$$\begin{aligned}
 (\hat{\mathcal{L}}_{\text{inc}} \hat{\rho})_{11} &= W_{12} \rho_{22} - W_{21} \rho_{11} \\
 (\hat{\mathcal{L}}_{\text{inc}} \hat{\rho})_{22} &= W_{21} \rho_{11} - W_{12} \rho_{22} \\
 (\hat{\mathcal{L}}_{\text{inc}} \hat{\rho})_{12} &= -\frac{1}{2} \left(W_{12} + W_{21} + \frac{1}{\tau} \right) \rho_{12} \\
 (\hat{\mathcal{L}}_{\text{inc}} \hat{\rho})_{21} &= -\frac{1}{2} \left(W_{12} + W_{21} + \frac{1}{\tau} \right) \rho_{21}
 \end{aligned} \tag{III.5.2}$$

III.5.2 Bloch-Vektordarstellung

$$\begin{aligned}
 \hat{\lambda}_1 &= \hat{P}_{12} + \hat{P}_{21} & \lambda_1 &= \text{Spur}\{\hat{\rho} \hat{\lambda}_1\} = \rho_{21} + \rho_{12} \\
 \hat{\lambda}_2 &= i(\hat{P}_{12} - \hat{P}_{21}) & \lambda_2 &= \text{Spur}\{\hat{\rho} \hat{\lambda}_2\} = i(\rho_{21} - \rho_{12}) \\
 \hat{\lambda}_3 &= \hat{P}_{22} - \hat{P}_{11} & \lambda_3 &= \text{Spur}\{\hat{\rho} \hat{\lambda}_3\} = \rho_{22} - \rho_{11}
 \end{aligned} \tag{III.5.3}$$

$$\left(\frac{d}{dt} \rho_{ij} \right)_{\text{inc}} = (\hat{\mathcal{L}}_{\text{inc}} \hat{\rho})_{ij} \tag{III.5.4}$$

$$\begin{aligned}
 (\dot{\lambda}_1)_{\text{inc}} &= \dot{\rho}_{21} + \dot{\rho}_{12} & &= -\frac{1}{2} \left(W_{12} + W_{21} + \frac{2}{\tau} \right) \lambda_1 \\
 (\dot{\lambda}_2)_{\text{inc}} &= i(\dot{\rho}_{21} - \dot{\rho}_{12}) & &= -\frac{1}{2} \left(W_{12} + W_{21} + \frac{2}{\tau} \right) \lambda_2 \\
 (\dot{\lambda}_3)_{\text{inc}} &= \dot{\rho}_{22} - \dot{\rho}_{11} & &= -(W_{12} + W_{21}) \lambda_3 + (W_{21} - W_{12})
 \end{aligned} \tag{III.5.5}$$

Vektorgleichung

$$\boxed{(\dot{\lambda}_i)_{\text{inc}} = \sum_j \xi_{ij} \lambda_j + \eta_j} \tag{III.5.6}$$

mit

$$\xi_{11} = \xi_{22} = -\frac{1}{2} (W_{12} + W_{21}) + \frac{1}{2\tau} \equiv -\frac{1}{T_2} \quad (\text{III.5.7a})$$

$$\xi_{33} = -(W_{12} + W_{21}) \equiv -\frac{1}{T_1} \quad (\text{III.5.7b})$$

$$\longrightarrow \frac{2}{T_2} = \frac{1}{T_1} + \frac{1}{\tau} > \frac{1}{T_1} \quad (\text{III.5.8})$$

Es ist

$$\begin{aligned} \eta_1 &= \eta_2 = 0 \\ \eta_3 &= W_{21} - W_{12} \equiv \frac{\lambda_0}{T_1} \end{aligned} \quad (\text{III.5.9})$$

$$\lambda_0 = \frac{W_{21} - W_{12}}{W_{21} + W_{12}}$$

$$\xi = - \begin{pmatrix} \frac{1}{T_2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{T_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{T_1} \end{pmatrix} \quad \eta = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\lambda_0}{T_1} \end{pmatrix} \quad (\text{III.5.10})$$

III.5.3 Gesamte Bewegungsgleichung

$$\dot{\lambda}_i = \sum_{k=1}^3 \Omega_{ik} \lambda_k + \sum_{k=1}^3 \xi_{ik} \lambda_k + \eta_i \quad (\text{III.5.11})$$

Die erste Summe stellt den kohärenten Anteil dar, der Rest den inkohärenten Anteil.

Speziell: Getriebenes Zwei-Niveau-System unter Rotating Wave Approximation (RWA), semiklassisch. Eine Transformation auf ein rotierendes Bezugssystem lässt die Dämpfung invariant (ξ_{ij}, η_i) ; es ändert sich lediglich $\lambda_i \rightarrow \tilde{\lambda}_i$ (vgl. (II.6.10)). Nach (II.6.13) ist

$$\Omega_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & -\delta & 0 \\ \delta & 0 & -g_c \\ 0 & g_c & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{III.5.12})$$

und daher explizit (Schreibweise $\tilde{\lambda}_j \rightarrow \lambda_j$) mit (II.6.11):

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_1 &= -\delta \lambda_2 - \frac{1}{T_2} \lambda_1 \\ \dot{\lambda}_2 &= \delta \lambda_1 - g_c \lambda_3 - \frac{1}{T_2} \lambda_2 \\ \dot{\lambda}_3 &= g_c \lambda_2 - \frac{1}{T_1} \lambda_3 + \eta_3 \end{aligned} \quad (\text{III.5.13})$$

III.5.4 Stationäre Lösung

$$\dot{\lambda}_i = 0 \quad (\text{III.5.14})$$

$$\delta\lambda_2 = -\frac{1}{T_2}\lambda_1 \quad (\text{III.5.15})$$

$$-\delta\lambda_1 + g_c\lambda_3 = -\frac{1}{T_2}\lambda_2 \quad (\text{III.5.16})$$

$$g_c\lambda_2 = \frac{1}{T_1}(\lambda_3 - \lambda_0) \quad \frac{1}{T_1}\lambda_0 \equiv \eta_3 \quad (\text{III.5.17})$$

(III.5.17) eingesetzt in (III.5.16):

$$-\delta\lambda_1 + g_c\lambda_3 = \frac{1}{g_c T_1 T_2}(\lambda_3 - \lambda_0) \quad (\text{III.5.18})$$

(III.5.17) eingesetzt in (III.5.15):

$$\frac{\lambda_1}{T_2} = -\delta \frac{\lambda_3 - \lambda_0}{g_c T_1} \quad (\text{III.5.19})$$

(III.5.19) in (III.5.18) (eliminiere λ_1):

$$\frac{g_c\lambda_3}{\delta T_2} + \frac{\lambda_3 - \lambda_0}{\delta g_c T_1 T_2} = \delta \frac{\lambda_3 - \lambda_0}{\delta g_c T_1} \quad (\text{III.5.20})$$

Nach einigen Umformungen erhält man letztendlich

$$\boxed{\lambda_3 = \left(\delta^2 + \frac{1}{T_2^2} \right) L(\delta)} \quad (\text{III.5.21})$$

Der Ausdruck $L(\delta)$ stellt eine **Lorentz-Kurve** dar:

$$L(\delta) \equiv \frac{\lambda_0}{\delta^2 + \frac{1}{T_2^2} + g_c^2 \frac{T_1}{T_2}} \quad (\text{III.5.22})$$

mit der effektiven Breite $\gamma^2 = \frac{1}{T_2^2} + g_c^2 \frac{T_1}{T_2}$ und $\delta = \omega_0 - \omega$.

$$\lambda_3 - \lambda_0 = -L(\delta) g_c^2 \frac{1}{T_2} \quad (\text{III.5.23})$$

Dies eingesetzt in (III.5.19) und (III.5.17) ergibt

$$\boxed{\begin{aligned} \lambda_1 &= \delta g_c L(\delta) \\ \lambda_2 &= -\frac{g_c}{T_2} L(\delta) \end{aligned}} \quad (\text{III.5.24})$$

III.5.5 Freier Induktionszerfall

Sei nun $\mathbf{g}_c = 0$, es wird jedoch weiterhin im rotierenden Bezugssystem gerechnet. Mit (III.5.13):

$$\dot{\lambda}_3 + \frac{\lambda_3 - \lambda_0}{T_1} = 0$$

daraus folgt

$$\boxed{\lambda_3(t) - \lambda_0 = (\lambda_3(t_0) - \lambda_0) e^{-(t-t_1)/T_1}} \quad (\text{III.5.25})$$

Weiterhin ist

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_1 + \delta\lambda_2 &= -\frac{\lambda_1}{T_2} \\ \dot{\lambda}_2 - \delta\lambda_1 &= -\frac{\lambda_2}{T_2} \\ \ddot{\lambda}_1 + \delta\lambda_2 + \frac{\dot{\lambda}_1}{T_2} &= 0 \end{aligned}$$

Man kommt auf die Gleichungen zweier gekoppelter Oszillatoren:

$$\begin{aligned} \ddot{\lambda}_1 + \frac{\dot{\lambda}_1}{T_2} + \delta^2\lambda_1 &= \frac{\lambda_2\delta}{T_2} \\ \ddot{\lambda}_2 + \frac{\dot{\lambda}_2}{T_2} + \delta^2\lambda_2 &= -\frac{\lambda_1\delta}{T_2} \end{aligned}$$

Lösung für die Anfangsbedingung $\lambda_1(t_1) = \mathbf{u}$ $\lambda_2(t_1) = \mathbf{v}$

$$\boxed{\begin{aligned} \lambda_1(t) &= (\mathbf{u} \cos \delta(t - t_1) - \mathbf{v} \sin \delta(t - t_1)) e^{-(t-t_1)/T_2} \\ \lambda_2(t) &= (\mathbf{u} \sin \delta(t - t_1) - \mathbf{v} \cos \delta(t - t_1)) e^{-(t-t_1)/T_2} \end{aligned}} \quad (\text{III.5.26})$$

Für $t \rightarrow \infty$ ist $\lambda_3(\infty) = \lambda_0$ und $\lambda_1(\infty) = \lambda_2(\infty) = 0$, d. h. es existiert ein Attraktor.

III.6 Kollektive spontane Emission: Superstrahlung

Literatur:

Dicke, Phys. Rev. **93**, 99 (1954)

Y. Yamamoto et al, Mesoscopic Quantum Optics, S. 122 ff.

Vgl. auch Kapitel II.1.

III.6.1 Kollektives Jaynes-Cummings-Modell

Betrachte N nicht wechselwirkende Zwei-Niveau-Atome, gekoppelt an ein Ein-Moden-Lichtfeld in RWA. Für die Ausdehnung des atomaren Systems gelte $d < \lambda$, d. h. kleiner als die Wellenlänge des Lichts. Die Hamiltonians sind:

$$\hat{H} = \hat{H}_A + \hat{H}_F + \hat{H}_{AF} \quad (\text{III.6.1})$$

$$\hat{H}_A = \sum_{\mu=1}^N \frac{1}{2} \Delta E \hat{\sigma}_z(\mu) \quad \hat{H}_F = \hbar \omega \hat{q}^\dagger \hat{q} \quad (\text{III.6.2})$$

$$(II.2.6): \quad \hat{H}_{AF} = \hbar g^* \sum_{\mu=1}^N \hat{\sigma}^-(\mu) \hat{q}^\dagger + \hbar g \sum_{\mu=1}^N \hat{\sigma}^+(\mu) \hat{q} \quad (\text{III.6.3})$$

Die Parameter ΔE , g hängen nicht von μ ab, da Atome bzgl. Licht ununterscheidbar sind! Es gibt auch keine räumliche Auflösung. g ist der Kopplungsparameter. Permutationssymmetrische Kollektiv-Operatoren:

$$\hat{S}_z = \sum_{\mu=1}^N \hat{\sigma}_z(\mu) \quad (\text{III.6.4})$$

$$\hat{S}^+ = \sum_{\mu=1}^N \hat{\sigma}^+(\mu) \quad \hat{S}^- = \sum_{\mu=1}^N \hat{\sigma}^-(\mu) \quad (\text{III.6.5})$$

Mit (III.6.1) bis (III.6.3) erhält man

$$\boxed{\hat{H} = \frac{1}{2} \Delta E \hat{S}_z + \hbar \omega \hat{q}^\dagger \hat{q} + \hbar g^* \hat{S}^- \hat{q}^\dagger + \hbar g \hat{S}^+ \hat{q}} \quad (\text{III.6.6})$$

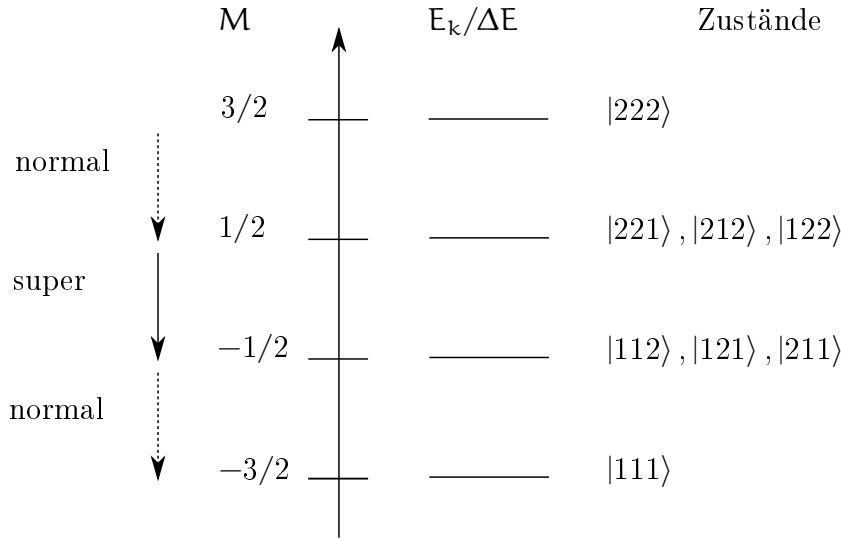
III.6.2 Eigenwertproblem zu \hat{H}_A

2^N Zustände:

$$|11 \dots 1\rangle, |11 \dots 2\rangle, \dots, |22 \dots 2\rangle \quad (\text{III.6.7})$$

k -Konfiguration: Zustand mit k Einsen, $k = 0, 1, \dots, N$. Zugehörige Energie:

$$E_k = \frac{1}{2} \Delta E (N - 2k) \quad (\text{III.6.8})$$


 Abbildung III.7: Produktzustände für $N = 3$, $k = 0, 1, 2, 3$

Entartungsgrad (vgl. Abb. III.7):

$$\eta_k = \binom{N}{k} \quad \sum_{k=0}^N \binom{N}{k} = 2^N \quad (\text{III.6.9})$$

III.6.3 Permutationssymmetrie

(bezüglich des Teilchenindex, Permutationen im Zustandsraum)

Alle Operatoren in \hat{H} sind permutationssymmetrisch, ebenso der Grundzustand $|11 \dots 1\rangle$. Es gibt somit eine Auswahlregel, nach der nur der permutationssymmetrische Unterraum erreichbar ist. Es existieren genau $N + 1$ total symmetrische Zustände („Bose-Typ“). Permutationssymmetrische Zustände für $N = 3$ sind:

$$|222\rangle, \frac{1}{\sqrt{3}} [|221\rangle + |212\rangle + |122\rangle], \frac{1}{\sqrt{3}} [|112\rangle + |121\rangle + |211\rangle], |111\rangle$$

Bezeichnungen „normal“ und „super“: siehe III.6.4.

Drehimpuls-Eigenzustände zu \hat{S}_z mit $S = N/2$ (Dicke-Zustände):

$$\boxed{\hat{S}_z |S, M\rangle = M |S, M\rangle \quad M = -\frac{N}{2}, \dots, \frac{N}{2}} \quad (\text{III.6.10})$$

$$\hat{S}^- |S, M\rangle \equiv \gamma |S, M-1\rangle \quad (\text{III.6.11})$$

$$\langle S, M | \hat{S}^+ \equiv \gamma^* \langle S, M-1 | \quad (\text{III.6.12})$$

$$\implies \langle S, M | \hat{S}^+ \hat{S}^- |S, M\rangle = |\gamma|^2 \quad (\text{III.6.13})$$

$$\hat{S}^+ \hat{S}^- = (\hat{S}_x + i\hat{S}_y)(\hat{S}_x - i\hat{S}_y) = \hat{S}_x^2 + \hat{S}_y^2 - i[\hat{S}_x, \hat{S}_y] \quad (\text{III.6.14})$$

$$\implies \hat{S}^+ \hat{S}^- = \hat{S}^2 - \hat{S}_z^2 + \hat{S}_z \quad (\text{III.6.15})$$

Mit (III.6.10), (III.6.12) und (III.6.15) folgt

$$|\gamma|^2 = S(S+1) - M(M-1) \quad (\text{III.6.16})$$

III.6.4 Kollektive spontane Emission

Fermis Goldene Regel, inkohärente Dynamik!

Prozess (i = initial, f = final):

$$|i\rangle = |S, M\rangle \otimes |0\rangle \longrightarrow |S, M-1\rangle \otimes |1\rangle = |f\rangle \quad (\text{III.6.17})$$

Mit (III.6.6):

$$w_{fi} \sim |\langle S, M-1 | \hbar g^* \hat{S}^- | S, M-1 \rangle \underbrace{\langle 1 | \hat{b}^\dagger | 0 \rangle}_{=1}|^2 \quad (\text{III.6.18})$$

$$\implies \boxed{w_{fi} \sim \hbar^2 |g|^2 (S(S+1) - M(M+1))} \quad (\text{III.6.19})$$

mit $S = N/2$ fest. Wann ist w_{fi} maximal?

$$\frac{d}{dM} w_{fi} \sim 2M + 1 \stackrel{!}{=} 0 \quad (\text{III.6.20})$$

$$\begin{aligned} N \text{ ungerade: } & M = 1/2 && \text{Ausgangszustand} \\ N \text{ gerade: } & M = 0, 1 \end{aligned} \quad (\text{III.6.21})$$

- N ungerade, $M = 1/2$:

$$\boxed{w_{fi} \sim \frac{1}{4} \hbar^2 |g|^2 (N+1)^2} \quad (\text{III.6.22})$$

Superradianz durch konstruktive Interferenz

- $M = N/2$ (max), N Atome angeregt:

$$w_{fi} \sim \hbar^2 |g|^2 N \quad (\text{III.6.23})$$

Inkohärente Überlagerung („normale“ Übergänge)

- $M = 1 - N/2$, nur ein Atom angeregt:

$$w_{fi} \sim \hbar^2 |g|^2 N$$

Wie bei maximaler Anregung!

Bemerkungen:

- Ein reiner Ratenprozess kann zwischen verschränkten Zuständen ablaufen! Ununterscheidbarkeit als Ursache.
- Die Übergangsrate bei Superradianz ist proportional zu N^2
(Übergang $M = 1/2 \rightarrow M = -1/2$). Der maximal angeregte Zustand $M = N/2$ zerfällt nur proportional zu N , der minimal angeregte Zustand $M = 1 - N/2$ ebenso! Kollektive Verstärkung der Kopplung, Umverteilung der Raten.
- Die kollektive Rabi-Frequenz ($\delta = 0$) ist um den Faktor \sqrt{N} vergrößert!
- Die maximale Intensität nach vollständiger Anregung wird erreicht nach einer Verzögerungszeit („delay time“) (Breuer).

III.6.5 Kollektive Gesamtübergangsrate ($n > 0$)

Literatur: Y. Yamamoto, A. Imamoglu, Mesoscopic quantum optics, S. 134

Prozess:

$$|i\rangle = |S, M\rangle \otimes |n\rangle \longrightarrow |S, M-1\rangle \otimes |n+1\rangle = |f\rangle$$

Dann ist

$$w_{fi} \sim \hbar^2 |g|^2 \left| \underbrace{\langle n+1 | \hat{q}^\dagger | n \rangle}_{=\sqrt{n+1}} \langle S, M-1 | \hat{S}^- | S, M \rangle \right|^2 - \hbar^2 |g|^2 \left| \underbrace{\langle n-1 | \hat{q} | n \rangle}_{=\sqrt{n}} \langle S, M+1 | \hat{S}^+ | S, M \rangle \right|^2 \quad (\text{III.6.24})$$

Wegen

$$\langle S, M-1 | \hat{S}^- | S, M \rangle^* = \langle S, M | \hat{S}^+ | S, M-1 \rangle = \gamma^*$$

ist

$$|\gamma|^2 = |\langle S, M-1 | \hat{S}^- | S, M \rangle|^2 = |\langle S, M | \hat{S}^+ | S, M-1 \rangle|^2 \quad (\text{III.6.25})$$

 Für $M \rightarrow M+1$ (notwendig für den zweiten Term in Gl. (III.6.24) ist mit (III.6.16):

$$|\langle S, M+1 | \hat{S}^+ | S, M \rangle|^2 = S(S+1) - M(M+1)$$

Damit wird aus (III.6.24):

$$w_{fi} \approx \hbar^2 |g|^2 \left[(S(S+1) - M(M-1)) - n (S(S+1) - M(M+1)) \right]$$

und

$$\boxed{w_{fi} = \underbrace{\hbar^2 |g|^2 (S(S+1) - M(M-1))}_{\text{spontane Rate}} + \underbrace{2\hbar^2 |g|^2 Mn}_{\text{stimulierte Rate}}} \quad (\text{III.6.26})$$

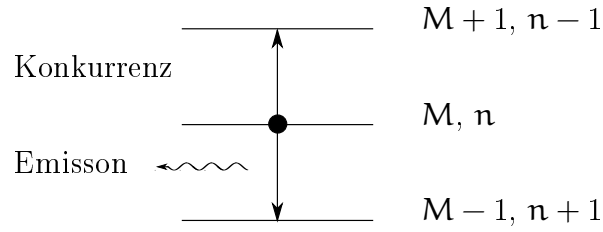


Abbildung III.8: Kollektive Gesamtübergangsrate

Die Einstein-Beziehung (III.4.15), nach der die stimulierte Rate n mal die spontane Rate ist, gilt hier offenbar nicht! Für $M = 0$ ist z.B. die stimulierte Rate gleich Null und die spontane Rate maximal!

Anmerkung zur Superradianz: (J. Javanainen, Nature **412**, 689 (2001))

Experimental realization unclear, as „equivalent field position“ requires atom positions smaller than λ (not fulfilled). Cooperativeness versus Bose statistics.

III.7 Resonanzfluoreszenz

Mit Treiber: Betrachte quantenmechanische „dressed states“ für $\delta = 0$ (Resonanz). Mit (II.2.15), (II.2.21) bzw. (II.2.30):

$$\Omega_R^{(n+1)} = g_q^{(n+1)} = 2g\sqrt{n+1} \quad (\text{III.7.1})$$

$$E_{\pm}^{(n+1)} = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega \pm \frac{1}{2} \hbar\Omega_R^{(n+1)} \quad (\text{III.7.2})$$

$$|\pm, n\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|2, n\rangle \pm |1, n+1\rangle] \quad (\text{III.7.3})$$

Näherung:

$$\bar{n} \gg 1 \quad \implies \quad \bar{n} + 1 \approx \bar{n}$$

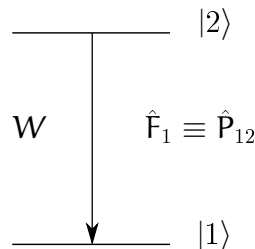


Abbildung III.9: Dämpfungsmodell in atomarer Eigenbasis

Dies führt zu der Faktorisierung

$$\begin{aligned}
 |\pm\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|2\rangle \pm |1\rangle) \\
 \implies |2\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|+\rangle + |-\rangle) \\
 |1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|+\rangle - |-\rangle)
 \end{aligned} \tag{III.7.4}$$

Ausgangspunkt: Dämpfungskanal in atomarer Eigenbasis gemäß Abb. III.9. Dazu gehört der folgende Lindblad-Operator (vgl. (III.3.15)):

$$\hat{\mathcal{L}}_{\text{inc}} \hat{\rho} = \frac{W}{2} (2\hat{P}_{12} \hat{\rho} \hat{P}_{21} - \hat{P}_{22} \hat{\rho} - \hat{\rho} \hat{P}_{22}) \tag{III.7.5}$$

Nach (III.3.16):

$$\begin{aligned}
 (\hat{\mathcal{L}}_{\text{inc}} \hat{\rho})_{11} &= W \rho_{22} & (\hat{\mathcal{L}}_{\text{inc}} \hat{\rho})_{22} &= -W \rho_{22} \\
 (\hat{\mathcal{L}}_{\text{inc}} \hat{\rho})_{12} &= -\frac{W}{2} \rho_{12} & (\hat{\mathcal{L}}_{\text{inc}} \hat{\rho})_{21} &= -\frac{W}{2} \rho_{21}
 \end{aligned} \tag{III.7.6}$$

Transformation auf die „dressed-state“-Basis: mit (III.7.4) wird

$$\begin{aligned}
 \hat{P}_{12} &= \frac{1}{2} (|+\rangle\langle +| + |+\rangle\langle -| - |-\rangle\langle +| - |-\rangle\langle -|) \\
 \hat{P}_{21} &= \frac{1}{2} (|+\rangle\langle +| + |-\rangle\langle +| - |+\rangle\langle -| - |-\rangle\langle -|) \\
 \hat{P}_{22} &= \frac{1}{2} (|+\rangle\langle +| + |+\rangle\langle -| + |-\rangle\langle +| + |-\rangle\langle -|)
 \end{aligned}$$

Damit, und mit (III.7.5):

$$\begin{aligned}
 (\hat{\mathcal{L}} \hat{\rho})_{++} &= W \langle + | \hat{P}_{12} \hat{\rho} \hat{P}_{21} | + \rangle - \frac{W}{2} \langle + | \hat{P}_{22} \hat{\rho} | + \rangle - \frac{W}{2} \langle + | \hat{P}_{22} \hat{\rho} | + \rangle \\
 &= W \left(\frac{1}{2} \langle + | \hat{\rho} \hat{P}_{21} | + \rangle + \frac{1}{2} \langle - | \hat{\rho} \hat{P}_{21} | + \rangle \right) \\
 &\quad - \frac{W}{2} \left(\frac{1}{2} \langle + | \hat{\rho} | + \rangle + \frac{1}{2} \langle - | \hat{\rho} | + \rangle \right) \\
 &\quad - \frac{W}{2} \left(\frac{1}{2} \langle + | \hat{\rho} | + \rangle + \frac{1}{2} \langle + | \hat{\rho} | - \rangle \right) \\
 &= W \left(\frac{1}{4} \langle + | \hat{\rho} | + \rangle + \frac{1}{4} \langle + | \hat{\rho} | - \rangle + \frac{1}{4} \langle - | \hat{\rho} | + \rangle + \frac{1}{4} \langle - | \hat{\rho} | - \rangle \right) - \frac{W}{4} (\dots) \\
 &= \frac{W}{4} (\rho_{++} + \rho_{+-} + \rho_{-+} + \rho_{--}) \\
 &\quad - \frac{W}{4} (\rho_{++} + \rho_{-+}) - \frac{W}{4} (\rho_{++} + \rho_{+-})
 \end{aligned}$$

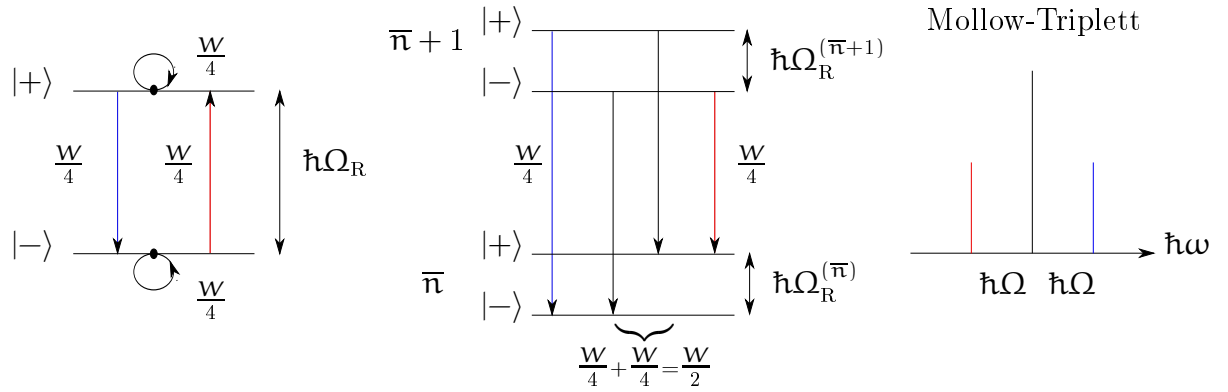


Abbildung III.10: Links: Übergänge in „dressed-state“-Basis, Mitte: Seitenbänder und Zentrallinie, rechts: Mollow-Triplett

Entsprechend erhält man (vgl. (III.5.2)):

$$\begin{aligned}
 (\hat{\mathcal{L}}\hat{\rho})_{++} &= \frac{W}{4}\rho_{--} - \frac{W}{4}\rho_{++} \\
 (\hat{\mathcal{L}}\hat{\rho})_{--} &= -\frac{W}{4}\rho_{--} + \frac{W}{4}\rho_{++} \\
 (\hat{\mathcal{L}}\hat{\rho})_{+-} &= -\frac{W}{4}\rho_{-+} - \frac{W}{2}\rho_{++} - \frac{W}{2}\rho_{--} \\
 (\hat{\mathcal{L}}\hat{\rho})_{-+} &= -\frac{W}{4}\rho_{+-} - \frac{W}{2}\rho_{--} - \frac{W}{2}\rho_{++}
 \end{aligned}
 \tag{III.7.7}$$

Siehe dazu auch Abb. III.10 (links).

Interpretation im Frequenzraum:

Seitenbänder (Abb. III.10, Mitte) :

$$\begin{aligned}
 |+\rangle &\longrightarrow |-\rangle \\
 |-\rangle &\longrightarrow |+\rangle
 \end{aligned}$$

Zentrallinie (Intensität $\frac{W}{4} + \frac{W}{4} = \frac{W}{2}$)

$$\begin{aligned}
 |+\rangle &\longrightarrow |+\rangle \\
 |-\rangle &\longrightarrow |-\rangle
 \end{aligned}$$

Das Intensitätsverhältnis zwischen den Seitenbändern und der Zentrallinie ist nach Abb. III.10 (rechts) 1 : 2 : 1

Anmerkung: Diese simple Theorie erlaubt lediglich Aussagen über das gesamte Intensitätsverhältnis, nicht jedoch über die Linienbreiten!

Literatur: Breuer et al, The theory of open quantum systems, S. 158 sowie Scully, S. 295 und Cohen-Tannoudji, Atom-Photon-Interactions.

III.8 Quantenschwebungen

III.8.1 Kohärenter Anteil

Betrachte ein Drei-Niveau-System ohne Treiber:

$$\hat{H} = \sum_{j=1}^3 E_j \hat{P}_{jj} \quad (\text{III.8.1})$$

Der kohärente Anteil der Dynamik ist dann

$$\dot{\hat{\rho}} = \hat{\mathcal{L}}_{\text{coh}} \hat{\rho} = \frac{1}{i\hbar} [\hat{H}, \hat{\rho}] \quad (\text{III.8.2})$$

In Matrixschreibweise:

$$\begin{aligned} i\hbar \langle i | \dot{\hat{\rho}} | j \rangle &= \langle i | \hat{H} \hat{\rho} | j \rangle - \langle i | \hat{\rho} \hat{H} | j \rangle \\ \implies i\hbar \dot{\rho}_{ij} &= \sum_k (H_{ik} \rho_{kj} - \rho_{ik} H_{kj}) \end{aligned} \quad (\text{III.8.3})$$

$$H_{ik} = H_{ii} \delta_{ik} \quad (\text{III.8.4})$$

$$i\hbar \dot{\rho}_{ii} = H_{ii} \rho_{ii} - \rho_{ii} H_{ii} = 0 \quad i = 1, 2, 3 \quad (\text{III.8.5})$$

Mit (III.8.3):

$$i\hbar \dot{\rho}_{ij} = H_{ii} \rho_{ij} - \rho_{ij} H_{jj} \quad (\text{III.8.6})$$

$$\hbar \omega_{ij} \equiv E_j - E_i \quad (\text{III.8.7})$$

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_{12} = i\omega_{12} \rho_{12} & \quad \dot{\rho}_{21} = -i\omega_{21} \rho_{21} \\ \dot{\rho}_{13} = i\omega_{13} \rho_{13} & \quad \dot{\rho}_{31} = -i\omega_{13} \rho_{31} \\ \dot{\rho}_{23} = i\omega_{23} \rho_{23} & \quad \dot{\rho}_{32} = -i\omega_{23} \rho_{32} \end{aligned} \quad (\text{III.8.8})$$

Wegen (III.8.5):

$$\rho_{ii} = \text{const} \quad (\text{III.8.9})$$

III.8.2 Nicht-selektive Dämpfung: γ -Szenario

Vergleiche Kapitel II.8.2, III.3.3.

$$\hat{F} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{P}_{12} + \hat{P}_{13}) \quad (\text{III.8.10})$$

$$\hat{F}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{P}_{21} + \hat{P}_{31})$$

$$\hat{F}^\dagger \hat{F} = \frac{1}{2} (\hat{P}_{22} + \hat{P}_{33} + \hat{P}_{32} + \hat{P}_{23}) \quad (\text{III.8.11})$$

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{L}}_{\text{inc}}\hat{\rho} &= \frac{W}{2} (\hat{P}_{12} + \hat{P}_{13}) \hat{\rho} (\hat{P}_{21} + \hat{P}_{31}) \\ &\quad - \frac{W}{4} \hat{\rho} (\hat{P}_{22} + \hat{P}_{33} + \hat{P}_{32} + \hat{P}_{23}) - \frac{W}{4} (\hat{P}_{22} + \hat{P}_{33} + \hat{P}_{32} + \hat{P}_{23}) \hat{\rho}\end{aligned}$$

Die einzelnen Matrixelemente sind

$$\begin{aligned}(\hat{\mathcal{L}}\hat{\rho})_{\underline{11}} &= \frac{W}{2} (\rho_{22} + \rho_{33} + \rho_{\underline{23}} + \rho_{\underline{32}}) \\ (\hat{\mathcal{L}}\hat{\rho})_{\underline{22}} &= \frac{W}{2} \left(-\rho_{22} - \frac{1}{2} \rho_{\underline{23}} - \frac{1}{2} \rho_{\underline{32}} \right) \\ (\hat{\mathcal{L}}\hat{\rho})_{\underline{33}} &= \frac{W}{2} \left(-\rho_{33} - \frac{1}{2} \rho_{\underline{32}} - \frac{1}{2} \rho_{\underline{23}} \right) \\ (\hat{\mathcal{L}}\hat{\rho})_{12} &= -\frac{W}{4} (\rho_{12} + \rho_{13}) & (\hat{\mathcal{L}}\hat{\rho})_{21} &= -\frac{W}{4} (\rho_{21} + \rho_{31}) \\ (\hat{\mathcal{L}}\hat{\rho})_{13} &= -\frac{W}{4} (\rho_{13} + \rho_{12}) & (\hat{\mathcal{L}}\hat{\rho})_{31} &= -\frac{W}{4} (\rho_{31} + \rho_{21}) \\ (\hat{\mathcal{L}}\hat{\rho})_{\underline{23}} &= -\frac{W}{4} (2\rho_{\underline{23}} + \rho_{\underline{22}} + \rho_{\underline{33}}) & (\hat{\mathcal{L}}\hat{\rho})_{\underline{32}} &= -\frac{W}{4} (2\rho_{\underline{32}} + \rho_{\underline{22}} + \rho_{\underline{33}})\end{aligned}\tag{III.8.12}$$

Die Unterstreichungen bezeichnen „Kreuzterme“, d. h. Kopplungen zwischen Diagonal- und Nicht-Diagonalelementen.

Variablentransformation:

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_{23} &\equiv \rho_{23} + \rho_{32} \\ \mathbf{v}_{23} &\equiv i(\rho_{32} - \rho_{23}) \\ \mathbf{x}_{23} &\equiv \rho_{22} + \rho_{33}\end{aligned}\tag{III.8.13}$$

Gesamtdynamik in diesem Unterraum nach (III.8.2), (III.8.3):

$$\dot{\mathbf{x}}_{23} = -\frac{W}{2}(\mathbf{x}_{23} + \mathbf{u}_{23})\tag{III.8.14}$$

$$\implies \dot{\rho}_{11} = \frac{W}{2}(\mathbf{x}_{23} + \mathbf{u}_{23}) \quad \text{Summe!}$$

$$\dot{\mathbf{u}}_{23} = -\frac{W}{2}(\mathbf{u}_{13} + \mathbf{x}_{23}) - \omega_{23}\mathbf{v}_{23}\tag{III.8.15}$$

$$\dot{\mathbf{v}}_{23} = -\frac{W}{2}\mathbf{v}_{23} + \omega_{23}\mathbf{u}_{23}\tag{III.8.16}$$

$$\implies \ddot{\mathbf{u}}_{23} = -\frac{W}{2}\dot{\mathbf{u}}_{23} - \frac{W}{2}\dot{\mathbf{x}}_{23} - \omega_{23}\dot{\mathbf{v}}_{23}\tag{III.8.17}$$

$$\text{(III.8.16):} \quad = -\frac{W}{2}\dot{\mathbf{u}}_{23} - \frac{W}{2}\dot{\mathbf{x}}_{23} - \omega_{23}\frac{W}{2}\mathbf{v}_{23} - \omega_{23}^2\mathbf{u}_{23}$$

$$\text{(III.8.14):} \quad = -\frac{W}{2}\dot{\mathbf{u}}_{23} + \frac{W^2}{4}\mathbf{x}_{23} + \frac{W^2}{4}\mathbf{u}_{23} - \frac{W}{2}\omega_{23}\mathbf{v}_{23} - \omega_{23}^2\mathbf{u}_{23}\tag{III.8.18}$$

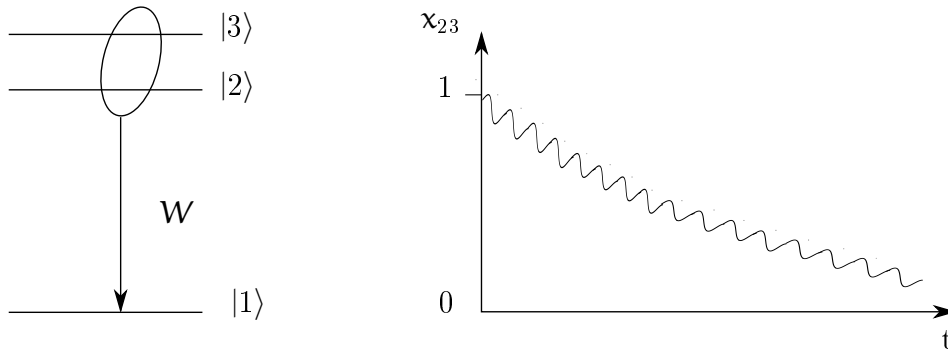


Abbildung III.11: Links: Übergang im ν -Szenario, rechts: oszillierender Zerfall, Quantenschwebung (Skizze)

Anfangsbedingungen:

$$\begin{aligned} v_{23}(0) &= 0 \\ x_{23}(0) &= 1 \end{aligned} \quad (\text{III.8.19})$$

Schwache Dämpfung:

$$W \ll \omega_{23}$$

Vernachlässige in (III.8.18) quadratisch kleine Terme:

$$\ddot{u}_{23} + \frac{W}{2}\dot{u}_{23} + \omega_{23}^2 u_{23} = 0 \quad (\text{III.8.20})$$

Vergleich mit dem gedämpften harmonischen Oszillator:

$$m\ddot{x} + fx + \alpha\dot{x} = 0$$

mit $m = 1$, $f = \omega_{23}^2$, $\alpha = \frac{W}{4}$

$$\implies \lambda \equiv \frac{\alpha}{2m} = \frac{W}{4} \quad (\text{III.8.21})$$

$$\omega_{\text{eff}}^2 = \omega_{23}^2 - \left(\frac{W}{4}\right)^2 \quad (\text{III.8.22})$$

Man erhält als Lösung für u_{23} :

$$\boxed{\begin{aligned} u_{23}(t) &= e^{-Wt/4} (Ae^{i\omega_{\text{eff}}t} + e^{-i\omega_{\text{eff}}t}) \\ &= e^{-Wt/4} \cos \omega_{\text{eff}}t \end{aligned}} \quad (\text{III.8.23})$$

Aus (III.8.14):

$$\dot{x}_{23} = -\frac{W}{2}\omega_{23} - \frac{W}{2}u_{23}$$

III Offene Systeme

Mit (III.8.23):

$$\dot{x}_{23} + \frac{W}{2}\omega_{23} = e^{-Wt/4} \cos \omega_{\text{eff}} t \quad (\text{III.8.24})$$

Homogene Lösung:

$$x_{23} = x_{23}(0) e^{-Wt/2} \quad (\text{III.8.25})$$

wobei nach (III.8.19) $x_{23}(0) = 1$ ist.

Spezielle inhomogene Lösung, Ansatz:

$$x_{23}(t) = C(t)e^{-Wt/2} \quad (\text{III.8.26})$$

$$\dot{x}_{23}(t) = \dot{C}(t)e^{-Wt/2} - \frac{W}{2}C(t)e^{-Wt/2}$$

$$\Rightarrow \dot{C}(t)e^{-Wt/2} + C(t) \left(\frac{W}{2}e^{-Wt/2} - \frac{W}{2}e^{-Wt/2} \right) = e^{-Wt/4} \cos \omega_{\text{eff}} t$$

$$\Rightarrow \dot{C}(t) = e^{-Wt/4} \cos \omega_{\text{eff}} t$$

$$\boxed{x_{23}(t) = e^{-Wt/2} \int_0^t e^{Wt'/4} \cos \omega_{\text{eff}} t' dt'} \quad (\text{III.8.27})$$

Die gesamte Lösung ist schließlich

$$x_{23}(t) = -\frac{W/2}{\left(\frac{W}{4}\right)^2 + \omega_{\text{eff}}^2} e^{-Wt/4} \times \left(\frac{W}{4} \cos \omega_{\text{eff}} t + \omega_{\text{eff}} \sin \omega_{\text{eff}} t \right) + \frac{3\left(\frac{W}{4}\right)^2 + \omega_{\text{eff}}^2}{\left(\frac{W}{4}\right)^2 + \omega_{\text{eff}}^2} e^{-Wt/2} \quad (\text{III.8.28})$$

Es handelt sich um einen oszillierenden nicht-exponentiellen Zerfall: „Quantenschwebungen“ (siehe Abb. III.11 rechts).

III.8.3 Nicht-selektive Dämpfung: λ -Szenario

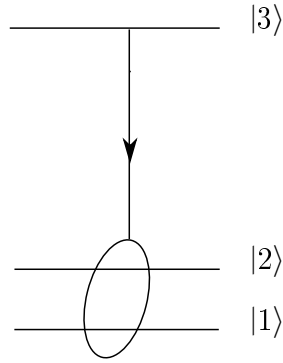
$$\hat{F} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{P}_{13} + \hat{P}_{23}) \quad (\text{III.8.29})$$

$$\hat{F}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{P}_{31} + \hat{P}_{32})$$

$$\hat{F}^\dagger \hat{F} = \hat{P}_{33} \quad (\text{III.8.30})$$

Die Behandlung des dissipativen Terms $\hat{\mathcal{L}}_{\text{inc}}^{(d)} \hat{\rho}$ ist hier viel einfacher als im vorigen Fall!

$$\hat{\mathcal{L}}_{\text{inc}} \hat{\rho} = \frac{W}{2} (\hat{P}_{13} + \hat{P}_{23}) \hat{\rho} (\hat{P}_{31} + \hat{P}_{32}) - \frac{W}{2} \hat{\rho} \hat{P}_{33} - \frac{W}{2} \hat{P}_{33} \hat{\rho} \quad (\text{III.8.31})$$

Abbildung III.12: Übergang im λ -Szenario

Matrizelemente:

$$\begin{aligned}(\hat{\mathcal{L}}\hat{\rho})_{11} &= \frac{W}{2}\rho_{33} \\(\hat{\mathcal{L}}\hat{\rho})_{22} &= \frac{W}{2}\rho_{33} \\(\hat{\mathcal{L}}\hat{\rho})_{33} &= -W\rho_{33}\end{aligned}\tag{III.8.32}$$

Da keine Kreuzterme vorkommen: Exponentieller Zerfall,

$$\boxed{\rho_{33}(t) = \rho_{33}(0)e^{-Wt}}\tag{III.8.33}$$

$$x(t) \equiv \rho_{11} + \rho_{22} = 1 - \rho_{33}(0)e^{-Wt}\tag{III.8.34}$$

Mit

$$\begin{aligned}\rho_{33}(0) = 1 &\implies \rho_{11}(0) = \rho_{22}(0) = 0 \\ \rho_{11}(t) = \rho_{22}(t) &= \frac{1}{2}(1 - e^{-Wt})\end{aligned}\tag{III.8.35}$$

Für $t \rightarrow \infty$ wird

$$\rho_{11} = \rho_{22} = \frac{1}{2}\tag{III.8.36}$$

Hierbei handelt es sich also um einen nicht-thermischen Zustand, auf dem Weg dahin existieren keine Schwebungen!

III.8.4 Anmerkungen

- Nicht-selektive Übergänge sind realisierbar durch geeignete „Filter“, siehe Abb. III.13. Die Umgebung kann die Übergänge $|3\rangle \rightarrow |1\rangle$ und $|2\rangle \rightarrow |1\rangle$ nicht unterscheiden („blind“).
- Die beiden besprochenen Szenarien verhalten sich verschieden. Beim ν -Szenario findet man einen nicht-exponentiellen Zerfall in den Grundzustand, beim λ -Szenario dagegen einen exponentiellen Zerfall in einen nicht-thermischen Endzustand!

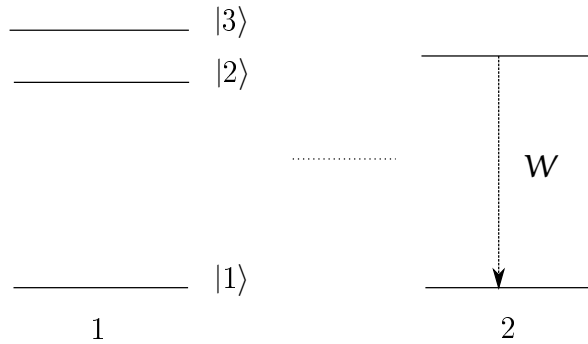


Abbildung III.13: Nicht-selektiver Übergang

- c. Die Erweiterung auf größere Systeme ($n > 3$) ist allerdings problematisch, da beliebige nicht-selektive Übergänge kaum realisierbar sind.

III.9 QND-Messungen

QND: Quantum-Non-Demolition

Literatur:

Walls, Milburn, Quantum Optics

Scully, Quantum Optics

III.9.1 „Quantum-demolition“-Experiment

Beispiel: Ortsmessung am freien Teilchen, d. h. \hat{x} wird gemessen. Hamilton-Operator:

$$\hat{H}_S = \frac{\hat{p}_x^2}{2m} \quad (\text{III.9.1})$$

Im Heisenberg-Bild:

$$\frac{d\hat{x}}{dt} = \frac{i}{\hbar} [\hat{H}_S, \hat{x}] = \frac{\partial \hat{H}_S}{\partial \hat{p}_x} = \frac{\hat{p}_x(0)}{m} \quad (\text{III.9.2})$$

$$\implies \boxed{\hat{x}(t) = \hat{x}(0) + \frac{t}{m} \hat{p}_x(0)}$$

Varianz-Operatoren:

$$\begin{aligned} \Delta \hat{x}(t) &\equiv \hat{x}(t) - \langle \hat{x}(t) \rangle \\ \Delta \hat{p}_x(t) &\equiv \hat{p}_x(t) - \langle \hat{p}_x(t) \rangle \end{aligned} \quad (\text{III.9.3})$$

Zeitentwicklung:

$$\Delta \hat{x}(t) = \Delta \hat{x}(0) + \frac{t}{m} \hat{p}_x(0) \quad (\text{III.9.4})$$

Unschärfe:

$$\begin{aligned}
 \delta x^2(t) &\equiv \langle \psi_H | (\Delta \hat{x}(t))^2 | \psi_H \rangle \\
 &= \underbrace{\langle \psi_H | (\Delta \hat{x}(0))^2 | \psi_H \rangle}_{\equiv \delta x^2(0)} + \frac{t^2}{m^2} \underbrace{\langle \psi_H | (\Delta \hat{p}_x(0))^2 | \psi_H \rangle}_{\equiv \delta p_x^2(0)} \\
 &\quad + t \underbrace{\frac{1}{m} \langle \psi_H | (\Delta \hat{x}(0) \Delta \hat{p}_x(0) + \Delta \hat{p}_x(0) \Delta \hat{x}(0))^2 | \psi_H \rangle}_{=\alpha = \text{const}}
 \end{aligned} \tag{III.9.5}$$

Minimum von $\delta x^2(t)$ für $t = t_m$:

$$\frac{d}{dt} \delta x^2(t) = \frac{2t_m}{m^2} \delta p_x^2 + \alpha = 0 \quad \Longrightarrow \quad \alpha = -\frac{2t_m}{m^2} \delta p_x^2(0) \tag{III.9.6}$$

$$\delta x^2(t_m) = \delta x^2(0) - \frac{t_m^2}{m^2} \delta p_x^2(0) \quad \Longrightarrow \quad \delta x^2(0) = \delta x^2(t_m) + \frac{t_m^2}{m^2} \delta p_x^2(0)$$

$$\delta x^2(t) = \delta x^2(t_m) + \frac{(t - t_m)^2}{m^2} \delta p_x^2(0) \tag{III.9.7}$$

Heisenbergsche Unschärferelation:

$$\delta p_x^2(t) \geq \frac{\hbar^2}{4\delta x^2(t)} \tag{III.9.8}$$

Das Gleichheitszeichen gilt für $t = t_m \equiv 0$. Setze (III.9.8) ein in (III.9.7):

$$\boxed{\delta x^2(t) = \delta x^2(0) + \frac{\hbar^2 t^2}{4m^2 \delta x^2(0)}} \tag{III.9.9}$$

Rückwirkung: Je genauer die Ortsmessung zur Zeit $t = t_m = 0$, desto schlechter ist die Vorhersagbarkeit des Ortes zur Zeit $t > 0$ (Projektionspostulat).

III.9.2 QND-Variable

Definition: (innere Dynamik)

$$[\hat{A}_H(t), \hat{A}_H(t')] = 0 \tag{III.9.10}$$

Beispiel: Für ein freies Teilchen ist $\hat{p}(t)$ eine Erhaltungsgröße, also eine QND-Variable. Dagegen ist gemäß Gl. (III.9.3):

$$\begin{aligned}
 \hat{x}_H(t + \tau) &= \hat{x}_H(t) + \hat{p}_x \frac{\tau}{m} \\
 \Longrightarrow [\hat{x}_H(t), \hat{x}_H(t + \tau)] &= \frac{i\hbar\tau}{m} \neq 0
 \end{aligned} \tag{III.9.11}$$

Beispiel: Beim Harmonischen Oszillator ist weder \hat{x} noch \hat{p}_x eine QND-Variable, wegen

$$\begin{aligned} [\hat{x}(t), \hat{x}(t + \tau)] &= \frac{i\hbar}{m\omega_0} \sin \omega_0 \tau \\ [\hat{p}_x(t), \hat{p}_x(t + \tau)] &= i\hbar m\omega_0 \sin \omega_0 \tau \end{aligned} \quad (\text{III.9.12})$$

Wohl aber sind geeignete Kombinationen wie $\hat{X} \simeq m\omega_0 \hat{x} \pm i\hat{p}_x$ QND-Variable!

Anmerkung: Für den Harmonischen Oszillator sind \hat{x} und \hat{p}_x stroboskopische QND-Variable, d. h. der Kommutator wird zu Null für diskrete Zeiten mit $\sin \omega_0 t = 0$.

Aber: Selbst für Erhaltungsgrößen sind destruktive oder QND-Messungen möglich!

III.9.3 Messmodell: QND-Bedingungen

Literatur: Scully, S. 542

Sei S das Messobjekt, \hat{A}_S die Messobservable, P die Probe sowie \hat{A}_P die Probenobservable.

$$\boxed{\hat{H} = \hat{H}_S + \hat{H}_P + \hat{H}_{\text{int}}} \quad (\text{III.9.13})$$

Bedingungen:

a.

$$\frac{\partial \hat{H}_{\text{int}}}{\partial \hat{A}_S} \neq 0 \quad (\text{III.9.14})$$

Sonst keine Ankopplung an die Probe!

b.

$$[\hat{H}_{\text{int}}, \hat{A}_S] = 0 \quad (\text{III.9.15})$$

Keine Änderung der Messvariable!

c.

$$[\hat{H}_{\text{int}}, \hat{A}_P] \neq 0 \quad (\text{III.9.16})$$

Änderung der Probenvariable!

d.

$$\frac{\partial \hat{H}_{\text{int}}}{\partial \hat{A}_S^\xi} \neq 0 \quad (\text{III.9.17})$$

\hat{A}_S^ξ ist die Konjugierte zu \hat{A}_S (inkompatibel). Durch eine Messung von \hat{A}_S wird \hat{A}_S^ξ unscharf! Vermeide Rückwirkung.

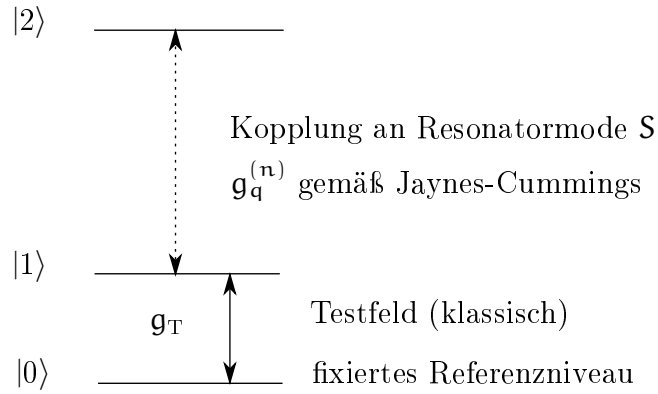


Abbildung III.14: QND-Photonenzahlmessung

III.9.4 QND-Photonenzahlmessung

Literatur:

PRL **65**, 976 (1990)

Nature **400**, 239 (1999)

Sei das System S eine Resonatormode mit $\hat{H}_S = \hbar\omega\hat{n}$, d. h. \hat{n} ist bzgl. \hat{H}_S eine Erhaltungsgröße. Die Probe P sei ein Drei-Niveau-Atom, realisiert durch ausgewählte Rydberg-Niveaus der Hauptquantenzahl um $n \approx 50$ (Lebensdauer $\tau \simeq 3 \cdot 10^{-2}$ s).

Siehe Abb. III.14.

Im Probensystem:

- Betrachte den Unterraum $|1\rangle |2\rangle$ mit Kopplung an eine Resonatormode. Nach (II.2.21):

$$E_{\pm}^{(n)} = \left(n - \frac{1}{2}\right) \hbar\omega_{12} \pm \frac{1}{2} \hbar\Omega_R^{(n)} \quad (\text{III.9.18})$$

$$\Omega_R^{(n)} = \left((g_q^{(n)})^2 + \delta_{12}^2\right)^{1/2} \quad (\text{III.9.19})$$

Mit $g_q^{(n)} = 0$:

$$E_{\pm}^{(n)} = \left(n - \frac{1}{2}\right) \hbar\omega_{12} \pm \frac{1}{2} \hbar\delta_{12} \quad (\text{III.9.20})$$

Subtrahiere (III.9.18) von (III.9.20):

$$\Delta E_{\pm}^{(n)} = \pm \left(\Omega_R^{(n)} - \delta_{12}\right) \quad (\text{III.9.21})$$

Im Fall von $\delta_{12} \gg |g_q^{(n)} = 0|$:

$$|+\rangle \approx |2\rangle \quad |-\rangle \approx |1\rangle \quad (\text{III.9.22})$$

(vgl. Abschnitt II.2) Dann ist

$$\begin{aligned}\Omega_{\text{R}}^{(\text{n})} - \delta_{12} &= \delta_{12} \left(1 + \frac{\left(g_{\text{q}}^{(\text{n})} \right)^2}{\delta_{12}^2} \right)^{1/2} - \delta_{12} \approx \delta_{12} \left(1 + \frac{\left(g_{\text{q}}^{(\text{n})} \right)^2}{2\delta_{12}^2} \right) - \delta_{12} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{g_{\text{q}}^{(\text{n})}}{\delta_{12}} \right)^2 \quad g_{\text{q}}^{(\text{n})} = 2g\sqrt{\text{n}}\end{aligned}\tag{III.9.23}$$

Die dynamische Energieverschiebung ($\Delta E_{-}^{(\text{n})}$) ist dann

$$\Omega_{\text{R}}^{(\text{n})} - \delta_{12} \simeq \frac{2g^2\text{n}}{\delta_{12}}\tag{III.9.24}$$

- Betrachte den Unterraum $|0\rangle |1\rangle$ ($|-\rangle \approx |1\rangle$)

$$\hat{H}_{\text{eff}} = \hat{H}_{\text{P}} + \hat{H}_{\text{S}} + \hat{H}_{\text{int}} = \frac{1}{2} \hbar\omega_{10} (\hat{P}_{11} - \hat{P}_{00}) + \hbar\omega \hat{q}^\dagger \hat{q} \mp \frac{\hbar g^2}{\delta_{12}} \hat{q}^\dagger \hat{q} \hat{P}_{11}\tag{III.9.25}$$

Beachte $\hat{q}^\dagger \hat{q} |\text{n}\rangle = \text{n} |\text{n}\rangle$. Kopple die Probe an ein klassisches Lichtfeld mit $g_{\text{T}} \neq 0$ ($\delta_{\text{T}} = 0$). Indirekte Messung über Phasenverschiebung. Mit

$$\begin{aligned}\hat{A}_{\text{S}} &= \hat{q}^\dagger \hat{q} = \hat{n} \\ \hat{A}_{\text{P}} &= -\frac{i}{2} (\hat{P}_{10} - \hat{P}_{01}) \quad \text{Dipoloperator} \rightarrow \text{klass. Lichtfeld}\end{aligned}\tag{III.9.26}$$

fordert man wiederum die QND-Bedingungen:

a.

$$\frac{\partial \hat{H}_{\text{int}}}{\partial \hat{A}_{\text{S}}} \neq 0$$

b.

$$[\hat{H}_{\text{int}}, \hat{A}_{\text{S}}] = 0$$

c.

$$[\hat{H}_{\text{int}}, \hat{A}_{\text{P}}] \neq 0$$

d. \hat{H}_{S} ist unabhängig von der Phase (konjugierte Größe). Die Phase wird unscharf, da jedes Atom den Brechungsindex im Resonator modifiziert.

Der Hamilton-Operator dieses Unterraums ist

$$\hat{H}_{10} = \langle \text{n} | \hat{H}_{\text{eff}} | \text{n} \rangle = \frac{1}{2} \hbar\omega_{10} (\hat{P}_{11} - \hat{P}_{00}) - \frac{\hbar g^2}{\delta_{12}} \text{n} \hat{P}_{11} + \text{const } \hat{1}$$

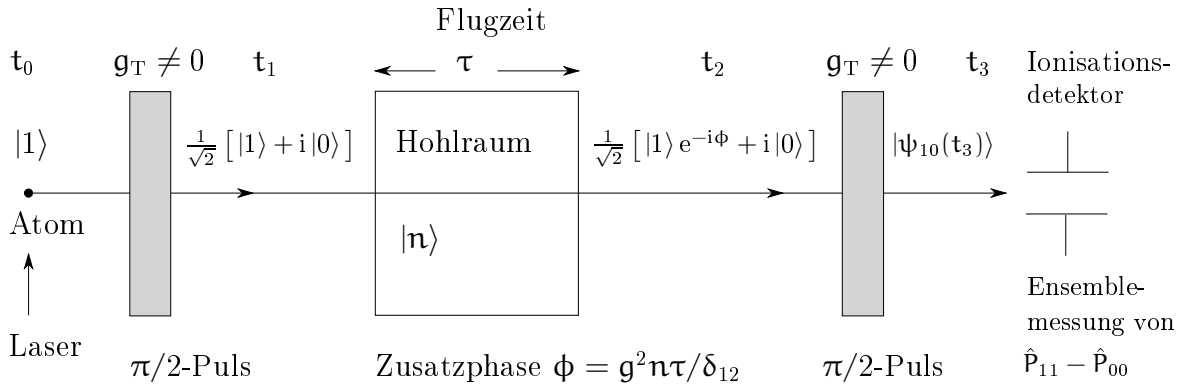


Abbildung III.15: Ramsey-Anordnung

Ramsey-Anordnung

Siehe Abb. III.15. Die $\pi/2$ -Pulse werden dargestellt durch $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}$.

Im Wechselwirkungsbild:

$$|\psi_{10}(t_2)\rangle = e^{i\hbar^{-2}g^2n\hat{P}_{11}\tau/\delta_{12}} |\psi_{10}(t_1)\rangle$$

Projektionen:

$$\langle 1|\psi_{10}(t_3)\rangle = \frac{1}{2} (e^{-i\phi} - 1) \quad W_1 = |\langle \dots \rangle|^2 = \frac{1}{2} (1 - \cos \phi) \quad (\text{III.9.27})$$

$$\langle 0|\psi_{10}(t_3)\rangle = \frac{i}{2} (e^{-i\phi} + 1) \quad W_0 = |\langle \dots \rangle|^2 = \frac{1}{2} (1 + \cos \phi) \quad (\text{III.9.28})$$

Die Wahrscheinlichkeit, das Atom im Zustand $|1\rangle$ zu finden, hängt ab von ϕ und damit von n ! Die Messung ist nicht-destruktiv, der Fock-Zustand bleibt bestehen!

Erweiterung: Messung von S an einem Glauber-Zustand: In diesem Fall Messrückwirkung; reduziere auf Fock-Zustand! Siehe Abb. III.16. Experiment: Brune et al, PRL **65**, 976 (1990)

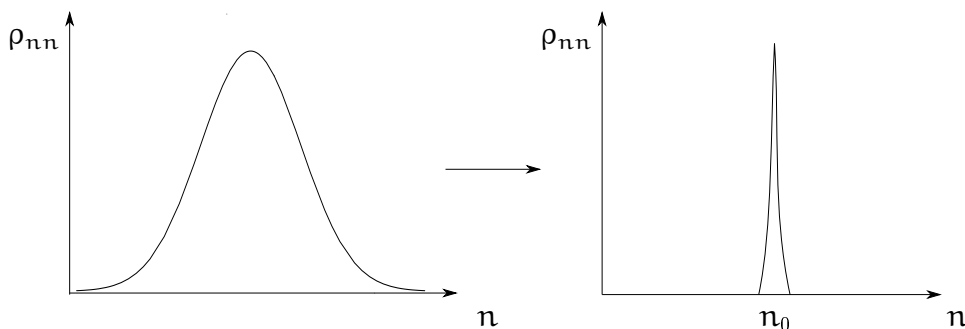


Abbildung III.16: Links: Messung am Glauber-Zustand. Rechts: Reduktion auf Fock-Zustand

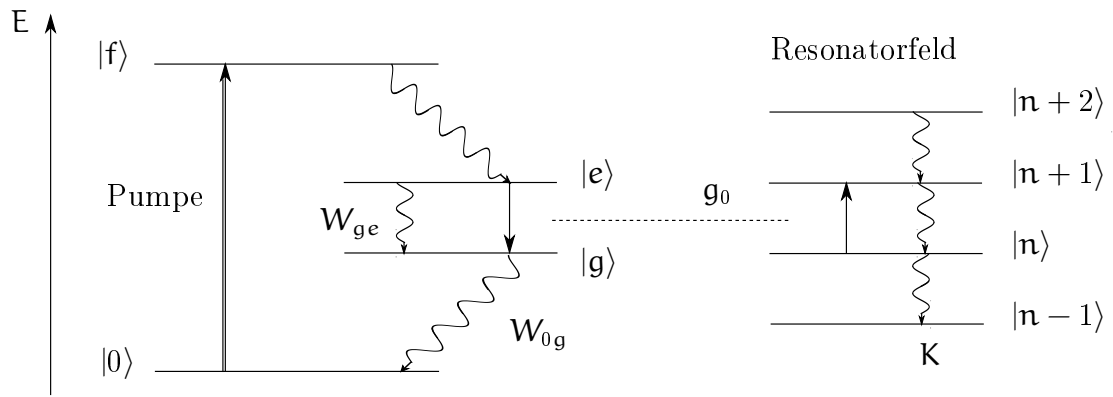


Abbildung III.17: Hamilton-Modell des Ein-Moden-Lasers

III.10 Mastergleichung des Ein-Moden-Lasers

Literatur:

Y. Yamamoto, A. Imamoglu, Mesoscopic Quantum Optics, J. Wiley, 1999, S. 15-254

M. Sargent III, M. O. Scully, W. E. Lamb, Laser Physics, Addison-Wesley, 1974, S. 21-149

M. O. Scully et al, Quantum Optics

III.10.1 Hamilton-Modell

a. Scully-Lamb-Modell:

Zwei-Niveau-Atome im angeregten Zustand $|e\rangle$ werden in einen Resonator eingebracht und im Zustand $|g\rangle$ wieder entfernt (zufälliger Poisson-Prozess).

b. Gepumptes Vier-Niveau-System mit Ankopplung an einzelne Photonenmode \hat{q} (voll quantenmechanisch):

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_{\text{int}} \quad (\text{III.10.1})$$

$$\hat{H}_0 = \sum_i \hat{P}_{ii} E_i + \hbar\omega \hat{q}^\dagger \hat{q} \quad (\text{III.10.2})$$

Sei $g = ig_0$ und $g^* = -ig_0$:

$$\hat{H}_{\text{int}} = i\hbar g_0 (\hat{P}_{eg} \hat{q} - \hat{q}^\dagger \hat{P}_{ge}) \quad (\text{III.10.3})$$

III.10.2 Pumpmodell

Schneller Zerfall: $|f\rangle \rightarrow |e\rangle$. Beschreibe den Prozess $|0\rangle \rightarrow |f\rangle \rightarrow |e\rangle$ als inkohärenten Ratenprozess!

Übergang $|0\rangle \rightarrow |e\rangle$ (effektives Drei-Niveau-System):

$$\hat{F} = \hat{P}_{e0} \quad \hat{F}^\dagger \hat{F} = \hat{P}_{0e} \hat{P}_{e0} = \hat{P}_{00} \quad (\text{III.10.4})$$

$$\implies (\hat{\mathcal{L}}_{\text{inc}} \hat{\rho})_{\text{Pumpe}} = -\frac{\Gamma_{\text{pumpe}}}{2} (\hat{P}_{00} \hat{\rho} + \hat{\rho} \hat{P}_{00}) + \Gamma_{\text{Pumpe}} \hat{P}_{e0} \hat{\rho} \hat{P}_{0e} \quad (\text{III.10.5})$$

III.10.3 Dämpfungsmodelle

Vergleiche (III.3.13).

a. Spontane Dämpfung des Laser-Übergangs:

$$\hat{F} = \hat{P}_{ge} \quad \hat{F}^\dagger \hat{F} = \hat{P}_{eg} \hat{P}_{ge} = \hat{P}_{ee} \quad (\text{III.10.6})$$

$$(\hat{\mathcal{L}}_{\text{inc}} \hat{\rho})_{\text{spont}} = -\frac{W_{ge}}{2} (\hat{P}_{ee} \hat{\rho} + \hat{\rho} \hat{P}_{ee}) + W_{ge} \hat{P}_{ge} \hat{\rho} \hat{P}_{eg} \quad (\text{III.10.7})$$

b. Schneller Zerfall:

$$\hat{F} = \hat{P}_{0g} \quad \hat{F}^\dagger \hat{F} = \hat{P}_{g0} \hat{P}_{0g} = \hat{P}_{gg} \quad (\text{III.10.8})$$

$$(\hat{\mathcal{L}}_{\text{inc}} \hat{\rho})_{\text{Zerfall}} = -\frac{W_{0g}}{2} (\hat{P}_{gg} \hat{\rho} + \hat{\rho} \hat{P}_{gg}) + W_{0g} \hat{P}_{0g} \hat{\rho} \hat{P}_{g0} \quad (\text{III.10.9})$$

c. Dephasierung: Der letzte Term in (III.10.7) und (III.10.9) wird zu

$$W_{0g} \longrightarrow W_{0g} + \frac{1}{2\tau} \quad (\text{III.10.10})$$

d. Resonatordämpfung im unendlichdimensionalen Fock-Raum:

$$\hat{F} = \hat{q} \quad \hat{F}^\dagger \hat{F} = \hat{q}^\dagger \hat{q} \quad (\text{III.10.11})$$

$$\begin{aligned} (\hat{\mathcal{L}}_{\text{inc}} \hat{\rho})_{\text{Res}} &= -\frac{K}{2} (\hat{q}^\dagger \hat{q} \hat{\rho} + \hat{\rho} \hat{q}^\dagger \hat{q} - 2\hat{q} \hat{\rho} \hat{q}^\dagger) \\ &= -\frac{K}{2} (\hat{q}^\dagger \hat{q} \hat{\rho} - \hat{q} \hat{\rho} \hat{q}^\dagger) + \text{h. c.} \end{aligned} \quad (\text{III.10.12})$$

Vgl. Brune, PRA **45**, 5180 (1992): „Thermisches Bad von Photonen“, $K = \frac{1}{\tau_{\text{Res}}} \bar{n}_{\text{Bad}}$

III.10.4 Mastergleichungen

Im Wechselwirkungsbild geht nur \hat{H}_{int} in die Bewegungsgleichung ein:

$$\boxed{\frac{d\hat{\rho}}{dt} = g_0 (\hat{P}_{eg} \hat{q} \hat{\rho} - \hat{q}^\dagger \hat{P}_{ge} \hat{\rho} - \hat{\rho} \hat{P}_{ge} \hat{q} + \hat{\rho} \hat{q}^\dagger \hat{P}_{ge}) + (\hat{\mathcal{L}}_{\text{inc}} \hat{\rho})_{\text{Res}} + (\hat{\mathcal{L}}_{\text{inc}} \hat{\rho})_{\text{Pumpe}} + (\hat{\mathcal{L}}_{\text{inc}} \hat{\rho})_{\text{Zerfall}} + (\hat{\mathcal{L}}_{\text{inc}} \hat{\rho})_{\text{spont}}} \quad (\text{III.10.13})$$

Gleichung für den reduzierten Dichteoperator des Feldes:

$$\hat{\rho}_F = \text{Spur}_{\text{Atom}}(\hat{\rho}) = \langle 0 | \hat{\rho} | 0 \rangle + \langle g | \hat{\rho} | g \rangle + \langle e | \hat{\rho} | e \rangle \quad (\text{III.10.14})$$

Nach (III.2.18) gilt für alle Dämpfungsmodelle

$$\text{Spur}\{\hat{\mathcal{L}}_{\text{inc}}\hat{\rho}\} = 0 \quad (\text{III.10.15})$$

Durch die Spurbildung fallen daher die atomaren Dämpfungen heraus:

$$\frac{d\hat{\rho}}{dt} = g_0 (\hat{q} \langle g | \hat{\rho} | e \rangle - \langle e | \hat{\rho} | g \rangle \hat{q}^\dagger - \langle g | \hat{\rho} | e \rangle \hat{q} + \langle e | \hat{\rho} | g \rangle \hat{q}^\dagger) + (\hat{\mathcal{L}}_{\text{inc}}\hat{\rho})_{\text{Res}}$$

oder, durch Ordnen nach hermiteschen Paaren:

$$\boxed{\frac{d\hat{\rho}}{dt} = g_0 (\hat{q} \langle g | \hat{\rho} | e \rangle - \langle g | \hat{\rho} | e \rangle \hat{q}^\dagger) + \frac{K}{2} (\hat{q}\hat{\rho}_F\hat{q}^\dagger - \hat{q}^\dagger\hat{q}\hat{\rho}_F) + \text{h. c.}} \quad (\text{III.10.16})$$

Ziel ist eine geschlossene Darstellung in $\hat{\rho}_F$

III.10.5 Bewegungsgleichung für Matrixelemente

Herleiten einer Bewegungsgleichung für $\langle g | \hat{\rho} | e \rangle$ gemäß (III.10.13):

$$\begin{aligned} \langle g | \hat{P}_{ge} \hat{\rho} | e \rangle &= \langle e | \hat{\rho} | g \rangle \\ \langle g | \hat{\rho} \hat{P}_{ge} | e \rangle &= \langle g | \hat{\rho} | e \rangle \\ \langle g | (\hat{\mathcal{L}}_{\text{inc}}\hat{\rho})_{\text{spont}} | e \rangle &= -\frac{W_{ge}}{2} \langle g | \hat{\rho} | e \rangle \quad \text{vgl. (III.10.7)} \\ \langle g | (\hat{\mathcal{L}}_{\text{inc}}\hat{\rho})_{\text{spont}} | e \rangle &= -\frac{W_{og}}{2} \langle g | \hat{\rho} | e \rangle \quad \text{vgl. (III.10.9)} \\ \langle g | \text{Dephasierung} | e \rangle &= -\frac{1}{2\tau} \langle g | \hat{\rho} | e \rangle \end{aligned}$$

Sei

$$\gamma_{\text{tot}} \equiv W_{ge} + W_{og} + \frac{1}{2\tau} \quad (\text{III.10.17})$$

$$\frac{d}{dt} \langle g | \hat{\rho} | e \rangle = g_0 (-\hat{q}^\dagger \langle e | \hat{\rho} | e \rangle + \langle g | \hat{\rho} | g \rangle \hat{q}^\dagger) - \frac{\gamma_{\text{tot}}}{2} \langle g | \hat{\rho} | e \rangle \quad (\text{III.10.18})$$

Annahme: $\gamma_{\text{tot}} \gg K$

$$\frac{d}{dt} \langle g | \hat{\rho} | e \rangle \approx 0 \quad (\text{III.10.19})$$

Dann ist, mit (III.10.18):

$$\boxed{\begin{aligned} \langle g | \hat{\rho} | e \rangle &= \frac{2g_0}{\gamma_{\text{tot}}} (\langle g | \hat{\rho} | g \rangle \hat{q}^\dagger - \hat{q}^\dagger \langle e | \hat{\rho} | e \rangle) \\ \langle e | \hat{\rho} | g \rangle &= \frac{2g_0}{\gamma_{\text{tot}}} (\hat{q} \langle g | \hat{\rho} | g \rangle - \langle e | \hat{\rho} | e \rangle \hat{q}) \end{aligned}} \quad (\text{III.10.20})$$

Setze (III.10.20) ein in (III.10.16):

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{\rho}}{dt} \text{F} = \frac{2g_0^2}{\gamma_{\text{tot}}} (\hat{q} \langle g | \hat{\rho} | g \rangle \hat{q}^\dagger - \hat{q} \hat{q}^\dagger \langle e | \hat{\rho} | e \rangle - \langle g | \hat{\rho} | g \rangle \hat{q}^\dagger \hat{q} + \hat{q}^\dagger \langle e | \hat{\rho} | e \rangle \hat{q}) \\ + \frac{\text{K}}{2} (\hat{q} \hat{\rho}_\text{F} \hat{q}^\dagger - \hat{q}^\dagger \hat{q} \hat{\rho}_\text{F}) + \text{h. c.} \quad (\text{III.10.21}) \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck enthält nun die Matrixelemente $\langle g | \hat{\rho} | g \rangle$ und $\langle e | \hat{\rho} | e \rangle$, ist also immer noch nicht abgeschlossen bzgl. $\hat{\rho}_\text{F}$!

III.10.6 Weitere Bewegungsgleichungen

Bewegungsgleichungen für $\langle g | \hat{\rho} | g \rangle$ und $\langle e | \hat{\rho} | e \rangle$: Nach (III.10.13) und (III.10.5) ist

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle e | \hat{\rho} | e \rangle = g_0 \hat{q} \langle g | \hat{\rho} | e \rangle + g_0 \langle e | \hat{\rho} | g \rangle \hat{q}^\dagger \\ + \Gamma_{\text{Pumpe}} \langle 0 | \hat{\rho} | 0 \rangle - W_{ge} \langle e | \hat{\rho} | e \rangle + \cancel{W_{eg} \langle 0 | \hat{\rho} | 0 \rangle} \end{aligned} \quad (\text{III.10.22})$$

Einsetzen von (III.10.20):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle e | \hat{\rho} | e \rangle = \frac{2g_0^2}{\gamma_{\text{tot}}} (2\hat{q} \langle g | \hat{\rho} | g \rangle \hat{q}^\dagger - \hat{q} \hat{q}^\dagger \langle e | \hat{\rho} | e \rangle - \langle e | \hat{\rho} | e \rangle \hat{q} \hat{q}^\dagger) \\ + \Gamma_{\text{Pumpe}} \langle 0 | \hat{\rho} | 0 \rangle - W_{ge} \langle e | \hat{\rho} | e \rangle + \cancel{W_{eg} \langle 0 | \hat{\rho} | 0 \rangle} \end{aligned} \quad (\text{III.10.23})$$

Die durchgestrichenen Terme mit W_{0g} werden hierbei gegen die Pumpe (Γ_{Pumpe}) vernachlässigt. Lösung der Differentialgleichung per Iterationsverfahren: Der Gleichgewichtszustand ist

$$\frac{d}{dt} \langle e | \hat{\rho} | e \rangle = 0$$

Annahme:

$$\boxed{\hat{\rho}_\text{F} \approx \langle 0 | \hat{\rho} | 0 \rangle} \quad (\text{III.10.24})$$

Der führende Term ist (mit (III.10.24)):

$$\langle e | \hat{\rho} | e \rangle \approx \frac{\Gamma_{\text{Pumpe}}}{W_{ge}} \hat{\rho}_\text{F} \quad (\text{III.10.25})$$

Weitere Ordnungen:

$$\langle e | \hat{\rho} | e \rangle \approx \frac{\Gamma_{\text{Pumpe}}}{W_{ge}} \hat{\rho}_\text{F} - \frac{2g_0^2}{\gamma_{\text{tot}} W_{ge}} (\hat{q} \hat{q}^\dagger \langle e | \hat{\rho} | e \rangle + \langle e | \hat{\rho} | e \rangle \hat{q} \hat{q}^\dagger) \quad (\text{III.10.26})$$

$$\langle e | \hat{\rho} | e \rangle \approx \frac{\Gamma_{\text{Pumpe}}}{W_{ge}} \hat{\rho}_\text{F} - \frac{2g_0^2 \Gamma_{\text{Pumpe}}}{\gamma_{\text{tot}} W_{ge}^2} (\hat{q} \hat{q}^\dagger \hat{\rho}_\text{F} + \hat{\rho}_\text{F} \hat{q} \hat{q}^\dagger) \quad (\text{III.10.27})$$

Der Term mit $\langle g | \hat{\rho} | g \rangle$ wird vernachlässigt. Entsprechend:

$$\frac{d}{dt} \langle g | \hat{\rho} | g \rangle = -g_0 \hat{q}^\dagger \langle g | \hat{\rho} | e \rangle \hat{q} + W_{ge} \langle e | \hat{\rho} | e \rangle - W_{0g} \langle g | \hat{\rho} | g \rangle$$

III Offene Systeme

Setze darin (III.10.20) ein:

$$\frac{d}{dt} \langle g | \hat{\rho} | g \rangle = \frac{2g_0^2}{\gamma_{\text{tot}}} (2\hat{q}^\dagger \langle e | \hat{\rho} | e \rangle \hat{q} - \hat{q}^\dagger \hat{q} \langle g | \hat{\rho} | g \rangle - \langle g | \hat{\rho} | g \rangle \hat{q}^\dagger \hat{q}) + W_{ge} \langle e | \hat{\rho} | e \rangle - W_{0g} \langle g | \hat{\rho} | g \rangle \quad (\text{III.10.28})$$

Stationärer Zustand:

$$\frac{d}{dt} \langle g | \hat{\rho} | g \rangle = 0$$

Annahme:

$$W_{ge} \ll W_{0g}$$

$$\langle g | \hat{\rho} | g \rangle \approx \frac{2g_0^2}{\gamma_{\text{tot}}} 2\hat{q}^\dagger \langle e | \hat{\rho} | e \rangle \hat{q}$$

Mit (III.10.25):

$$\langle g | \hat{\rho} | g \rangle \approx \frac{4g_0^2 \Gamma_{\text{Pumpe}}}{\gamma_{\text{tot}} W_{ge}} \hat{q}^\dagger \hat{\rho}_F \hat{q} \quad (\text{III.10.29})$$

(III.10.29) und (III.10.27) in (III.10.21) eingesetzt ergibt schließlich:

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{\rho}}{dt} = & G_1 \hat{q}^\dagger \hat{\rho}_F \hat{q} + G_2 \hat{q} \hat{q}^\dagger \hat{\rho}_F + \frac{K}{2} (\hat{q} \hat{\rho}_F \hat{q}^\dagger - \hat{q}^\dagger \hat{q} \hat{\rho}_F) \\ & + S_2 (\hat{q} \hat{q}^\dagger) \hat{\rho}_F (\hat{q} \hat{q}^\dagger) + S_3 (\hat{q} \hat{q}^\dagger)^2 \hat{\rho}_F \\ & + S_1 \hat{q}^\dagger \hat{\rho}_F (\hat{q} \hat{q}^\dagger) \hat{q} + \text{h. c.} \end{aligned} \quad (\text{III.10.30})$$

Die G_j und S_j sind Konstanten.

III.10.7 Struktur der Gleichung in Fock-Darstellung

Der Ausdruck

$$(\hat{q} \hat{q}^\dagger)^\dagger = \hat{q} \hat{q}^\dagger = \hat{1} + \hat{q}^\dagger \hat{q} \quad (\text{III.10.31})$$

ist in Fock-Darstellung diagonal! Betrachte die Erwartungswerte:

$$\langle \mathbf{n} | \hat{\rho}_F | \mathbf{m} \rangle = \rho_{\mathbf{n}\mathbf{m}} \quad (\text{III.10.32})$$

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{n} | \hat{q}^\dagger \hat{\rho}_F \hat{q} | \mathbf{m} \rangle &= \rho_{\mathbf{n}-1, \mathbf{m}-1} \\ \langle \mathbf{n} | (\hat{q}^\dagger \hat{q}) \left[\underbrace{\sum_{\mathbf{n}'} |\mathbf{n}'\rangle \langle \mathbf{n}'|}_{=\hat{1}} \right] \hat{\rho}_F | \mathbf{m} \rangle &= (\mathbf{n} + 1) \rho_{\mathbf{n}\mathbf{m}} \end{aligned} \quad (\text{III.10.33})$$

$$\langle \mathbf{n} | (\hat{q}^\dagger \hat{q}) \hat{\rho}_F (\hat{q}^\dagger \hat{q}) | \mathbf{m} \rangle = (\mathbf{n} + 1)(\mathbf{m} + 1) \rho_{\mathbf{n}\mathbf{m}}$$

$$\langle \mathbf{n} | (\hat{q}^\dagger \hat{q})^2 \hat{\rho}_F | \mathbf{m} \rangle = (\mathbf{n} + 1)^2 \rho_{\mathbf{n}\mathbf{m}}$$

$$\langle \mathbf{n} | \hat{q}^\dagger \hat{\rho}_F (\hat{q} \hat{q}^\dagger) \hat{q} | \mathbf{m} \rangle = (\mathbf{m} + 1) \rho_{\mathbf{n}-1, \mathbf{m}-1}$$

Dazu kommen noch die hermitesch konjugierten Terme $\sim \rho_{\mathbf{n}+1, \mathbf{m}+1}$ usw.

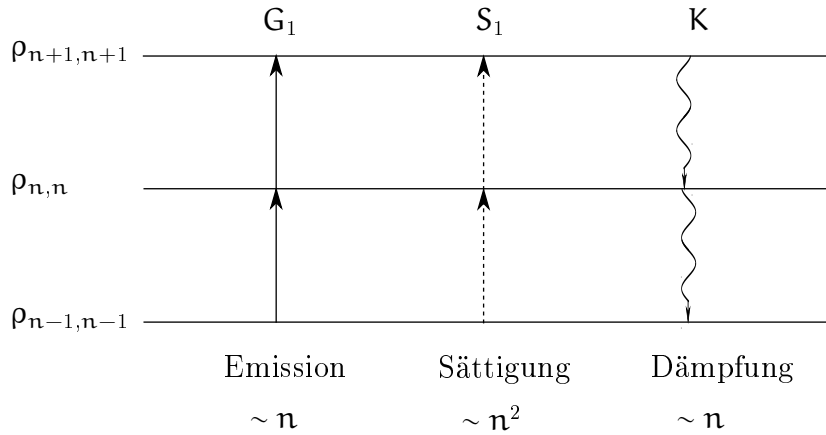


Abbildung III.18: Gleichung des Ein-Moden-Lasers in Fock-Darstellung: gemischter Zustand (vgl. (III.10.30))

Zeitableitung:

$$\dot{\rho}_{nm} = \alpha_{nm}\rho_{nm} + \beta_{nm}\rho_{n-1, m-1} + \gamma_{nm}\rho_{n+1, m+1} \quad (\text{III.10.34})$$

- Das Matrixelement ρ_{nm} koppelt nur zu Termen mit gleichem $n - m$!
Anfangsbedingungen bei $t = 0$:

$$\rho_{nm} = 0 \quad \text{für} \quad n \neq m \implies \rho_{nm} = 0 \quad \text{zu allen Zeiten!}$$

- Gemischter Zustand ρ_{nn} ! Ursache: Ausspuren der atomaren Freiheitsgrade. Siehe Abb. III.18, vgl. dazu auch (III.10.30). G_2, S_2, S_3 machen keine Übergänge!
 $|\alpha\rangle$ mit $|\alpha|^2 \gg 1$: Getriebenes System, Kohärenz überlebt ohne Dämpfung! Vgl. semiklassische Lösung, Jaynes-Cummings.

III.10.8 Wo bleibt die optische Kohärenz?

a. Glauber-Zustand:

$$\rho_{nm} = \langle n|\alpha\rangle \langle \alpha|m\rangle = \alpha^n (\alpha^m)^* \frac{e^{-|\alpha|^2}}{\sqrt{n!m!}} \quad (\text{III.10.35})$$

b. Oberhalb der Laser-Schwelle („phase diffused Glauber state“):

$$\rho_{nm} \approx \frac{(\alpha\alpha^*)^n}{n!} e^{-|\alpha|^2} \delta_{nm} \quad (\text{III.10.36})$$

Gleiche Photonenstatistik wie in (III.10.35), jedoch gilt für die mittlere Feldamplitude:

$$\langle \hat{q}^\dagger \rangle, \langle \hat{q} \rangle = 0$$

Dies gilt für jeden Fock-Zustand, also auch für eine Mischung von Fock-Zuständen!

- c. Vgl. K. Molmer, Optical coherence: A convenient fiction, PRA **55**, 3195 (1997)
Gemessen wird nicht $\langle \hat{q}^\dagger \rangle$, sondern $\langle \hat{q}^\dagger(\mathbf{t})\hat{q}(\mathbf{t} + \tau) \rangle$!

- d. Gibt es Glauber-Zustände?

Ja, im niederfrequenten Bereich, z. B. in der Radiotechnik: Dort existieren „klassische Quellen“ wie Antennen und makroskopische Schwingkreise. Im optischen Bereich ist die Quelle notwendigerweise quantenmechanisch, d. h. es tritt Verschränkung auf, was zu gemischten Zuständen des Subsystems führt.

- e. Beispiele:

Cummings-Kollaps und Wiederkehr, beruht nicht auf Kohärenz, sondern nur auf Gl. (III.10.36)!

Photodetektor: $\sim \langle \hat{E}^{(-)}\hat{E}^{(+)} \rangle$, Interferenz funktioniert mit Fock-Zuständen (siehe Skript Quantenoptik 1), die Phasen erhält man über Modentransformationen!

- f. Aufgrund der Kopplung zwischen ρ_{nm} und $\rho_{n,n\pm 1}$ müsste Gl. (III.10.30) eine ungerade Anzahl von Modenoperatoren enthalten! Kopplungen zwischen Diagonal- und Nicht-Diagonaltermen treten z. B. auf bei atomarer Kohärenz. Quasiklassische Näherung: siehe Bloch-Gleichungen, Abschnitt II.6

- g. Die endliche Kohärenzzeit kommt durch die Frequenzunschärfe $\Delta\tau_c \sim 1/\Delta\nu$. Es ist $\Delta\tau_c \rightarrow \infty$ für eine einzelne Mode, unabhängig von der Photonenstatistik! Beim Laserlicht ist $\Delta\nu$ klein und damit $\Delta\tau_c$ groß.

- h. Yamamoto, S. 277: Selbst für $\langle \mathbf{E}(0) \rangle \neq 0$ gilt

$$\langle \mathbf{E}(\mathbf{t}) \rangle = \langle \mathbf{E}(0) \rangle \cos \nu \mathbf{t} e^{-D\mathbf{t}/2}$$

mit $D \simeq \frac{1}{2} A / \langle \hat{n} \rangle$, A: spontane Emissionsrate

- i. Klassische Limites: z. B. Licht als Quelle (Jaynes-Cummings) ist geeignet, Atome als Quelle für Licht muss weiterhin quantenmechanisch betrachtet werden!
- j. Bedeutung von Referenzsystemen, Mollner-Debatte: siehe S. D. Bartlett, quant-ph/0507214