

Theoretische Quantenoptik I

Prof. Dr. Günter Mahler
Ausarbeitung von Georg Reuther

Wintersemester 2005/2006
korrigierte Fassung WS 2010/2011

Inhaltsverzeichnis

I. Einleitung	7
I.1. Was ist Licht?(Neu)	7
I.2. Elektrodynamik als Eichtheorie	8
I.3. Photon als Elementarteilchen	9
I.3.1. Bausteine	9
I.3.2. Die 4 Wechselwirkungen	9
I.4. Experimente zur Quanten-Natur des Lichts	10
II. Quantisierung des Strahlungsfeldes	12
II.1. Klassische Maxwell-Theorie	12
II.1.1. Homogene Maxwell-Gleichungen	12
II.1.2. Inhomogene Maxwell-Gleichungen	13
II.1.3. Poynting-Theorem (Energie-Bilanz)	13
II.1.4. Energiedichte für freie Strahlungsfelder ($\mathbf{j} = \mathbf{0}$)	14
II.1.5. Lagrange- und Hamilton-Dichte	15
II.2. Homogene Wellengleichung	15
II.2.1. Komplexer Lösungsansatz	15
II.2.2. Fortlaufende Wellen	17
II.3. Operatoren	18
II.3.1. Moden-Operatoren	18
II.3.2. Feld-Operatoren	21
II.3.3. „Quadratur-Operatoren“	22
II.4. Hamilton-Operator	24
II.5. Hilfsformeln	27
III. Elementare Input-Output-Analyse	29
III.1. Klassische Lichtquellen	29
III.2. Einzel-Photon-Quellen	30
III.3. Zwei-Photonen-Quellen	31
III.3.1. Kaskaden-Prozess (Experiment)	31
III.3.2. Parametric Down Conversion (PDC) Typ 1	33
III.3.3. Parametric Down Conversion Typ 2	33
III.3.4. Vier-Photonen-Zustand (Cluster-Zustände)	34
III.4. Detektion von Licht	34
III.4.1. Absorptive Messung	34
III.4.2. Globale Größen	36

III.4.3. „Coarse-Graining“	37
III.4.4. Detektoren	38
III.5. Phasen- und Phasenkontrolle	39
III.5.1. Interferenz-Muster	40
III.6. Theorie des Vierpols (Strahlteiler)	43
III.6.1. Modenselektion	43
III.6.2. Lineare Transformation	44
III.6.3. Quantenmechanische Formulierung – Heisenberg-Bild	46
III.6.4. Schrödinger-Bild (Exkurs)	47
III.7. Ein-Photon-Input am Strahlteiler	48
III.7.1. Direkte selektive Messung (Heisenberg Bild)	49
III.7.2. Koinzidenz-Messung (Heisenberg-Bild)	49
III.7.3. Homodyn-Messung („balanced homodyne detection“)	52
III.7.4. Doppel-Homodyn-Messungen	53
III.8. Ein-Photon-Interferometrie	54
III.8.1. Mach-Zehnder-Interferometer	54
III.8.2. Quantenmechanische Formulierung (Heisenberg-Bild)	55
III.8.3. Beispiel: Phasenschieber in der Teilchenoptik	56
III.9. Zwei-Photon-Interferometrie (Acht-Pol)	58
III.9.1. System	58
III.9.2. Koinzidenzmessungen	59
III.9.3. Lokale Messungen („Interferenz 2. Ordnung“)	60
III.9.4. Produktzustands-Input	61
III.9.5. Franson-Interferometer	62
III.9.6. Quantenoptischer M^2 -Pol (zu Abb. III.25)	63
III.10. „Welcher-Weg“-Information und Quantenradierer	64
III.10.1 Geht das?	64
III.10.2 Paradoxie: Beobachtung ohne Wechselwirkung	65
III.10.3 „Welcher-Weg“-Markierung durch klassisches Objekt	65
III.10.4 Welcher-Weg-Markierung durch inneren Freiheitsgrad (QM)	68
III.10.5 Quanten-Radierer	70
III.10.6 Welcher-Weg-Markierung: klassischer Limes („Teilchen-Optik“)	71
IV. Zustandsmodelle	73
IV.1. Charakteristische Zustandsparameter	73
IV.1.1. Von-Neumann-Entropie	73
IV.1.2. Momente des Dichteoperators	74
IV.1.3. Linearisierte Entropie	74
IV.1.4. Bures-Metrik (kommutatives Abstandsmaß)	75
IV.1.5. Tensorräume	76
IV.1.6. Reduzierte Entropien	76
IV.2. Photon-Statistik	78
IV.2.1. Fock-Darstellung von $\hat{\rho}$	78
IV.2.2. Schwankungs-Maße	79

IV.2.3. Spezielle statistische Modelle $P(\mathbf{n})$	79
IV.3. Korrelationsfunktionen	81
IV.3.1. Struktur	81
IV.3.2. Feld-Korrelationsfunktionen 1. Ordnung	81
IV.3.3. Anwendungen	83
IV.3.4. Feld-Korrelationsfunktionen 2. Ordnung	85
IV.3.5. Feld-Korrelationsfunktionen n-ter Ordnung	88
IV.4. Kohärente (Glauber-) Zustände	89
IV.5. Squeezed States	91
IV.6. Thermische Gleichgewichts-Zustände	94
IV.7. Bell-Zustände und „Quanten-Mirakel“	97
IV.7.1. Operator-Darstellungen in $SU(2)$	97
IV.7.2. Bell-Zustände ($N=2$)	98
IV.7.3. GHZ-Zustände ($N = 3$)	100
IV.7.4. Anwendungen	101
IV.8. Bell-Ungleichung und Quantenkryptographie	107
IV.8.1. Paradoxon von Einstein-Podolski-Rosen (EPR)	107
IV.8.2. Bell-Ungleichung	108
IV.8.3. Anwendung: Quantenkryptographie	109
IV.8.4. GHZ-Zustände ($N = 3$) und lokaler Realismus	111

Literaturverzeichnis

- [1] R. Loudon, The Quantum Theory of Light, 1983
- [2] D.J. Walls, G.J. Milburn, Quantum Optics, 1994
- [3] P. Meystre, M. Sargent II, Elements of Quantum Optics, 1991
- [4] H. Haken, Licht und Materie I, 1979
- [5] W. Vogel, D.G. Welsch, Lectures on Quantum Optics, 1994
- [6] H. Carmichael, An Open System Approach to Quantum Optics, Lecture Notes in Physics m 18, 1993
- [7] P.R. Berman (ed.), Cavity QED, Academic, 1994
- [8] L. Mandel, E. Wolf, Optical Coherence and Quantum Optics, Cambridge UP, 1995
- [9] M.O. Scully, M. Zubary, Quantum Optics, Cambridge UP, 1997
- [10] G. Mahler, V. Weberruß, Quantum Networks, Springer, 1995, 1998
- [11] H. Paul: Photonen, Vieweg, 1995
- [12] C. Cohen-Tannoudji et al, Photons and Atoms (S. 16-45), Wiley, 1989
- [13] H.A. Bachor, A Guide to Experiments in Quantum Optics, Wiley-VCH, 1998
- [14] H. Römer, Theoretical Optics, VCH, 2005
- [15] H. Haus, Electromagnetic Noise and Quantum Optical Measurements, Springer
- [16] U. Leonhardt, Measuring the Quantum State of Light, Cambridge UP, 1997

I. Einleitung

I.1. Was ist Licht?(Neu)

Im Gegensatz z. B. zu elektrischen Phänomenen sind optische leicht und direkt zu betrachten, jedoch schwierig zu interpretieren (Verstehen = Interpretieren!) → Optische Instrumente / Technik.

- Demokrit (460–371 v. Chr.): Atomistisches Modell, d. h. alle Objekte bestehen aus Atomen, die sich durch den leeren Raum bewegen. Lichtstrahlen sind ein geradliniger Fluss von „Licht-Teilchen“. Farbe beruht auf verschiedenen Formen oder Größen der Lichtteilchen
- Aristoteles (384–322 v. Chr.): Leerer Raum inakzeptabel. Licht keine Substanz, sondern eine Qualität. Farbe ist eine sichtbare Eigenschaft von Objekten. Licht ist die „Farbe des Transparenten“.
- R. Boyle (1622–1691): Korpuskular-Theorie des Lichts. Verschiedene Farben entsprechen verschiedenen Geschwindigkeiten.
- René Descartes (1596–1650) „Plenistic theory“: Globales, raum-füllendes Medium. Physikal. Vakuum = Widerspruch in sich selbst. Res extensa; drei Typen von Materie, die zusammen den Raum vollständig ausfüllen. Diese Typen sind: „Äther“, „Kugelförmige (starre) Materie“, Volumen-Materie (bulk). Licht resultiert aus Druck auf Kugel-Materie durch Äther. Wegen direktem Kontakt ist die Lichtgeschwindigkeit unendlich groß.
- R. Hooke (1635–1703): Licht als Longitudinal-Welle im Äther. Farben entsprechen verschiedenen Modifikationen von weißem Licht.
- Isaac Newton (1643–1724): Korpuskular-Theorie des Lichts. Zerlegung von weißem Licht (Prisma) in unzerlegbare (Farb-) Bestandteile. Einflussreich: Optics Band 1-3
- J. B. Biot (1770–1862): Letzter Vertreter der Korpuskular-Theorie. Licht-Teilchen durchdringen Oberfläche, wenn sie mit scharfer Spitze auftreffen, und werden reflektiert, wenn sie mit flacher Seite auftreffen.
- T. Young, 1817: Licht besteht aus transversalen Wellen.
- Ende des 19. Jahrhunderts, Krise: Negatives Ergebnis des Michelson-Morley-Experiments (Äther). Außerdem nach Rayleigh-Jeans: UV-Katastrophe der Schwarzkörperstrahlung: Energiedichte $\sim \omega^2 k_B T$

I. Einleitung

- Max Planck (1858–1947): Lösung über Quantisierung der Oszillator-Energien in den Gefäß-Wänden, nicht Quantisierung des Feldes!
- 1905 „Annus mirabilis“ (Einstein):
Einsteins Konzept des Photons beruht **nicht** auf dem photoelektrischen Effekt. Stattdessen vergleicht er Entropie des idealen Gases im Volumen V mit der Entropie von Strahlung im Hohlraum V : $S \sim \ln V_g$ für beide Fälle! Wegen der Analogie: Licht besteht aus Teilchen (heuristisch). Dann fragt er sich, wo solche Quanten eine Rolle spielen könnten. Photoelektrischer Effekt. Experimentell bestätigt durch Millikan 1915. Erhaltung von Energie und Impuls. Der Konflikt zwischen Korpuskular-Theorie und Interferenz konnte aber erst durch die QM und die QED gelöst werden.

I.2. Elektrodynamik als Eichtheorie

Klassische Mechanik: Globale Transformationen (Translationen, Rotationen) \rightarrow Invarianz. Fundamentale Feldgleichungen haben **neue** Invarianz-Eigenschaften bezüglich lokalen Eichtransformationen! (Vgl. Scully, p.146 f.)

Literatur: S. Weinberg, Phys. Today June 1975, S. 32

„Fundamentale Feldgleichungen müssen eichinvariant sein.“

Betrachte die Schrödinger-Gleichung:

$$i\hbar \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \rho \quad (\text{I.2.1})$$

Wahrscheinlichkeitsdichte:

$$w(\mathbf{r}, t) = |\rho(\mathbf{r}, t)|^2 \quad (\text{I.2.2})$$

Forderung: Alle physikalischen Experimente sind gleich, auch bei Ersetzung

$$\rho(\mathbf{r}, t) \rightarrow \tilde{\rho}(\mathbf{r}, t) = e^{if(\mathbf{r}, t)} \rho(\mathbf{r}, t) \quad (\text{I.2.3})$$

(Eichtransformation über ein "Phasenfeld", f , d. h. nicht global)

Aber, wenn eingesetzt in die Schrödinger-Gleichung, folgt:

$$i\hbar \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \left[(\nabla + i\nabla f)^2 - \frac{2m}{\hbar} \frac{\partial f}{\partial t} \right] \tilde{\rho} \quad (\text{I.2.4})$$

Betrachte nun statt (I.2.1)

$$i\hbar \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} [(\nabla + i\mathbf{A})^2 + V] \rho \quad (\text{I.2.5})$$

mit \mathbf{A} als zunächst beliebigem Vektorfeld und V als skalarem Feld. Dann lässt sich Eichinvarianz erreichen, wenn

$$\mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{A} + \nabla f \tag{I.2.6}$$

$$V \longrightarrow V - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial f}{\partial t} \tag{I.2.7}$$

Diese Trafo lässt auch die folgenden Felder invariant:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \tag{I.2.8}$$

$$\mathbf{E} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \tag{I.2.9}$$

Die Wahrscheinlichkeit, ein Teilchen an einem bestimmten Ort anzutreffen, hängt nun nicht mehr ab von der Phase f . Der Versuch, dies in Gl. (I.2.5) einzubauen, führt zu den Feldern der Elektrodynamik (Eichtheorie)!

I.3. Photon als Elementarteilchen

A. Einstein (1951) nach H. Paul, S. 4:

„Die ganzen 50 Jahre bewusster Grübeleien haben mich der Antwort der Frage „Was sind Lichtquanten?“ nicht näher gebracht. Heute glaubt zwar jeder Lump, er wisse es, aber er täuscht sich ...“

QED (vgl. S. Weinberg, Phys. Today, June 1975, S. 32)

I.3.1. Bausteine

	Ladung e	Spin \hbar	Masse (MeV/c^2)	Lebensdauer (s)
Photon	0	1	0	∞
Graviton (?)	0	2	0	∞
Elektron	± 1	$1/2$	0,511	∞
Proton	1	$1/2$	938	∞
π -Meson	± 1	0	139	$2,6 \cdot 10^{-8}$
	0	0	135	$0,8 \cdot 10^{-16}$

I.3.2. Die 4 Wechselwirkungen

Experimenteller Nachweis des Photons, u.a. durch A. Zeilinger (vgl. Review Nature, **433**, 230 (2005)). Abschätzungen:

- Photonenmasse $\leq 10^{-50} \text{kg}$ (2004), Rep. Progr. Phys **68**, 77
- Ladung $\leq 10^{-17} e$ (1992), Am. J. Phys **60**, 750

Literatur: Teilchen, Felder, Symmetrien (Spektrum des Wissens, 1984)

I. Einleitung

Wechselwirkung	Gravitation	El.-Magnet.	Starke	Schwache
wirkt auf	alles	geladene Teilchen	Hadronen (Quarks)	Hadronen, Leptonen
Asymptotische Stärke ($r \rightarrow 0, \hbar = c = m_p = 1$)	$5,9 \cdot 10^{-39}$	$e^2 = \frac{1}{137}$	$g^2 \approx 1$	$1 \cdot 10^{-5}$
Austausch von virtuellen Teilchen	Gravitonen (?) (masselos)	Photonen (masselos)	Gluonen	W,Z-Bosonen

I.4. Experimente zur Quanten-Natur des Lichts

Die Suche nach eindeutigen Quanten-Phänomenen gestaltete sich zunächst schwierig. Die Notwendigkeit der Quantisierung war umstritten. (Semiklassisch: Stochastische Elektrodynamik, Boyer, 1975). Literatur: A. Zeilinger.

a. Strahlteiler

Grangier 1986: mit einzeltem Photon. Keine Koinzidenz der Detektoren-Klicks. Anwendung: Zufallszahlen-Generator (vgl. Galton-Brett, III.7.2)

b. Photonstatistik eines einzelnen Ions (Walther 1987, Clauser 1974)

c. Doppelspalt-Experiment mit einzeltem Photon (Zeilinger 2000). ψ hat Bedeutung für einzelne Teilchen. Hierzu Feynmans Argumentation: „Hier sollte das Photon ‚wissen‘, dass es niemals an den Stellen der Interferenz-Knoten auftreten darf.“

d. Zwei-Photon-Interferenz am Strahlteiler: Falls zwei Photonen unabhängig eintreffen: Wie unter a, falls gleichzeitig (symmetrischer Zustand):

Keine Koinzidenz! Beide Photonen sind zu 50% oben **oder** unten. „Bosonischer Charakter“. Antisymmetrischer Zustand ψ^- als Input: Immer 1 oben, 1 unten! (vgl. III.9.2).

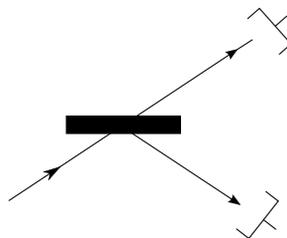


Abbildung I.1.: Schema eines Strahlteilers

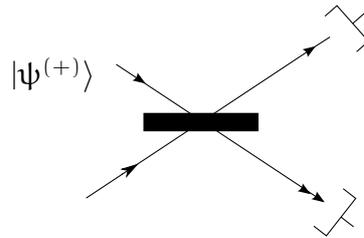


Abbildung I.2.: Zwei-Photon-Interferenz am Strahlteiler

- e. **Komplementarität:** Einstein dachte, es sei möglich, ein Interferenzmuster zu beobachten und gleichzeitig zu wissen, durch welchen Spalt jedes Photon geht. Dies wurde durch Bohr widerlegt. Pfad-Information zerstört Interferenz. Teilweise Pfad-Information zerstört Interferenz nur teilweise. Zou, Mandel (1991), Scully und Rempe: Quantum Eraser (vgl. III.10.5).
- f. **Nichtlokalität und Bell:** Aspect 1982 bestätigt Verletzung der Bell-Ungleichung für EPR-Zustände. Aber: **Kommunikations-Loophole** (Information über Polarisatoren könnte beim Detektor vorhanden sein) wurde geschlossen durch rasche zeitliche Veränderung der Polarisatoren (Aspect 1982, vgl. IV.8.2).
Detektions-Loophole: Nur eine kleine Untermenge der Photon-Ereignisse wird registriert, welche die QM bestätigen („Verschwörung“). Das Loophole wird geschlossen durch Messung an zwei Ionen im Resonator (2001). Dort ist allerdings der Abstand der beiden Teilchen sehr klein.
- g. **GHZ-Zustände:** Jedes Einzelexperiment verletzt den lokalen Realismus (Bouwmeester, 2000)! (Vgl. IV.7.3).
- h. Weitere experimentelle Szenarien:
- QND-Messung einzelner Photonen (1999)
 - Verschränkung von Atomen mit Cavity-Photonen
 - Wechselwirkung von einzelnen Atomen mit einzelnen Photonen

II. Quantisierung des Strahlungsfeldes

II.1. Klassische Maxwell-Theorie

II.1.1. Homogene Maxwell-Gleichungen

$$\boxed{\operatorname{div} \mathbf{B} = 0} \quad (\text{II.1.1})$$

$$\boxed{\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}} \quad (\text{II.1.2})$$

Elektrodynamische Potentiale \mathbf{A}, Φ („Eichfelder“ vgl. I.2): Setze

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A} \quad (\text{II.1.3})$$

ein in (II.1.2):

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) &= 0 \\ \implies \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} &= -\nabla \Phi \end{aligned} \quad (\text{II.1.4})$$

Eichtransformation (vgl. (I.2.6), (I.2.7)):

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &\longrightarrow \mathbf{A} + \nabla \chi = \mathbf{A}' \\ \Phi &\longrightarrow \Phi - \frac{\partial \chi}{\partial t} = \Phi' \end{aligned}$$

Damit ergibt sich Eichsymmetrie:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}' &= -\nabla \Phi' - \frac{\partial \mathbf{A}'}{\partial t} = \mathbf{E} \\ \mathbf{B}' &= \operatorname{rot} \mathbf{A}' = \mathbf{B} \end{aligned}$$

Strahlungs- (Coulomb-) Eichung:

$$\begin{aligned} \nabla \mathbf{A} &= 0 \\ \nabla \mathbf{A}' &= \nabla \mathbf{A} + \Delta \chi \stackrel{!}{=} 0 \\ \implies \Delta \chi &= 0 \end{aligned} \quad (\text{II.1.5})$$

II.1.2. Inhomogene Maxwell-Gleichungen

$$\text{div } \mathbf{E} = \rho / \epsilon_0 \quad (\text{II.1.6})$$

$$\text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (\text{II.1.7})$$

$$\epsilon_0 \mu_0 \equiv \frac{1}{c^2} \quad (\text{II.1.8})$$

Setze (II.1.4) ein in (II.1.6):

$$-\Delta \Phi - \frac{\partial}{\partial t} \nabla \mathbf{A} = \rho / \epsilon_0 \quad (\text{II.1.9})$$

Setze (II.1.3), (II.1.4) ein in (II.1.7):

$$\begin{aligned} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) &= \mu_0 \mathbf{j} + \epsilon_0 \mu_0 \left(\nabla \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} \right) \\ \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) &= \nabla(\nabla \mathbf{A}) - \Delta \mathbf{A} \\ \implies \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \Delta \mathbf{A} + \nabla(\nabla \mathbf{A}) &= \mu_0 \mathbf{j} - \frac{1}{c^2} \nabla \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) \end{aligned} \quad (\text{II.1.10})$$

Strahlungs-Eichung (nicht Lorentz-invariant): Setze (II.1.5) ein in (II.1.9), (II.1.10)

$$\Delta \Phi = -\rho / \epsilon_0 \quad (\text{II.1.11})$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \Delta \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{j}^T \quad (\text{II.1.12})$$

Transversaler Strom:

$$\mathbf{j}^T = \mathbf{j} - \epsilon_0 \nabla \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) \quad (\text{II.1.13})$$

Anmerkungen:

- Gl. (II.1.11): „Instantanes Coulomb-Potential“ wie in Elektrostatik, aber mit \mathbf{t} als Parameter
- Gl. (II.1.12): Inhomogene Wellengleichung für transversales Vektorpotential $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}^T$ (Index T zukünftig weglassen)

II.1.3. Poynting-Theorem (Energie-Bilanz)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= -\text{rot } \mathbf{E} & | \cdot \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \\ \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &= \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0} \text{rot } \mathbf{B} - \frac{1}{\epsilon_0} \mathbf{j} & | \cdot \epsilon_0 \mathbf{E} \end{aligned}$$

II. Quantisierung des Strahlungsfeldes

Addiere beide Gleichungen:

$$LS = \frac{1}{\mu_0} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \mathbf{B} + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \mathbf{E} = \frac{\partial}{\partial t} u_F$$

$$\boxed{u_F = \frac{1}{2} \left(\varepsilon_0 \mathbf{E}^2 + \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}^2 \right)} \quad (\text{II.1.14})$$

$$RS = \frac{1}{\mu_0} (-\mathbf{B} \operatorname{rot} \mathbf{E} + \mathbf{E} \operatorname{rot} \mathbf{B}) - \mathbf{j} \mathbf{E}$$

$$\nabla (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \operatorname{rot} \mathbf{E} - \mathbf{E} \operatorname{rot} \mathbf{B} \quad (\text{II.1.15})$$

Poynting-Vektor:

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \quad (\text{II.1.16})$$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t} u_F + \operatorname{div} \mathbf{S} = -\mathbf{j} \mathbf{E}} \quad (\text{II.1.17})$$

II.1.4. Energiedichte für freie Strahlungsfelder ($\mathbf{j} = 0$)

Es gilt $\mathbf{j} = 0$ und $\rho = 0$, damit folgt aus Gl. (II.1.11): $\Phi = 0$ und aus Gl. (II.1.14), (II.1.3) und (II.1.4):

$$u_F = \frac{\varepsilon_0}{2} \dot{\mathbf{A}}^2 + \frac{1}{2\mu_0} (\nabla \times \mathbf{A})^2 \quad (\text{II.1.18})$$

Der zweite Term lässt sich umformen (Stumpf, Thermo I, S. 341)

$$\int_V d^3r (\mathbf{u} \operatorname{rot} \mathbf{v} - \mathbf{v} \operatorname{rot} \mathbf{u}) = \int_{\partial V} df (\mathbf{v} \times \mathbf{u}) \quad (\text{II.1.19})$$

Mit $\mathbf{u} = \nabla \times \mathbf{A}$, $\mathbf{v} = \mathbf{A}$ erhält man

$$\int_V d^3r [(\nabla \times \mathbf{A})(\nabla \times \mathbf{A})] = \int_V d^3r \mathbf{A} [\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A})] + \int_{\partial V} df \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{A})$$

Das Oberflächen-Integral (über ∂V) verschwindet auf Grund der entsprechenden Randbedingungen für $V \rightarrow \infty$. Außerdem gilt: (Summen-Konvention)

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \underbrace{\nabla (\nabla \mathbf{A})}_{=0 \text{ (Eichung)}} - \Delta \mathbf{A}$$

$$\int_V d^3r (\nabla \times \mathbf{A})^2 = - \int_V d^3r \mathbf{A} (\nabla^2 \mathbf{A}) = - \int_V d^3r A_i \frac{\partial}{\partial r_j} \frac{\partial}{\partial r_j} A_i = \int_V d^3r A_{i,j} A_{i,j}$$

mit partieller Integration, Schreibweise $A_{i,j} \equiv \partial A_i / \partial r_j$.

$$\Rightarrow \boxed{u_F = \frac{\varepsilon_0}{2} \dot{A}_i \dot{A}_i + \frac{1}{2\mu_0} A_{i,j} A_{i,j}} \quad (\text{II.1.20})$$

II.1.5. Lagrange- und Hamilton-Dichte

Weiterhin gilt die Summenkonvention. Behauptung:

$$\mathcal{L}(\dot{\mathbf{A}}_i, \mathbf{A}_{i,j}) \equiv \frac{\epsilon_0}{2} \dot{\mathbf{A}}_i \dot{\mathbf{A}}_i - \frac{1}{2\mu_0} \mathbf{A}_{i,j} \mathbf{A}_{i,j} \quad (\text{II.1.21})$$

Konjugierte Impulsdichte:

$$\Pi_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{A}}_i} = \epsilon_0 \dot{\mathbf{A}}_i = -\epsilon_0 \mathbf{E}_i \quad (\text{II.1.22})$$

Dabei ist Π_i der kanonisch konjugierte Impuls zu \mathbf{A}_i .

Behauptung: Lagrange-Gleichung für ein Vektorfeld \mathbf{A}_i zu gegebenem \mathcal{L} (ohne Beweis):

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{A}_i} - \frac{d}{dr_j} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{A}_{i,j}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{A}}_i} = 0 \quad (\text{II.1.23})$$

Gl. (II.1.21) in (II.1.22) eingesetzt ergibt die Wellengleichung (II.1.12) mit $\mathbf{j}^T = 0$:

$$\boxed{\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \Delta \mathbf{A} = 0} \quad (\text{II.1.24})$$

Die Hamilton-Dichte erhält man durch eine Legendre-Transformation:

$$\mathcal{H}(\Pi_i, \mathbf{A}_{i,j}) = \Pi_i \dot{\mathbf{A}}_i - \mathcal{L} \quad (\text{II.1.25})$$

$$\boxed{\mathcal{H} = \frac{1}{2\epsilon_0} \Pi_i \Pi_i + \frac{1}{2\mu_0} \mathbf{A}_{i,j} \mathbf{A}_{i,j} = u_F} \quad (\text{II.1.26})$$

Das Hamilton-Funktional ist

$$\mathbb{H}[\Pi_i, \mathbf{A}_{i,j}] = \int d^3 \mathbf{r} \mathcal{H} \quad (\text{II.1.27})$$

II.2. Homogene Wellengleichung

II.2.1. Komplexer Lösungsansatz

(Wellengleichung (II.1.12), (II.1.24) \Rightarrow „freies Feld“)

$$\boxed{\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{A}_l = \Delta \mathbf{A}_l \quad c^2 = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} \quad l = \{1, 2, 3\}} \quad (\text{II.2.1})$$

Zerlegung in komplex konjugierte Anteile:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_l(\mathbf{r}_j, t) &= \mathbf{A}_l^{(+)}(\mathbf{r}_j, t) + \mathbf{A}_l^{(-)}(\mathbf{r}_j, t) \\ \text{mit } \mathbf{A}_l^{(-)}(\mathbf{r}_j, t) &= (\mathbf{A}_l^{(+)}(\mathbf{r}_j, t))^* \end{aligned} \quad (\text{II.2.2})$$

II. Quantisierung des Strahlungsfeldes

Klassisch ist dieser Ansatz nur ein Trick, denn in der klassischen Theorie kann man zwischen Absorption $A_1^{(+)}$ und Emission $A_1^{(-)}$ nicht unterscheiden, nur der Realteil von A_1 kann gemessen werden. In der Quantentheorie: Atome im Grundzustand messen $A_1^{(+)}$! Vgl. Kapitel III.4.

Variablen-Trennung (funktioniert nicht im Reellen!):

$$A_1^{(+)}(\mathbf{r}_j, t) = \mathbf{q}(t)\mathbf{u}_1(\mathbf{r}_j) \quad (\text{II.2.3a})$$

$$A_1^{(-)}(\mathbf{r}_j, t) = \mathbf{q}^*(t)\mathbf{u}_1^*(\mathbf{r}_j) \quad (\text{II.2.3b})$$

Setze $A_1^{(+)}$ ein in Gl. (II.2.1) und ordne:

$$\frac{1}{c^2} \frac{1}{\mathbf{q}} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{q} = \frac{1}{\mathbf{u}_1} \Delta \mathbf{u}_1 \stackrel{!}{=} \text{const} \equiv -\frac{\omega^2}{c^2} \leq 0 \quad (\text{II.2.4})$$

(sonst keine Wellen!)

Moden-Gleichungen:

$\frac{d^2}{dt^2} \mathbf{q} + \omega^2 \mathbf{q} = 0$	(II.2.5a)
$\Delta \mathbf{u}_1 + \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{u}_1 = 0$	(II.2.5b)
$\text{div } \mathbf{u} = 0 \quad \text{NB!}$	

Dabei stellt $\mathbf{u}_1(\mathbf{r}_j)$ die räumliche, transversale Modenstruktur dar und hat dabei dieselbe Dimension wie A_1 . Der Parameter \mathbf{q} ist dimensionslos.

Lösung:

a.

$$\begin{aligned} \mathbf{q}(t) &= \mathbf{q}(0)e^{-i\omega t} \longrightarrow A^{(+)} && \text{„positive Frequenz“} \\ \mathbf{q}^*(t) &= \mathbf{q}^*(0)e^{+i\omega t} \longrightarrow A^{(-)} && \text{„negative Frequenz“} \end{aligned} \quad (\text{II.2.6})$$

Diese Bezeichnungen sind historisch bedingt (Signaltheorie).

b. Moden-Modelle: definiert über Randbedingungen und Selektion (experimentelle Bedingungen). Beispiele:

- Fortlaufende Wellen (Strahlen)
- stehende Wellen (Resonator-Moden)
- sphärische Wellen (Feld um Punkt-Quellen)

II.2.2. Fortlaufende Wellen

Periodische Randbedingungen:

$$\mathbf{u}(x, y, z) = \mathbf{u}(x + L, y, z) \quad (\text{II.2.7})$$

Ansatz:

$$\mathbf{u}_{\mathbf{k}\nu}(\mathbf{r}) = \mathbf{u}_{\mathbf{k}\nu}(0)e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \quad (\nu = \text{Pol.-Index, s. u.}) \quad (\text{II.2.8})$$

in (II.2.5b):

$$\Delta \mathbf{u}_{\mathbf{k}\nu} = -|\mathbf{k}|^2 \mathbf{u}_{\mathbf{k}\nu}$$

$$\boxed{\Rightarrow \frac{\omega_{\mathbf{k}}^2}{c^2} = |\mathbf{k}|^2} \quad (\text{II.2.9a})$$

$$\rho_{\mathbf{k}} = \frac{V}{(2\pi)^3} \quad (\text{II.2.9b})$$

 Hierbei ist ρ die Zustandsdichte im \mathbf{k} -Raum, und mit den Gln. (II.2.7) und (II.2.8) gilt:

$$k_j = \frac{2\pi}{L} n_j \quad (n_j = 0, \pm 1, \pm 2 \dots) \quad V = L^3; \quad j = 1, 2, 3$$

Normierung:

$$\boxed{\mathbf{u}_{\mathbf{k}\nu} \equiv \left(\frac{\hbar}{2\varepsilon_0 \omega_{\mathbf{k}} V} \right)^{1/2} \mathbf{e}_{\mathbf{k}\nu} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}} \quad (\text{II.2.10a})$$

$$\mathbf{u}_{\mathbf{k}\nu}^* = \mathbf{u}_{-\mathbf{k}\nu} \quad (\text{II.2.10b})$$

$$\omega_{\mathbf{k}} = \omega_{-\mathbf{k}} = c |\mathbf{k}| \quad (\text{II.2.10c})$$

 Polarisations-Index ν :

$$\text{div } \mathbf{u}_{\mathbf{k}\nu} = i\mathbf{k} \mathbf{u}_{\mathbf{k}\nu} \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{e}_{\mathbf{k}\nu} \perp \mathbf{k} \quad \nu = 1, 2 \quad (\text{II.2.11})$$

 Orthogonalität: Polarisation zu festem \mathbf{k} (Einheitsvektoren $\mathbf{e}_{\mathbf{k}\nu}$ reell):

$$\boxed{\mathbf{e}_{\mathbf{k}\nu} \mathbf{e}_{\mathbf{k}'\nu'} = \delta_{\nu\nu'}} \quad (\text{II.2.12})$$

$$\int d^3\mathbf{r} \mathbf{u}_{\mathbf{k}\nu}(\mathbf{r}) \mathbf{u}_{\mathbf{k}'\nu'}^*(\mathbf{r}) = \frac{\hbar}{2\varepsilon_0 V} \frac{1}{(\omega_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k}'})^{1/2}} \underbrace{\int d^3\mathbf{r} e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\mathbf{r}} \cdot \mathbf{e}_{\mathbf{k}\nu} \mathbf{e}_{\mathbf{k}'\nu'}}_{=V \cdot \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}}$$

Aus (II.2.12) folgt:

$$\boxed{\int d^3\mathbf{r} \mathbf{u}_{\mathbf{k}\nu}(\mathbf{r}) \mathbf{u}_{\mathbf{k}'\nu'}^*(\mathbf{r}) = \frac{\hbar}{2\varepsilon_0 \omega_{\mathbf{k}}} \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \delta_{\nu\nu'}} \quad (\text{II.2.13})$$

II. Quantisierung des Strahlungsfeldes

Die $\mathbf{u}_{\mathbf{k}\nu}$ bilden also ein vollständiges Orthonormalsystem (VONS). Entsprechend gilt:

$$\sum_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')} = V\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \quad (\text{II.2.14})$$

Die allgemeine Moden-Darstellung schreibt sich

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{k}, \nu} q_{\mathbf{k}\nu}(t) \mathbf{u}_{\mathbf{k}\nu}(\mathbf{r}) + \text{c.c.} \quad (\text{II.2.15})$$

Skalares Potential: $\Phi \equiv 0$. Der Zusammenhang mit den Feldern (II.1.3), (II.1.4) ist dann:

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \text{rot } \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \\ \mathbf{E} &= -\dot{\mathbf{A}}(\mathbf{r}, t) \end{aligned} \quad (\text{II.2.16})$$

II.3. Operatoren

Anmerkungen: Die direkte Quantisierung der Felder ist problematisch aufgrund der Nebenbedingung $\text{div } \mathbf{A} = 0$. Das Standardverfahren der kanonischen Feldquantisierung, d. h. der Einführung konjugierter Feldgrößen, wird hier also nicht benutzt. Statt dessen Quantisierung über Moden:

II.3.1. Moden-Operatoren

$$\begin{aligned} q_{\mathbf{k}\nu}(t) &\longrightarrow \hat{q}_{\mathbf{k}\nu}(t) \\ q_{\mathbf{k}\nu}^*(t) &\longrightarrow \hat{q}_{\mathbf{k}\nu}^\dagger(t) \end{aligned} \quad (\text{II.3.1})$$

mit den Kommutatoren (vgl. harmonischer Oszillator–Erzeuger, Vernichter):

$$\begin{aligned} \left[\hat{q}_{\mathbf{k}\nu}(t), \hat{q}_{\mathbf{k}'\nu'}^\dagger(t) \right] &= \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \delta_{\nu\nu'} \\ \left[\hat{q}_{\mathbf{k}\nu}(t), \hat{q}_{\mathbf{k}'\nu'}(t) \right] &= 0 \\ \left[\hat{q}_{\mathbf{k}\nu}^\dagger(t), \hat{q}_{\mathbf{k}'\nu'}^\dagger(t) \right] &= 0 \end{aligned} \quad (\text{II.3.2})$$

Hier: Postulat. Heuristische Begründung: Vgl. Quadratur-Operatoren. Beachte: \mathbf{r} und t bzw. Moden-Indizes sind keine Observable, sondern (klassische) Parameter!

Fock-Zustände

Besetzungszahl-Operator:

$$\hat{n}_{\mathbf{k}\nu} = \hat{q}_{\mathbf{k}\nu}^\dagger \hat{q}_{\mathbf{k}\nu} \quad (\text{II.3.3})$$

$$\hat{N} = \sum_{\mathbf{k},\nu} \hat{n}_{\mathbf{k}\nu} \quad (\text{II.3.4})$$

Fock-Zustände:

$$\hat{N} |\phi_N\rangle = N |\phi_N\rangle \quad (\text{II.3.5})$$

 $N = 0$: Photon-Vakuum (Tensorprodukt)

$$|0\rangle = |0_{\mathbf{k}_1\nu_1}\rangle \otimes |0_{\mathbf{k}_2\nu_2}\rangle \otimes \dots$$

Def:

$$\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_1 \mathbf{b}_2 & \dots \\ \mathbf{a}_2 \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_2 \mathbf{b}_2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

 Hier: \mathbf{a}, \mathbf{b} Vektoren.

Ein-Photon-Zustand ($N = 1$)

$$|1_{\mathbf{k}\nu}\rangle_t = |\mathbf{k}\nu\rangle_t \equiv \hat{q}_{\mathbf{k}\nu}^\dagger(t) |0\rangle, \quad \hat{q}_{\mathbf{k}\nu} |0\rangle = 0 \quad (\text{II.3.6a})$$

$$\hat{n}_{\mathbf{k}\nu} |\mathbf{k}\nu\rangle_t = \hat{q}_{\mathbf{k}\nu}^\dagger \underbrace{\hat{q}_{\mathbf{k}\nu} \hat{q}_{\mathbf{k}\nu}^\dagger}_{=1+\hat{q}_{\mathbf{k}\nu}^\dagger \hat{q}_{\mathbf{k}\nu}} |0\rangle = 1 |\mathbf{k}\nu\rangle_t \quad (\text{II.3.6b})$$

$$\langle 1_{\mathbf{k}\nu}| = |1_{\mathbf{k}\nu}\rangle_t^\dagger = \langle 0| \hat{q}_{\mathbf{k}\nu} \quad (\text{II.3.6c})$$

Allgemein: (Moden-Überlagerung):

$$|\phi_1\rangle = \sum_{\mathbf{k},\nu} c_{\mathbf{k}\nu} |\mathbf{k}\nu\rangle; \quad c_{\mathbf{k}\nu} = \langle \mathbf{k}\nu | \phi_1 \rangle$$

 Zustandsvektor im $N = 1$ Unterraum: $\mathbf{C} = \{C_{\mathbf{k}_1\nu_1}, C_{\mathbf{k}_2\nu_2}, C_{\mathbf{k}_3\nu_3}, \dots\}$

$$\hat{N} |\phi_1\rangle_t = \sum_{\mathbf{k},\nu} \sum_{\mathbf{k}',\nu'} \hat{q}_{\mathbf{k}'\nu'}^\dagger \underbrace{\hat{q}_{\mathbf{k}'\nu'} \hat{q}_{\mathbf{k}\nu}^\dagger}_{\delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \delta_{\nu\nu'} + \hat{q}_{\mathbf{k}\nu}^\dagger \hat{q}_{\mathbf{k}'\nu'}} |0\rangle \cdot c_{\mathbf{k}} = \sum_{\mathbf{k}\nu} c_{\mathbf{k}\nu} \hat{q}_{\mathbf{k}\nu}^\dagger |0\rangle = 1 |\phi_1\rangle_t \quad (\text{II.3.7})$$

Der letzte Schritt folgt aus der Kommutator-Relation (II.3.2).

 Der 1-Photon-Zustand wird also im Fock-Raum durch den "Vektor" mit den Vektor-komponenten $c_{\mathbf{k}\nu}$ dargestellt.

Speziell: Betrachte

$$|\phi_1\rangle = c_1 |1_{\mathbf{k}_1\nu_1}\rangle \otimes |0_{\mathbf{k}_2\nu_2}\rangle + c_2 |0_{\mathbf{k}_1\nu_1}\rangle \otimes |1_{\mathbf{k}_2\nu_2}\rangle \quad (\text{II.3.8})$$

 Korrelation: „Wenn Photon bei D1, dann nicht bei D2“. Moden-Index = klassischer Index. $|\phi_1\rangle$ zeigt eine „Besetzungszahl-Verschrankung“.

II. Quantisierung des Strahlungsfeldes

Definition Verschränkung: Ein reiner Zustand $|\psi\rangle$ für zwei Moden (und zwei Teilchen) heißt verschränkt, falls

$$|\psi\rangle \neq |\varphi(1) \otimes \varphi(2)\rangle$$

d. h. falls er nicht als Produktzustand darstellbar ist, vgl. (IV.1.29).

Zwei-Photonen-Zustand ($N = 2$)

a. Eine Mode:

$$|n_{k\nu}\rangle_t = |2_{k\nu}\rangle_t = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\hat{q}_{k\nu}^\dagger \right)^2 |0\rangle \quad (\text{II.3.9})$$

Wiederum mit Hilfe von (II.3.2) ergibt sich

$$\begin{aligned} \hat{n}_{k\nu} |2_{k\nu}\rangle_t &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\hat{q}_{k\nu}^\dagger \hat{q}_{k\nu}^\dagger + \hat{q}_{k\nu}^\dagger \hat{q}_{k\nu}^\dagger \right) |0\rangle = 2 \cdot |2_{k\nu}\rangle \\ \langle 2_{k\nu} | 2_{k\nu} \rangle &= \frac{1}{2} \langle 0 | \hat{q}_{k\nu} \hat{q}_{k\nu} \hat{q}_{k\nu}^\dagger \hat{q}_{k\nu}^\dagger |0\rangle = 1 \end{aligned}$$

b. Zwei Moden: (unterscheidbar!)

$$|\phi_2\rangle = |k_1\nu_1\rangle_t \otimes |k_2\nu_2\rangle_t$$

Allgemein:

$$|\phi_2\rangle_t = \sum_{k_1, \nu_1} \sum_{k_2, \nu_2} c_{k_1 \nu_1 k_2 \nu_2} |k_1 \nu_1\rangle_t \otimes |k_2 \nu_2\rangle_t \quad (\text{II.3.10})$$

N-Photonen-Zustand für eine Mode, $N = n_{k\nu}$:

$$\begin{aligned} |n_{k\nu}\rangle_t &= \frac{1}{\sqrt{n_{k\nu}!}} \left(\hat{q}_{k\nu}^\dagger \right)^{n_{k\nu}} |0\rangle \\ \langle n_{k\nu} | n_{k\nu} \rangle &= 1 \end{aligned} \quad (\text{II.3.11})$$

Allg. Zustand für 1 Mode (!)

$$|\phi\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n |n_{k\nu}\rangle$$

Zustandsvektoren im Fock-Raum für festes \mathbf{k}, ν : $\mathbf{c} = \{c_0, c_1, c_2, \dots\}$

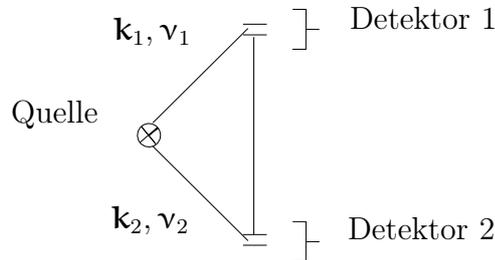


Abbildung II.1.: Ein-Photon-Zustand

II.3.2. Feld-Operatoren

Aus Gl. (II.2.15) erhält man:

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{A}}^{(+)}(\mathbf{r}, t) &= \sum_{\mathbf{k}, \nu} \hat{q}_{\mathbf{k}\nu}(t) \mathbf{u}_{\mathbf{k}\nu}(\mathbf{r}) \\ \hat{\mathbf{A}}^{(-)}(\mathbf{r}, t) &= \sum_{\mathbf{k}, \nu} \hat{q}_{\mathbf{k}\nu}^\dagger(t) \mathbf{u}_{\mathbf{k}\nu}^*(\mathbf{r})\end{aligned}\quad (\text{II.3.12})$$

Vgl. Mandel (S. 483) sowie die Gleichungen (II.2.6), (II.2.10), (II.2.16):

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{E}}^{(+)}(\mathbf{r}, t) = -\dot{\hat{\mathbf{A}}}^{(+)} &= i \sum_{\mathbf{k}, \nu} \mathcal{E}_{\mathbf{k}} \mathbf{e}_{\mathbf{k}\nu} e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)} \hat{q}_{\mathbf{k}\nu}(0) \\ \hat{\mathbf{E}}^{(-)}(\mathbf{r}, t) = -\dot{\hat{\mathbf{A}}}^{(-)} &= -i \sum_{\mathbf{k}, \nu} \mathcal{E}_{\mathbf{k}} \mathbf{e}_{\mathbf{k}\nu} e^{-i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)} \hat{q}_{\mathbf{k}\nu}^\dagger(0) \\ \mathcal{E}_{\mathbf{k}} &\equiv \left(\frac{\hbar \omega_{\mathbf{k}}}{2V \epsilon_0} \right)^{1/2}\end{aligned}\quad (\text{II.3.13})$$

Entsprechend definiert man $\hat{\mathbf{B}}^{(+)}$ (und analog $\hat{\mathbf{B}}^{(-)}$):

$$\hat{\mathbf{B}}^{(+)}(\mathbf{r}, t) = i \sum_{\mathbf{k}, \nu} \left(\frac{\hbar}{2\omega_{\mathbf{k}} V \epsilon_0} \right)^{1/2} (\mathbf{k} \times \mathbf{e}_{\mathbf{k}\nu}) e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)} \hat{q}_{\mathbf{k}\nu}(0)$$

Inverse Transformation (beachte (II.2.10), (II.2.13)):

$$\int d^3\mathbf{r} \mathbf{u}_{\mathbf{k}'\nu'}^* \hat{\mathbf{E}}^{(+)}(\mathbf{r}, t) = i \sum_{\mathbf{k}, \nu} \hat{q}_{\mathbf{k}\nu}(t) \omega_{\mathbf{k}} \underbrace{\int d^3\mathbf{r} \mathbf{u}_{\mathbf{k}'\nu'}^* \mathbf{u}_{\mathbf{k}\nu}}_{=(\hbar/2\omega_{\mathbf{k}}\epsilon_0)\delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}\delta_{\nu\nu'}} = \frac{i\hbar}{2\epsilon_0} \hat{q}_{\mathbf{k}'\nu'}(t)$$

Daraus folgen für die Moden-Operatoren die inversen Transformationen:

$$\hat{q}_{\mathbf{k}\nu}(t) = -i \frac{2\epsilon_0}{\hbar} \int d^3\mathbf{r} \mathbf{u}_{\mathbf{k}\nu}^*(\mathbf{r}) \hat{\mathbf{E}}^{(+)}(\mathbf{r}, t) \quad (\text{II.3.14a})$$

$$\hat{q}_{\mathbf{k}\nu}^\dagger(t) = i \frac{2\epsilon_0}{\hbar} \int d^3\mathbf{r} \mathbf{u}_{\mathbf{k}\nu}(\mathbf{r}) \hat{\mathbf{E}}^{(-)}(\mathbf{r}, t) \quad (\text{II.3.14b})$$

Fock-Zustände in Feldoperator-Darstellung:

- $N = 1$, mit Gl. (II.3.14): Der Zustand

$$|1_{\mathbf{k}\nu}\rangle_t = |\mathbf{k}\nu\rangle_t \equiv \hat{q}_{\mathbf{k}\nu}^\dagger(t) |0\rangle = i \frac{2\epsilon_0}{\hbar} \int d^3\mathbf{r} \mathbf{u}_{\mathbf{k}\nu}(\mathbf{r}) \hat{\mathbf{E}}^{(-)}(\mathbf{r}, t) |0\rangle \quad (\text{II.3.15})$$

ist ein Funktional der Feldoperatoren!

II. Quantisierung des Strahlungsfeldes

- $N = 2$, zwei Moden:

$$|\mathbf{k}_1\nu_1; \mathbf{k}_2\nu_2\rangle_t = -\frac{4\varepsilon_0^2}{\hbar^2} \int \int d^3\mathbf{r}_1 d^3\mathbf{r}_2 \left[\left(\mathbf{u}_{\mathbf{k}_1\nu_1} \hat{\mathbf{E}}^{(-)}(\mathbf{r}_1, t) \right) \cdot \left(\mathbf{u}_{\mathbf{k}_2\nu_2} \hat{\mathbf{E}}^{(-)}(\mathbf{r}_2, t) \right) \right] |0\rangle$$

Mit der elementaren Umformvorschrift für Tensoren (Doppelpunkt = "doppelte Verjüngung") Tensor : Tensor = Skalar; Vektor · Vektor = Skalar.

$$(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) : (\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{A}) \cdot (\mathbf{b} \cdot \mathbf{B})$$

erhält man nunmehr folgenden Ausdruck:

$$|\mathbf{k}_1\nu_1; \mathbf{k}_2\nu_2\rangle_t = -\frac{4\varepsilon_0^2}{\hbar^2} \int \int d^3\mathbf{r}_1 d^3\mathbf{r}_2 \left[\mathbf{u}_{\mathbf{k}_1\nu_1} \otimes \mathbf{u}_{\mathbf{k}_2\nu_2} \right] : \left[\hat{\mathbf{E}}^{(-)}(\mathbf{r}_1, t) \otimes \hat{\mathbf{E}}^{(-)}(\mathbf{r}_2, t) \right] |0\rangle \quad (\text{II.3.16})$$

Der Zwei-Teilchen-Zustand ist im Tensorraum definiert und nicht im dreidimensionalen Ortsraum!

Allgemein gilt: N-Photonen-Zustände sind definiert im 3N-dimensionalen Konfigurationsraum (N Moden). Der Zustand ist ein Funktional und nie eine globale Observable wie der Hamilton-Operator \hat{H} usw.

II.3.3. „Quadratur-Operatoren“

$$\hat{P}_{\mathbf{k}\nu}(t) = \frac{i}{\sqrt{2}} \left(\hat{q}_{\mathbf{k}\nu}^\dagger(t) - \hat{q}_{\mathbf{k}\nu}(t) \right) \quad (\text{II.3.17a})$$

$$\hat{Q}_{\mathbf{k}\nu}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\hat{q}_{\mathbf{k}\nu}^\dagger(t) + \hat{q}_{\mathbf{k}\nu}(t) \right) \quad (\text{II.3.17b})$$

Diese Operatoren sind hermitesch und dimensionslos:

$$\hat{P}_{\mathbf{k}\nu}^\dagger = \hat{P}_{\mathbf{k}\nu} \quad \hat{Q}_{\mathbf{k}\nu}^\dagger = \hat{Q}_{\mathbf{k}\nu} \quad (\text{II.3.18})$$

Rücktransformationen:

$$\hat{q}_{\mathbf{k}\nu}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\hat{Q}_{\mathbf{k}\nu}(t) + i\hat{P}_{\mathbf{k}\nu}^\dagger(t) \right) \quad (\text{II.3.19a})$$

$$\hat{q}_{\mathbf{k}\nu}^\dagger(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\hat{Q}_{\mathbf{k}\nu}(t) - i\hat{P}_{\mathbf{k}\nu}^\dagger(t) \right) \quad (\text{II.3.19b})$$

Eigenschaften (vgl. Gl. (II.3.2)):

$$\left[\hat{P}_{\mathbf{k}\nu}(t), \hat{Q}_{\mathbf{k}'\nu'}(t) \right] = -i\hat{1} \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \delta_{\nu\nu'} \quad (\text{II.3.20})$$

Die Quadratur-Operatoren $\hat{P}_{\mathbf{k}\nu}$ und $\hat{Q}_{\mathbf{k}\nu}$ sind also kanonisch konjugiert wie Impuls- und Ortsoperator (Heisenberg-Bild):

$$\left[\hat{p}_{\mathbf{k}}(t), \hat{x}_{\mathbf{k}'}(t) \right]_- = -i\hbar \hat{1} \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \quad (\text{II.3.21})$$

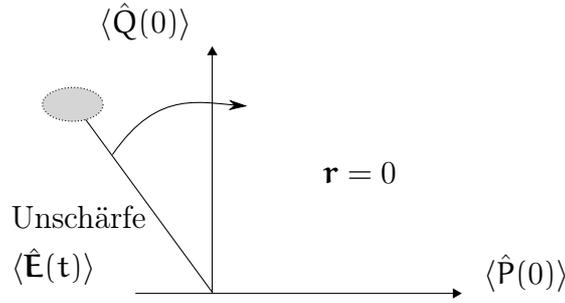


Abbildung II.2.: Phasordiagramm (Bachor S. 17)

Unschärferelation: analog zu $(\Delta \mathbf{p}_k)^2 (\Delta x_k)^2 \geq \hbar/4$ ist

$$\boxed{\langle (\Delta \hat{P}_{k\nu})^2 \rangle \langle (\Delta \hat{Q}_{k\nu})^2 \rangle \geq \frac{1}{4}} \quad (\text{II.3.22})$$

(Vgl. Mandel, Wolf, S. 1036 sowie Scully, S. 61 und Haus, S. 217)

Aus Gl. (II.3.13) folgt weiterhin (vgl. Scully, S. 7 und 11)

$$\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) = \hat{\mathbf{E}}^{(+)}(\mathbf{r}, t) + \hat{\mathbf{E}}^{(-)}(\mathbf{r}, t) \quad (\text{II.3.23})$$

$$\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) = i \varepsilon_{\mathbf{k}} \mathbf{e}_{k\nu} (\hat{q}(0) e^{-i\Phi} - \hat{q}^\dagger(0) e^{i\Phi}) \quad (\text{II.3.24})$$

$$\Phi \equiv \omega t - \mathbf{k} \mathbf{r} \quad (\text{II.3.24})$$

Daraus ergibt sich (der Beweis folgt durch Einsetzen von (II.3.19a)): (Vgl. Abb. II.2)

$$\boxed{\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) = \sqrt{2} \varepsilon_{\mathbf{k}} \mathbf{e}_{k\nu} [\hat{Q}_{k\nu}(0) \sin(\omega t - \mathbf{k} \mathbf{r}) - \hat{P}_{k\nu}(0) \cos(\omega t - \mathbf{k} \mathbf{r})]} \quad (\text{II.3.25})$$

Entsprechend erhält man:

$$\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r}, t) = \frac{\sqrt{2}}{\omega_{\mathbf{k}}} \varepsilon_{\mathbf{k}} \mathbf{e}_{k\nu} [\hat{Q}_{k\nu}(0) \cos(\omega t - \mathbf{k} \mathbf{r}) + \hat{P}_{k\nu}(0) \sin(\omega t - \mathbf{k} \mathbf{r})] \quad (\text{II.3.26})$$

Anmerkung: „Quadratur“ bedeutet hier eine Integration der DGL. Man erhält Teillösungen mit zwei Integrationskonstanten, s. u.

Achtung: Es gilt *nicht* $\hat{Q}_{k\nu}(t) = \hat{Q}_{k\nu}(0) \sin(\omega t - \mathbf{k} \mathbf{r})$ etc!

Zum Vergleich betrachte man das Phasenraum-Porträt der klassischen Mechanik. Für den harmonischen Oszillator gilt:

$$\begin{aligned} x(t) &= a_1 \cos \omega_0 t + a_2 \sin \omega_0 t \\ \dot{x}(t) &= -a_1 \omega_0 \sin \omega_0 t + a_2 \omega_0 \cos \omega_0 t \end{aligned}$$

mit den Anfangsbedingungen

$$\begin{aligned} x(0) &= a_1 \\ \dot{x}(0) &= \omega_0 a_2 \end{aligned}$$

II. Quantisierung des Strahlungsfeldes

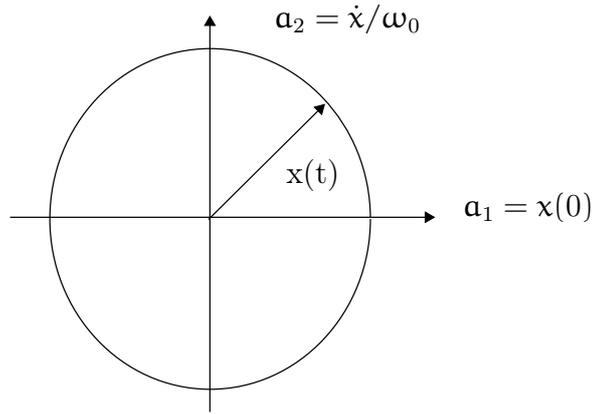


Abbildung II.3.: Phasendiagramm des harmonischen Oszillators

sowie

$$x^2 + \frac{1}{\omega_0^2} \dot{x}^2 = a_1^2 + a_2^2 \quad (\text{vgl. Abb. II.3})$$

Ort x und Impuls p entsprechen dabei \hat{Q} und \hat{P} , jedoch nur formal, da letztere nichts mit dem Ort und dem Impuls des Photons zu tun haben!

II.4. Hamilton-Operator

Ausgehend von Gl. (II.1.26) und Gl. (II.1.25) schreibt sich der Operator der Hamiltondichte

$$\boxed{\hat{\mathcal{H}} = \frac{\varepsilon_0}{2} \dot{\hat{A}}_j \dot{\hat{A}}_j + \frac{1}{2\mu_0} \hat{A}_{j,i} \hat{A}_{j,i}} \quad (\text{II.4.1})$$

Der Hamilton-Operator ist dann

$$\hat{H} = \int d^3\mathbf{r} \hat{\mathcal{H}}$$

Mit Gl. (II.3.12) gilt:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\mathbf{A}}}^{(+)}(\mathbf{r}, t) &= -i \sum_{\mathbf{k}, \nu} \omega_{\mathbf{k}} \hat{q}_{\mathbf{k}\nu}(t) \mathbf{u}_{\mathbf{k}\nu}(\mathbf{r}) \\ \dot{\hat{\mathbf{A}}}^{(-)}(\mathbf{r}, t) &= +i \sum_{\mathbf{k}, \nu} \omega_{\mathbf{k}} \hat{q}_{\mathbf{k}\nu}^\dagger(t) \mathbf{u}_{\mathbf{k}\nu}^*(\mathbf{r}) \end{aligned} \quad (\text{II.4.2})$$

sowie

$$\hat{\mathbf{A}}_{j,i}^{(+)}(\mathbf{r}, t) = +i \sum_{\mathbf{k}, \nu} k_i \hat{q}_{\mathbf{k}\nu}(t) (\mathbf{u}_{\mathbf{k}\nu})_j(\mathbf{r}) \quad \text{etc.} \quad (\text{II.4.3})$$

und schließlich für die Integrale:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_0 \int d^3\mathbf{r} \dot{\hat{\mathbf{A}}}^{(-)} \dot{\hat{\mathbf{A}}}^{(+)} &= \varepsilon_0 \sum_{\mathbf{k}, \nu} \sum_{\mathbf{k}', \nu'} \omega_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k}'} \hat{q}_{\mathbf{k}'\nu'}^\dagger(\mathbf{t}) \hat{q}_{\mathbf{k}\nu}(\mathbf{t}) \\
 &\quad \times \underbrace{\int d^3\mathbf{r} \mathbf{u}_{\mathbf{k}\nu}(\mathbf{r}) \mathbf{r}_{\mathbf{k}'\nu'}^*(\mathbf{r})}_{=(\hbar/2\varepsilon_0 \omega_{\mathbf{k}}) \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \delta_{\nu\nu'}} \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}, \nu} \hbar \omega_{\mathbf{k}} \hat{q}_{\mathbf{k}\nu}^\dagger \hat{q}_{\mathbf{k}\nu}
 \end{aligned} \tag{II.4.4}$$

Entsprechend bekommt man

$$\varepsilon_0 \int d^3\mathbf{r} \dot{\hat{\mathbf{A}}}^{(+)} \dot{\hat{\mathbf{A}}}^{(-)} = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}, \nu} \hbar \omega_{\mathbf{k}} \hat{q}_{\mathbf{k}\nu} \hat{q}_{\mathbf{k}\nu}^\dagger \tag{II.4.5}$$

$$\varepsilon_0 \int d^3\mathbf{r} \dot{\hat{\mathbf{A}}}^{(-)} \dot{\hat{\mathbf{A}}}^{(-)} = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}, \nu} \hbar \omega_{\mathbf{k}} \hat{q}_{\mathbf{k}\nu}^\dagger \hat{q}_{-\mathbf{k}\nu}^\dagger \tag{II.4.6}$$

$$\varepsilon_0 \int d^3\mathbf{r} \dot{\hat{\mathbf{A}}}^{(+)} \dot{\hat{\mathbf{A}}}^{(+)} = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}, \nu} \hbar \omega_{\mathbf{k}} \hat{q}_{\mathbf{k}\nu} \hat{q}_{-\mathbf{k}\nu} \tag{II.4.7}$$

Das Minuszeichen in den letzten beiden Beziehungen folgt aus Gl. (II.2.10b). Für die Ableitungen im \mathbf{k} -Raum erhält man ähnliche Ausdrücke:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\mu_0} \int d^3\mathbf{r} \hat{\mathbf{A}}_{\mathbf{j},\mathbf{i}}^{(-)} \hat{\mathbf{A}}_{\mathbf{j},\mathbf{i}}^{(+)} &= \frac{1}{\mu_0} \sum_{\mathbf{k}, \nu} \sum_{\mathbf{k}', \nu'} (\mathbf{k}_i \mathbf{k}'_i) \hat{q}_{\mathbf{k}'\nu'}^\dagger \hat{q}_{\mathbf{k}\nu} \\
 &\quad \cdot \underbrace{\int d^3\mathbf{r} \mathbf{u}_{\mathbf{k}'\nu'}^*(\mathbf{r}) \mathbf{u}_{\mathbf{k}\nu}(\mathbf{r})}_{=(\hbar/2\varepsilon_0 \omega_{\mathbf{k}}) \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \delta_{\nu\nu'}} \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}, \nu} \underbrace{\frac{\hbar \mathbf{k}^2}{\varepsilon_0 \mu_0 \omega_{\mathbf{k}}}}_{=\hbar \omega_{\mathbf{k}}} \hat{q}_{\mathbf{k}\nu}^\dagger \hat{q}_{\mathbf{k}\nu} = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}, \nu} \hbar \omega_{\mathbf{k}} \hat{q}_{\mathbf{k}\nu}^\dagger \hat{q}_{\mathbf{k}\nu}
 \end{aligned} \tag{II.4.8}$$

da $\frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} = c^2$ und $\mathbf{k}^2 c^2 = \omega_{\mathbf{k}}^2$ (vgl. Gl. (II.2.9)). Entsprechend ist:

$$\frac{1}{\mu_0} \int d^3\mathbf{r} \hat{\mathbf{A}}_{\mathbf{j},\mathbf{i}}^{(+)} \hat{\mathbf{A}}_{\mathbf{j},\mathbf{i}}^{(-)} = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}, \nu} \hbar \omega_{\mathbf{k}} \hat{q}_{\mathbf{k}\nu} \hat{q}_{\mathbf{k}\nu}^\dagger \tag{II.4.9}$$

$$\frac{1}{\mu_0} \int d^3\mathbf{r} \hat{\mathbf{A}}_{\mathbf{j},\mathbf{i}}^{(-)} \hat{\mathbf{A}}_{\mathbf{j},\mathbf{i}}^{(-)} = -\frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}, \nu} \hbar \omega_{\mathbf{k}} \hat{q}_{\mathbf{k}\nu}^\dagger \hat{q}_{-\mathbf{k}\nu}^\dagger \tag{II.4.10}$$

$$\frac{1}{\mu_0} \int d^3\mathbf{r} \hat{\mathbf{A}}_{\mathbf{j},\mathbf{i}}^{(+)} \hat{\mathbf{A}}_{\mathbf{j},\mathbf{i}}^{(+)} = -\frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}, \nu} \hbar \omega_{\mathbf{k}} \hat{q}_{\mathbf{k}\nu} \hat{q}_{-\mathbf{k}\nu} \tag{II.4.11}$$

II. Quantisierung des Strahlungsfeldes

Bei den „gleichartigen“ Termen gilt wegen $\sim \delta_{\mathbf{k},-\mathbf{k}'}$ (vgl. Gl. (II.2.10b)): $\mathbf{k}\mathbf{k}' \rightarrow -\mathbf{k}^2$ (!)
Damit folgt die Moden-Darstellung des Hamilton-Operators im Heisenberg-Bild:

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k},\nu} \hbar\omega_{\mathbf{k}} \left(\hat{q}_{\mathbf{k}\nu}^\dagger \hat{q}_{\mathbf{k}\nu} + \hat{q}_{\mathbf{k}\nu} \hat{q}_{\mathbf{k}\nu}^\dagger \right) \quad (\text{II.4.12})$$

$$\stackrel{(\text{II.3.2})}{=} \sum_{\mathbf{k},\nu} \hbar\omega_{\mathbf{k}} \left(\hat{q}_{\mathbf{k}\nu}^\dagger \hat{q}_{\mathbf{k}\nu} + \frac{1}{2} \hat{1} \right)$$

Für \hat{H} fällt die zeitliche Abhängigkeit heraus, $\hat{H}_H = \hat{H}$ (wie üblich). In Quadratur-Operatoren geschrieben:

$$\begin{aligned} \hat{q}_{\mathbf{k}\nu}^\dagger \hat{q}_{\mathbf{k}\nu} &= \frac{1}{2} \hat{Q}_{\mathbf{k}\nu}^2 + \frac{1}{2} \hat{P}_{\mathbf{k}\nu}^2 + \frac{1}{2} i \hat{Q}_{\mathbf{k}\nu} \hat{P}_{\mathbf{k}\nu} - \frac{1}{2} i \hat{P}_{\mathbf{k}\nu} \hat{Q}_{\mathbf{k}\nu} \\ &= \frac{1}{2} (\hat{Q}_{\mathbf{k}\nu}^2 + \hat{P}_{\mathbf{k}\nu}^2 - \hat{1}) \quad (\text{aus Gl. (II.3.2)}) \end{aligned}$$

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k},\nu} \hbar\omega_{\mathbf{k}} (\hat{Q}_{\mathbf{k}\nu}^2 + \hat{P}_{\mathbf{k}\nu}^2) \quad (\text{II.4.13})$$

Betrachte zum Vergleich wiederum den mechanischen Oszillator ($\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$):

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2m} p^2 + \frac{1}{2} k x^2 \\ P &\equiv \hbar^{-1/2} (k m)^{-1/4} p \\ X &\equiv \hbar^{-1/2} (k m)^{-1/4} x \end{aligned}$$

$$H = \frac{1}{2} \hbar\omega_0 (X^2 + P^2) \quad (\text{II.4.14})$$

Der Hamilton-Operator des freien elektromagnetischen Feldes entspricht also einem Satz ungekoppelter harmonischer Oszillatoren, einer für jede Mode. Damit ist die Quantisierungsvorschrift bezüglich der Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren $\hat{q}_{\mathbf{k}\nu}^\dagger$ und $\hat{q}_{\mathbf{k}\nu}$, welche die algebraische Lösung des harmonischen Oszillators darstellen, nachträglich begründet!

II.5. Hilfsformeln

- Vollständigkeitsrelation:

$$\int_V d^3\mathbf{r} e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\mathbf{r}} = V \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \quad (\text{a})$$

$$\sum_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')} = V \delta^3(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \quad (\text{b})$$

mit V als Periodizitätsvolumen. Man beweist nun z. B. (b) aus (a). Zunächst gilt:

$$\int d^3\mathbf{r} \sum_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')} e^{-i\mathbf{k}'\mathbf{r}} = \sum_{\mathbf{k}} e^{-i\mathbf{k}'\mathbf{r}'} \underbrace{\int d^3\mathbf{r} e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\mathbf{r}}}_{=V \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}} = V e^{-i\mathbf{k}'\mathbf{r}'}$$

Andererseits gilt auch:

$$\int d^3\mathbf{r} \delta^3(\mathbf{r}-\mathbf{r}') e^{-i\mathbf{k}'\mathbf{r}} = e^{-i\mathbf{k}'\mathbf{r}'}$$

Durch Vergleichen der beiden obigen Ausdrücke folgt wiederum Gl. (b)!

Die folgenden allgemeinen Beziehungen wurden benutzt:

$$\delta(\mathbf{a}\mathbf{x}) = \frac{1}{|\mathbf{a}|} \delta(\mathbf{x})$$

$$\delta(\mathbf{x})\delta(\mathbf{y})\delta(\mathbf{z}) = \delta(\mathbf{r})$$

$$\int \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0) f(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r} = f(\mathbf{r}_0)$$

- Sei $\mathbf{u} \equiv \mathbf{u}_0 e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}$

$$\text{div } \mathbf{u} = i\mathbf{u} \cdot \mathbf{k} \quad (\text{c})$$

$$\text{rot } \mathbf{u} = -i\mathbf{u} \times \mathbf{k} \quad (\text{d})$$

Dies zeigt man mit Hilfe der folgenden Beziehungen:

$$\frac{\partial \mathbf{u}_x}{\partial x} = \mathbf{u}_x (ik_x)$$

$$(\nabla \times \mathbf{u})_x = \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{u}_z - \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{u}_y$$

$$= i\mathbf{u}_z k_y - i\mathbf{u}_y k_z$$

$$= -i(\mathbf{u} \times \mathbf{k})_x$$

II. Quantisierung des Strahlungsfeldes

- Summenkonvention:

$$\mathbf{a}_l \mathbf{b}_l = \sum_l \mathbf{a}_l \mathbf{b}_l \quad (\text{e})$$

- Sei $\hat{F} = \hat{F}(\hat{\mathbf{b}}^\dagger, \hat{\mathbf{b}})$.

$$[\hat{\mathbf{b}}, \hat{F}(\hat{\mathbf{b}}^\dagger, \hat{\mathbf{b}})] = \frac{\partial \hat{F}}{\partial \hat{\mathbf{b}}^\dagger} \quad (\text{f})$$

$$[\hat{\mathbf{b}}^\dagger, \hat{F}(\hat{\mathbf{b}}^\dagger, \hat{\mathbf{b}})] = -\frac{\partial \hat{F}}{\partial \hat{\mathbf{b}}} \quad (\text{g})$$

Achtung: die übliche Regel für die implizite Ableitung gilt hier nicht! Beispiel:

$$\begin{aligned} \hat{F} &= (\hat{\mathbf{b}}^2 + (\hat{\mathbf{b}}^\dagger)^2)^2 \\ \frac{\partial \hat{F}}{\partial \hat{\mathbf{b}}^\dagger} &= 2(\hat{\mathbf{b}}^2 + (\hat{\mathbf{b}}^\dagger)^2) \cdot 2\hat{\mathbf{b}}^\dagger = 4\hat{\mathbf{b}}^2\hat{\mathbf{b}}^\dagger + 4(\hat{\mathbf{b}}^\dagger)^3 \quad \text{falsch!} \end{aligned}$$

Dagegen:

$$\begin{aligned} \hat{F} &= \hat{\mathbf{b}}^4 + (\hat{\mathbf{b}}^\dagger)^4 + \hat{\mathbf{b}}^2(\hat{\mathbf{b}}^\dagger)^2 + (\hat{\mathbf{b}}^\dagger)^2\hat{\mathbf{b}}^2 \\ \frac{\partial \hat{F}}{\partial \hat{\mathbf{b}}^\dagger} &= 4(\hat{\mathbf{b}}^\dagger)^3 + 2\hat{\mathbf{b}}^2\hat{\mathbf{b}}^\dagger + 2\hat{\mathbf{b}}^\dagger\hat{\mathbf{b}}^2 \quad \checkmark \end{aligned}$$

- Sei $\hat{F} = \int d^3\mathbf{r} \hat{f}(\hat{\mathbf{A}}_i, \hat{\mathbf{A}}_{i,m} \hat{\Pi}_i, \hat{\Pi}_{i,m})$

$$[\hat{\Pi}_j, \hat{F}] = \frac{\hbar}{i} \left(\frac{\partial \hat{f}}{\partial \hat{\mathbf{A}}_j} - \frac{\partial}{\partial r_k} \frac{\partial \hat{f}}{\partial \hat{\mathbf{A}}_{j,k}} \right) \equiv \frac{\hbar}{i} \frac{\delta \hat{F}}{\delta \hat{\mathbf{A}}_j} \quad (\text{h})$$

$$[\hat{\mathbf{A}}_j, \hat{F}] = -\frac{\hbar}{i} \left(\frac{\partial \hat{F}}{\partial \hat{\Pi}_j} - \frac{\partial}{\partial r_k} \frac{\partial \hat{f}}{\partial \hat{\Pi}_{j,k}} \right) \equiv -\frac{\hbar}{i} \frac{\delta \hat{F}}{\delta \hat{\Pi}_j} \quad (\text{i})$$

III. Elementare Input-Output-Analyse

Motivation: Vermeide detaillierte Dynamik, wie in der Streutheorie soll es nur „vorher und nachher“ geben. Diskrete Input-/Output-Moden seien selektiert (Quelle/Detektion). Spiel mit „operationaler Ununterscheidbarkeit“: Das heißt, dass durch die Wahl der Präparation oder der Messbedingungen bestimmte Modeneigenschaften absichtlich nicht unterschieden werden können. Dies führt zu Superposition.

III.1. Klassische Lichtquellen

Die Annahme einer ebenen Welle (Mode) ist unrealistisch. Atome strahlen Licht ab, jedoch ist die Lebensdauer eines Zustandes endlich, so dass man eher von „Lichtblitzen“ sprechen kann. Bezüglich der Detektion ist die zeitliche Auflösung t_d zudem endlich, und man misst eine mittlere Intensität, die auf Zeitskalen $> t_d$ fluktuiert.

Klassisches Licht ist thermisches Licht, da eine große Zahl von thermisch angeregten Atomen sich als unabhängige Emittter bewegt und durch Stöße miteinander wechselwirkt. Daraus resultieren Phasenverschiebungen, und man erhält oft ein breites, nicht-resonantes Spektrum. (Literatur: Bachor, S. 23, 33).

Daraus ergeben sich zwei Konsequenzen:

- a. Spektrale Verbreiterung
- b. „Rauschen“ der Intensität

Idealisiertes Modell: **Chaotisches Licht** (Spektrallampe)

$$E(t) = \sum_{j=0}^M E_j(t) = E_0 e^{i\omega_0 t} \sum_{j=0}^M e^{i\phi_j} \equiv |E(t)| e^{i\Phi(t)}$$

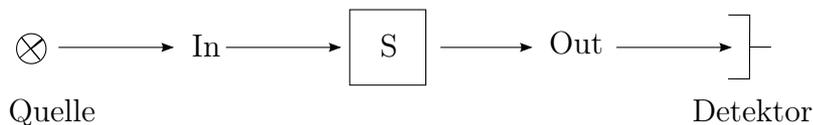


Abbildung III.1.: Input/Output S: optisches Bauelement (klassisch, passiv, linear)
Wirkung beschrieben durch Trafomatrix im diskreten Moden-Raum

III. Elementare Input-Output-Analyse

Dabei sind $|E(\mathbf{t})|$ und $\phi(\mathbf{t})$ Zufallsfunktionen, und die Polarisation sei fest. Ensemble-Mittel:

$$\langle E_j^*(\mathbf{t})E_j(\mathbf{t} + \boldsymbol{\tau}) \rangle = E_0^2 e^{-i\omega_0\boldsymbol{\tau}} e^{\boldsymbol{\tau}/\tau_0}$$

Dies ist eine zeitliche Korrelationsfunktion mit der Zentralfrequenz ω_0 . Idealisieretes Modell: Thermisches Licht (Glühfaden).

III.2. Einzel-Photon-Quellen

a. Abgeschwächtes Laser-Feld: Kohärenter Zustand (Kap. IV)

$$|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle$$

$$P(n) = \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} e^{-|\alpha|^2} \quad (\text{Poisson-Verteilung})$$

$$\frac{P(2)}{P(1)} = \frac{|\alpha|^4}{2|\alpha|^2} = \frac{1}{2} |\alpha|^2$$

$$\frac{P(1)}{P(0)} = |\alpha|^2$$

$\alpha \rightarrow 0$: $P(0) \gg P(1)!$

$P(2)$ wird niemals Null, man hat keinen idealen Ein-Photon-Zustand!

b. Einzelne Atome, Moleküle, Quantenpunkte im Halbleiter, Störstellen im Festkörper: Die Zeitmarken τ_i entsprechen der Präparation und dem Detektor-Klick. Bei der Wiederholung des Experiments erhält man eine Time-Delay-Verteilung.

Die schnelle Relaxation ist nutzbar für eine „Ankündigung“ („Heralding“) des zweiten Photons. Beim Nachweis benutzt man Antibunching als Test, vgl. Kap. III.7.

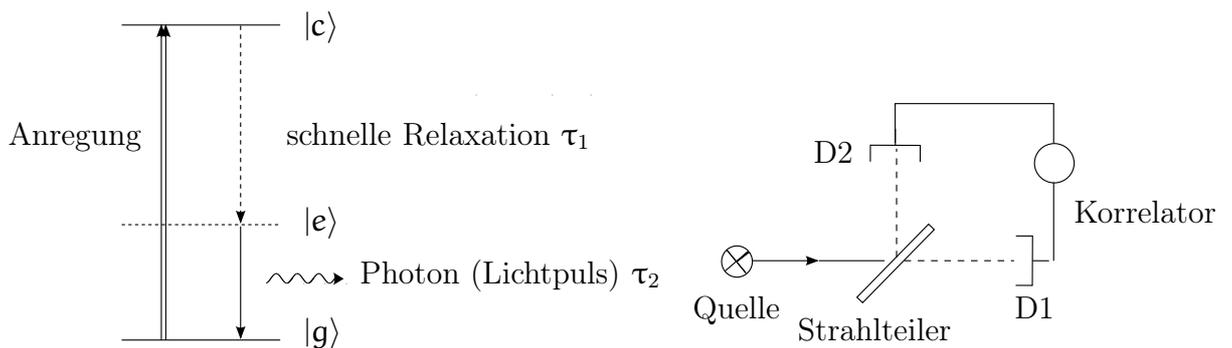


Abbildung III.2.: Nachweis einzelner Photonen. Links: Anregungsschema, rechts: Versuchsschema (Antibunching-Test)

III.3. Zwei-Photonen-Quellen

Genereller Zwei-Photonen-Zustand (Produkt-Fock-Basis, siehe auch Gl. (II.3.10)):

$$|\phi_2\rangle = \sum_{\mathbf{k}_1, \nu_1} \sum_{\mathbf{k}_2, \nu_2} c_{\mathbf{k}_1, \nu_1, \mathbf{k}_2, \nu_2} |\mathbf{k}_1, \nu_1\rangle \otimes |\mathbf{k}_2, \nu_2\rangle \quad (\text{III.3.1})$$

ν_1, ν_2 : Polarisations-Indizes.

Nun wiederum Spiel mit „operationaler Ununterscheidbarkeit“.

III.3.1. Kaskaden-Prozess (Experiment)

Literatur:

A. Aspect, PRL **49**, 91 (1982)

A. Aspect, PRL **47**, 460 (1981)

Ballentine, Quantum Mechanics, S. 597: Für den Ausgangszustand und den Endzustand gilt, dass ihr Gesamtdrehimpuls $J = 0$ sein muss. Der emittierte Zwei-Photonen-Zustand muss Rotations-invariant sein, d.h. die Summe der Koeffizienten in (III.3.1) ist eine skalare Funktion ihrer Argumente $\mathbf{k}, \mathbf{e}_\nu$! Im Schwerpunkt-System:

$$\begin{aligned} \text{vorher: } \mathbf{p}_A &\approx 0 && (\text{Impuls des Atoms}) \\ \text{nachher: } \hbar\mathbf{k}_1 + \hbar\mathbf{k}_2 + \mathbf{p}_A &\approx 0 \end{aligned} \quad (\text{III.3.2})$$

Ohne Rückstoß: $\hbar\mathbf{k}_1 \approx -\hbar\mathbf{k}_2$ im Schwerpunktsystem (Dispersionsrelation $\omega_1 \approx \omega_2$
(In der Quantenmechanik muss $\hbar\mathbf{k}_j$ nicht scharf sein!)

Photonen werden also nicht mit festen Eigenschaften, z.B. einer bestimmten Polarisation, geboren! (Vgl. Laser)

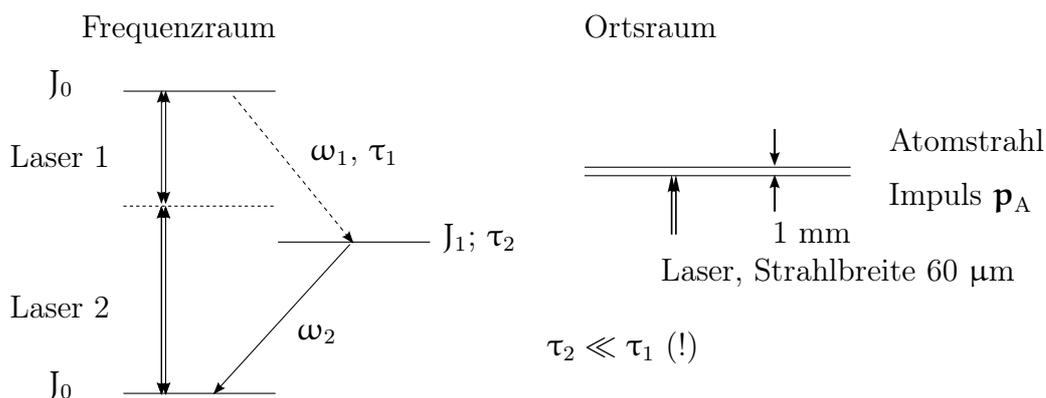


Abbildung III.3.: Kaskadenprozess (z.B. mit ^{40}Ca). τ_2 : mittlere Differenz der Emissionszeitpunkte

III. Elementare Input-Output-Analyse

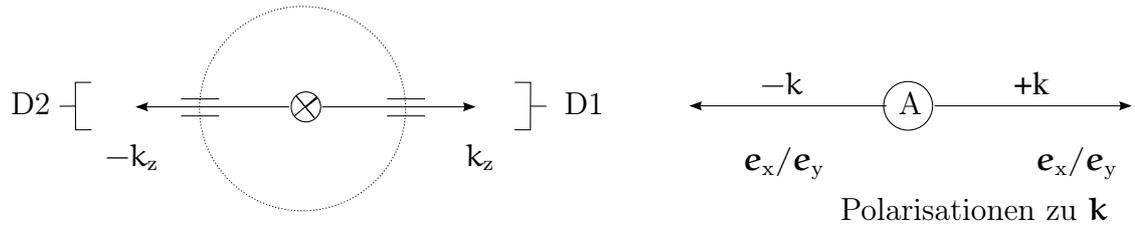


Abbildung III.4.: Polarisationsverschränkung, klassischer Index $\mathbf{k}, -\mathbf{k}$. Links: Versuch, rechts: Schema

Man kann zeigen, dass für beliebige $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2$ folgende Ausdrücke Invarianten sind: (Balentine, QM, p. 597)

$$I_1(\mathbf{k}_1 \nu_1; \mathbf{k}_2 \nu_2) \equiv \mathbf{e}_{\nu_1} \cdot \mathbf{e}_{\nu_2} \stackrel{!}{=} \text{const} \quad (\text{III.3.3})$$

$$I_2(\mathbf{k}_1 \nu_1; \mathbf{k}_2 \nu_2) \equiv (\mathbf{e}_{\nu_1} \cdot \mathbf{k}_2) \cdot (\mathbf{e}_{\nu_2} \cdot \mathbf{k}_1) \stackrel{!}{=} \text{const} \quad (\text{III.3.4})$$

Selektiere (!) (T= „transponiert“ \rightarrow Spaltenvektor)

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_1 &= (0, 0, k_z)^T \\ \mathbf{k}_2 &= (0, 0, -k_z)^T \end{aligned} \quad (\text{III.3.5})$$

Für diskrete Moden sind sowohl \mathbf{e}_{ν_1} als auch \mathbf{e}_{ν_2} zu wählen als $\mathbf{e}_x = (1, 0, 0)^T$ bzw. $\mathbf{e}_y = (0, 1, 0)^T$. Mit Gl. (III.3.5) ist daher

$$I_2 = 0 ! \quad (\text{III.3.6})$$

Also bleibt nur die erste Invariante bestehen: $c \sim I_1$ mit geeigneter Normierung, wobei die Konstante auch identisch Null sein kann. Sie muss aber gleich sein für alle ν_1, ν_2 die man mitnimmt! Wählt man die Einheitsvektoren-Paare als $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_x$ bzw. $\mathbf{e}_y, \mathbf{e}_y$, so wird $I_1 = 1$. Dazu passt nichts „schräges“, wie etwa $\mathbf{e}_x = (1, 0, 0)$ mit $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)!$

Der Zustand wird eindeutig zu:

$$|\Phi\rangle_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[|e_x, k_z\rangle \otimes |e_x, -k_z\rangle + |e_y, k_z\rangle \otimes |e_y, -k_z\rangle \right] \quad (\text{III.3.7})$$

Der „Klassische Index“ bezieht sich hier auf die Richtung (Mode). Korrelation wegen Drehimpuls-Erhaltung, d. h. der Zustand ist polarisationsverschränkt!

Beachte: Man hat adressierbare Untersysteme, obwohl die Photonen ununterscheidbar sind! Ohne Frequenz-Selektion ist nicht entschieden, ob das erste Photon ω_1 nach rechts oder links fliegt!

Anwendungen: Test der Bellschen Ungleichungen, Franson-Interferometer.

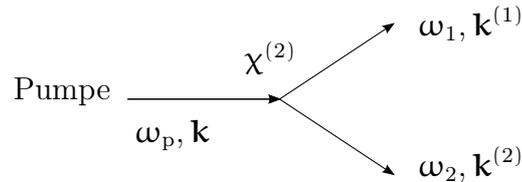


Abbildung III.5.: Drei-Wellen-Mischen

III.3.2. Parametric Down Conversion (PDC) Typ 1

(„Parametrische Verstärkung“)

Quelle: Nichtlineare Optik, beruhend auf χ_2 (Suszeptibilität).
 Material: z. B. KDP (Kaliumdihydrophosphat), BBO (β -Bariumborat).
 Wirkungsgrad typisch $\eta \approx 10^{-6}$. Zeit-Korrelation: $\tau_{2C} \approx \tau_{1C} \approx 100$ fs.

Typ 1: Emittiere Photonen mit *gleicher Polarisation*

$$\mathbf{e}^{(1)} = \mathbf{e}^{(2)} = \mathbf{e} \quad (\text{III.3.8})$$

Korrelation, Phase matching, $t_1 = t_2$ (Bumham, PRL **25**, 84 (1970):

$$\mathbf{k} = \mathbf{k}^{(1)} + \mathbf{k}^{(2)} \quad (\text{III.3.9})$$

$$\omega_p = \omega_1 + \omega_2 \quad (\text{III.3.10})$$

M. Horne et al, PRL **62**, 2209 (1985):

Ist ω_p scharf, dann sind ω_1, ω_2 klassische Indizes $\mu = 1, 2$, sozusagen „Namen“ (Frequenz-Auflösung). Es gibt zwei alternative Photon-Paare für Phase-Matching:

$$\mathbf{k} = \mathbf{k}_1^{(1)} + \mathbf{k}_2^{(2)} = \mathbf{k}_2^{(1)} + \mathbf{k}_1^{(2)} \quad (\text{III.3.11})$$

Wellenvektor-Verschränkung (Moden):

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[|k_L(1)\rangle |k_R(2)\rangle + |k_R(1)\rangle |k_L(2)\rangle \right] \quad (\text{III.3.12})$$

Es ist nicht entschieden, durch welches Loch das blaue ($\mu = 1$) bzw. das rote ($\mu = 2$) Licht kommt! Jedoch besteht paarweise Korrelation.

III.3.3. Parametric Down Conversion Typ 2

Literatur: Kwiat et al, PRL **75**, 4337 (1995)

Zustände: Polarisation $\uparrow = |0\rangle, \leftrightarrow = |1\rangle$

Jedes Photon-Paar ist charakterisiert durch zwei Wellenvektoren $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2$ (klassischer Index $\mu = 1, 2$). Die Richtungen sind paarweise korreliert in den Punkten 1 und 1' auf

III. Elementare Input-Output-Analyse

der Diagonalen durch die Pumprichtung. Der außerordentliche Strahl hat die Polarisation $|0\rangle$, der ordentliche Strahl die Polarisation $|1\rangle$. Durch die Schnittpunkte der beiden Kegel erfolgt eine spezielle Wahl von $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2$. Hier sind beide Strahlen und damit der Polarisationszustand nicht unterscheidbar.

Polarisations-Verschränkung:

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[|0(1)\rangle \otimes |1(2)\rangle + |1(1)\rangle \otimes |0(2)\rangle \right] \quad (\text{III.3.13})$$

PDC 2 ist flexibler als PDC 1, da besser untereinander kombinierbar. Beide Schemata sind zusammenfassend in Abbildung III.8 dargestellt.

III.3.4. Vier-Photonen-Zustand (Cluster-Zustände)

P. Walther, Nature **434**, 169 (2005)

Parametric Down-Conversion Typ 2: Doppelpaar-Emissionsereignisse

Die Strahlen \mathbf{a}, \mathbf{c} bzw. \mathbf{b}, \mathbf{d} werden über polarisierende Strahlteiler zusammengeführt. Das Schema ist nicht skalierbar, denn die Effizienz von Ein-Paar-, Zwei-Paar-, Drei-Paar-Produktion usw. nimmt rasch ab!

III.4. Detektion von Licht

III.4.1. Absorptive Messung

Literatur: Mandel, Wolf, S. 573 ff.

Absorption am Ort \mathbf{r}, \mathbf{t} : Photon-Zustand $|\Psi\rangle_1 \rightarrow |\Psi\rangle_2$

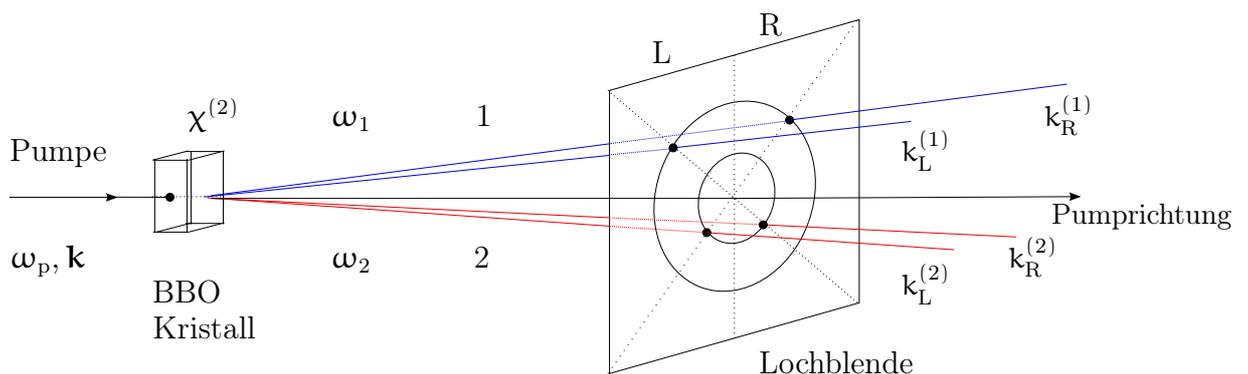


Abbildung III.6.: Versuch zu PDC Typ 1. Lochblende mit vier Löchern. Selektion von vier Strahlen (vgl. Scully, S. 600)

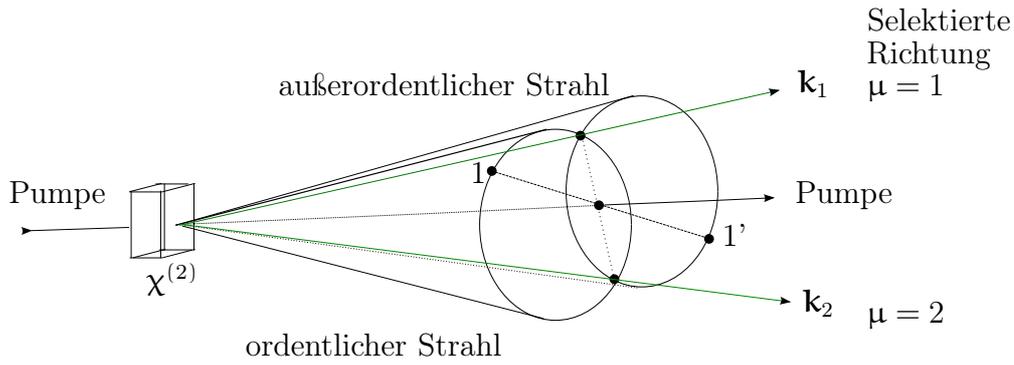


Abbildung III.7.: Versuch zu PDC Typ 2. Richtungsselektion durch Lochblende, klassischer Index = Richtung

Kopplungsmodell (vgl. QM 1):

$$\begin{aligned} \hat{H}' &\sim \mathbf{d} \cdot \hat{\mathbf{E}} \\ \hat{\mathbf{E}} &= \hat{\mathbf{E}}^{(+)} + \hat{\mathbf{E}}^{(-)} \end{aligned} \quad (\text{III.4.1})$$

Feldoperator, vgl. Gl. (II.3.13), feste Polarisation ν :

$$\hat{\mathbf{E}}_{\nu}^{(+)}(\mathbf{r}, t) = i \sum_{\mathbf{k}} \left(\frac{\hbar \omega_{\mathbf{k}}}{2 \epsilon_0 V} \right)^{1/2} \mathbf{e}_{\mathbf{k}\nu} \hat{q}_{\mathbf{k}\nu} e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)} \quad (\text{III.4.2})$$

Übergangswahrscheinlichkeit (Heisenberg-Bild): Input $|\Psi_A\rangle$, Output $|\Psi_E\rangle$

$$P_{EA}^{(\nu)}(\mathbf{r}, t) \sim |\langle \Psi_E | \hat{\mathbf{E}}_{\nu}^{(+)}(\mathbf{r}, t) | \Psi_A \rangle|^2 \quad (\text{III.4.3})$$

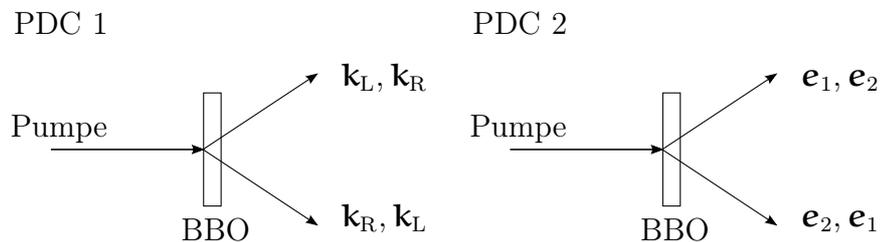


Abbildung III.8.: PDC 1: Wellenvektorverschränkung, klassischer Index ω_1, ω_2
PDC 2: Polarisationsverschränkung, klassischer Index $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2$

III. Elementare Input-Output-Analyse

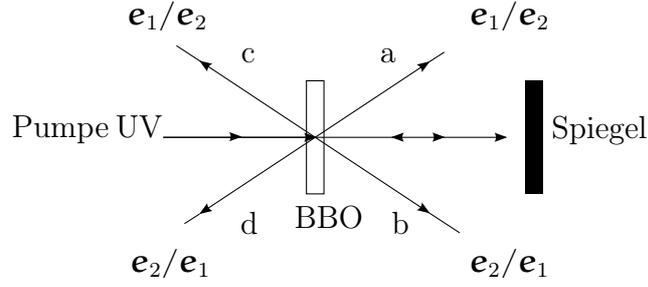


Abbildung III.9.: PDC2 mit vier Photonen. Vorwärtsrichtung: a,b; rückwärts: c,d

summiert über alle Endzustände:

$$\begin{aligned}
 P_A^{(\nu)}(\mathbf{r}, t) &\sim \sum_{|\Psi_E\rangle} \left| \langle \Psi_E | \hat{\mathbf{E}}_{\nu}^{(+)}(\mathbf{r}, t) | \Psi_A \rangle \right|^2 \\
 &= \sum_{|\Psi_E\rangle} \langle \Psi_A | \hat{\mathbf{E}}_{\nu}^{(-)}(\mathbf{r}, t) | \Psi_E \rangle \langle \Psi_E | \hat{\mathbf{E}}_{\nu}^{(+)}(\mathbf{r}, t) | \Psi_A \rangle \\
 &= \langle \Psi_A | \hat{\mathbf{E}}_{\nu}^{(-)}(\mathbf{r}, t) \hat{\mathbf{E}}_{\nu}^{(+)}(\mathbf{r}, t) | \Psi_A \rangle
 \end{aligned} \tag{III.4.4}$$

Die Detektionswahrscheinlichkeit für $|\Psi_A\rangle$ ist also gegeben durch den Erwartungswert des „normalgeordneten Produkts“ (feste Polarisation ν):

$$\boxed{P_A^{(\nu)}(\mathbf{r}, t) = \alpha \langle \Psi_A | \hat{\mathbf{E}}_{\nu}^{(-)}(\mathbf{r}, t) \hat{\mathbf{E}}_{\nu}^{(+)}(\mathbf{r}, t) | \Psi_A \rangle} \tag{III.4.5}$$

Der Vorfaktor α bezieht sich auf Eigenschaften des Detektors, das Produkt $\hat{\mathbf{E}}_{\nu}^{(-)} \hat{\mathbf{E}}_{\nu}^{(+)}$ kann als „Feld-Intensitäts-Operator“ mit der Dimension „Energiedichte/ ϵ_0 “ aufgefasst werden.

Detektorsignal: Eine Punkt-Detektion ist nicht möglich! Wir integrieren daher über das Volumen $V \gg \lambda^3$:

$$\begin{aligned}
 \hat{I}_{V_0} &\equiv \int_{V_0} d^3\mathbf{r} \hat{\mathbf{E}}_{\nu}^{(-)} \hat{\mathbf{E}}_{\nu}^{(+)} \\
 \boxed{\langle \hat{I}_{V_0} \rangle} &= \langle \Psi_A | \hat{I}_{V_0} | \Psi_A \rangle
 \end{aligned} \tag{III.4.6}$$

III.4.2. Globale Größen

Zur Interpretation von \hat{I}_{V_0} betrachte, unter Verwendung von (III.4.2), den Operator $\hat{\mathbf{E}}_{\nu}^{(+)}$

$$\hat{\mathbf{I}} = \frac{\hbar}{2\epsilon_0 V} \int_V d^3\mathbf{r} \sum_{\mathbf{k}\nu} \sum_{\mathbf{k}'\nu'} \hat{q}_{\mathbf{k}\nu}^\dagger \hat{q}_{\mathbf{k}'\nu'} e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\mathbf{r}} e^{-i(\omega'-\omega)t} (\omega_{\mathbf{k}}\omega_{\mathbf{k}'})^{1/2} \mathbf{e}_{\mathbf{k}\nu} \mathbf{e}_{\mathbf{k}'\nu'}$$

V ist hier das gesamte Periodizitätsvolumen. Wegen Hilfsformel (a) in Abschnitt II.5:

$$\hat{I} = \frac{1}{2\epsilon_0} \sum_{\mathbf{k}\nu} \hbar\omega_{\mathbf{k}} \hat{q}_{\mathbf{k}\nu}^\dagger \hat{q}_{\mathbf{k}\nu} \quad (\text{III.4.7})$$

\hat{I} ist nicht der Photonenzahloperator! Es liegt daher nahe, folgende neue Operatoren einzuführen (Mandel, Wolf, S. 629 ff, S. 580):

$$\hat{\mathbf{V}}^{(+)}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{k}\nu} \hat{q}_{\mathbf{k}\nu} \mathbf{e}_{\mathbf{k}\nu} e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)} \quad (\text{III.4.8})$$

$$\hat{\mathbf{V}}^{(-)}(\mathbf{r}, t) = \dots$$

so dass für den Operator

$$\hat{n}_p(\mathbf{r}, t) = \hat{\mathbf{V}}^{(-)}(\mathbf{r}, t) \hat{\mathbf{V}}^{(+)}(\mathbf{r}, t) \quad (\text{III.4.9})$$

gilt:

$$\int_V d^3\mathbf{r} \hat{n}_p(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{k}\nu} \hat{q}_{\mathbf{k}\nu}^\dagger \hat{q}_{\mathbf{k}\nu} = \hat{N}(t) \quad (\text{III.4.10})$$

$\hat{n}_p(\mathbf{r}, t)$ ist also der Photonendichteoperator, nicht $\hat{\mathbf{E}}^{(-)} \hat{\mathbf{E}}^{(+)}$.

III.4.3. „Coarse-Graining“

Nun wiederum Beschränkung auf das Teilvolumen $V_0 \ll V$:

$$\text{Definiere} \quad \hat{N}(V_0, t) = \int_{V_0} d^3\mathbf{r} \hat{\mathbf{V}}^{(-)} \hat{\mathbf{V}}^{(+)} \quad (\text{III.4.11})$$

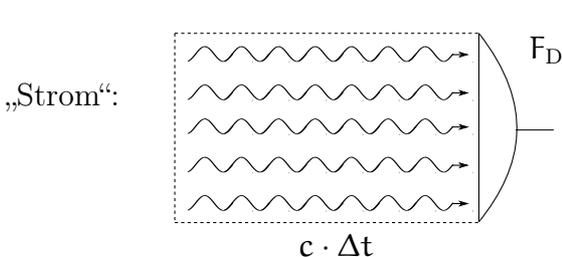
Nach Gl. (III.4.5):

$$P_A(\mathbf{r}, t) = \alpha \langle \Psi_A | \hat{\mathbf{E}}^{(-)} \hat{\mathbf{E}}^{(+)} | \Psi_A \rangle$$

Falls Licht quasi-monochromatisch: $\omega_{\mathbf{k}} \approx \omega_0$, $|\Psi_A\rangle$ ist praktisch konstant über V_0 :

$$P_A(\mathbf{r}, t) \approx \alpha \frac{\hbar\omega_0}{2\epsilon_0} \langle \Psi_A | \hat{N}(V_0, t) | \Psi_A \rangle \quad (\text{III.4.12})$$

In diesem Fall misst der Detektor $\hat{N}(V_0)$, d. h. die Photonenzahl im Volumen V_0 .



Was ist V_0 ? Es gilt $V_0 = F_D \cdot c\Delta t \gg \lambda_0^3$.
 Δt ist die „Ansprechzeit“ des Detektors („Coarse-graining in der Zeit“) und F_D die Detektorfläche. (\rightarrow Energie)
 Bachor, S. 45: Die Mode $\lambda_0 = 500\text{nm}$ („grünes Licht“) wird über alle Richtungen summiert, sofern vorhanden.

Licht	Energiedichte in W/m^2 $\sim \langle \Psi_A \hat{\mathbf{E}}^{(-)} \hat{\mathbf{E}}^{(+)} \Psi_A \rangle$	Photonendichte in m^{-3} $\langle \Psi_A \hat{N}(V_0) \Psi_A \rangle$	Moden-Besetzung $\bar{n}_{\mathbf{k}\nu}$
Weißes Licht	10^3 (Solarkonstante)	10^{13}	10^{-4}
Spektrallampe	10^4	10^{14}	10^{-2}
CW-Laser	10^5	10^{15}	10^{10}

III.4.4. Detektoren

Literatur: U. Leonhardt, S. 84

a. **Photographische Platte**

b. **Lawinen-Photodetektoren:** Strahlung ionisiert ein Stück Photo-sensitives Material. Eine Spannung von rund 200 Volt beschleunigt die ausgelösten Elektronen. Durch Stöße werden weitere Elektronen befreit, der somit entstandene Lawineneffekt führt zur Verstärkung. Aber: Der Strom ist nicht proportional zur Photonenzahl, die Lawine ist nur beschränkt durch Sättigung des Verstärkungsimpulses. Trick bei schwachen Feldern: Zähle „Klicks pro Zeit“.

c. **Photo-Multiplier** (spezielle Elektronenröhre: Ausgelöste Photoelektronen treffen auf weitere Elektroden. Jedes Elektron schlägt mehrere weitere Elektronen heraus...) Verstärkung $\sim 10^7$. Im linearen Bereich Photostrom $\sim I$.

d. **Lineare Photodioden** (p-i-n-Struktur) mit einer Spannung von etwa 10 Volt: Licht erzeugt Elektron-Loch-Paare. Der Strom ist linear in der Licht-Intensität. Jedoch treten auch thermische Fluktuationen auf.

e. **Das menschliche Auge:** (F. Ricke, D.A. Baylor, Rev. mod. Phys. **70**, 1027 (1998)) (vgl. Abb. III.10)

Rund 100 Mio. Stäbchen (rod cells), jedes in der Lage, einzelne einfallende Photonen zu absorbieren. (Für die Farben sind jedoch Zäpfchen (cone cells) zuständig.) Dies geschieht mit einer Wahrscheinlichkeit von etwa 50 %. Absorbierte Photonen produzieren elektrische Signale mit einer jeweiligen Wahrscheinlichkeit von etwa 60 %. Sonne: $\lesssim 10^{21}$ Photonen $(\text{m}^2\text{s})^{-1}$, Sterne: $\sim 10^{10}$ Photonen $(\text{m}^2\text{s})^{-1}$ („Strom“)

f. **FIR-Detektoren** (L. Kouwenhoven, Nature **403**, 374 (2000)) (Abb. III.11)

Es fließt ein Strom über den Quantenpunkt hinweg. Dies ist nur möglich, falls das Photon das blockierende Elektron beseitigt hat.

$$h\nu \approx 1..100 \text{ meV (sichtbares Licht: } 1,6...3,3 \text{ eV)}$$

$$\text{Umrechnung: } kT \approx 0,086 \text{ meV/K} \cdot T[\text{K}] \implies$$

$$\text{Bei } 300 \text{ K : } kT \approx 26 \text{ meV}$$

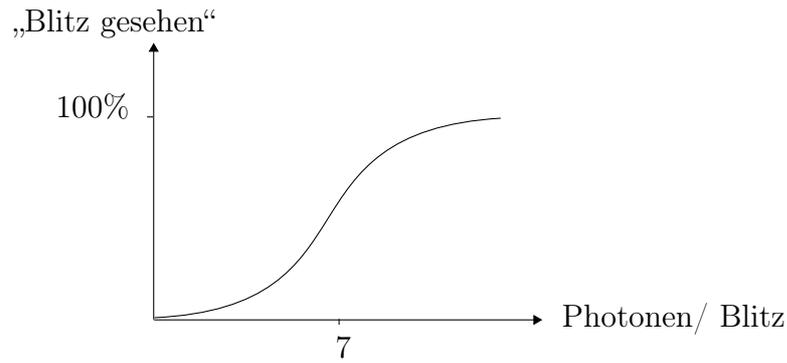


Abbildung III.10.: Empfindlichkeit des Auges

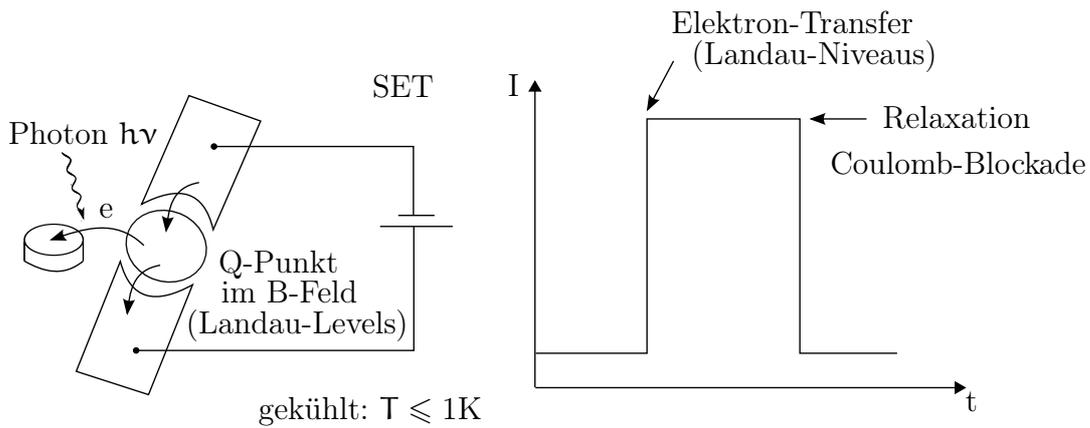


Abbildung III.11.: FIR-Detektor

III.5. Phasen- und Phasenkontrolle

Woher kommen Phasen?

Hintergrund: Komplexe Amplituden (Superposition)

$$c_j = |c|e^{i\varphi}, \quad \varphi = \text{Phase} \quad (\text{III.5.1})$$

Mode (ebene Welle in Raum/Zeit): $\varphi = \mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t$

a)

räumliche Phase : $\alpha(\mathbf{r}) = \mathbf{k}\mathbf{r}$

Materie : $\hbar\mathbf{k} = \mathbf{p} = M\mathbf{v}$ (de Broglie), $|\mathbf{k}| = \frac{2\pi}{\lambda}$

Photon : $\hbar\mathbf{k} = E/c$

III. Elementare Input-Output-Analyse

b) Dynamische Phase

$$\alpha(t) = -\frac{E}{\hbar}t$$

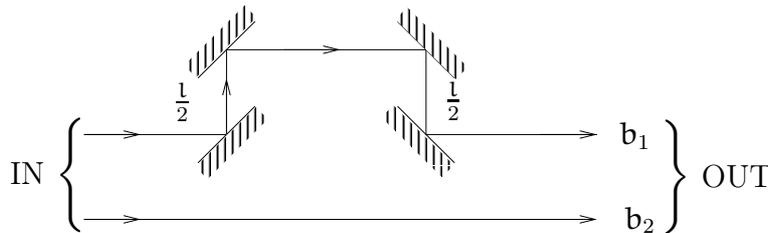
$$\text{Materie: } E = \frac{p^2}{2M} \quad (\text{Moleküle: } M = m_1 + m_2!)$$

$$\text{Photon: } E = \hbar\omega$$
(III.5.2)

Superposition von Moden (\rightarrow Nicht-diagonal-Elemente von $\hat{\rho}$)

i) Zustandsmodelle: Glauberzustand $\alpha = |\alpha|e^{i\phi}$ } Kohärente Zustände
 Phasenzustand } vgl. Kap. IV

ii) Phasenschieber:



iii) Dynamischer Phasenschieber (Sagnac-Effekt)

Unitäre Trafos: $\hat{U}(\Lambda, \Psi, \Theta, \Phi)$ Realisierung über lineare optische Bauelemente.

\rightarrow Drehwinkel, Phasenverschiebung

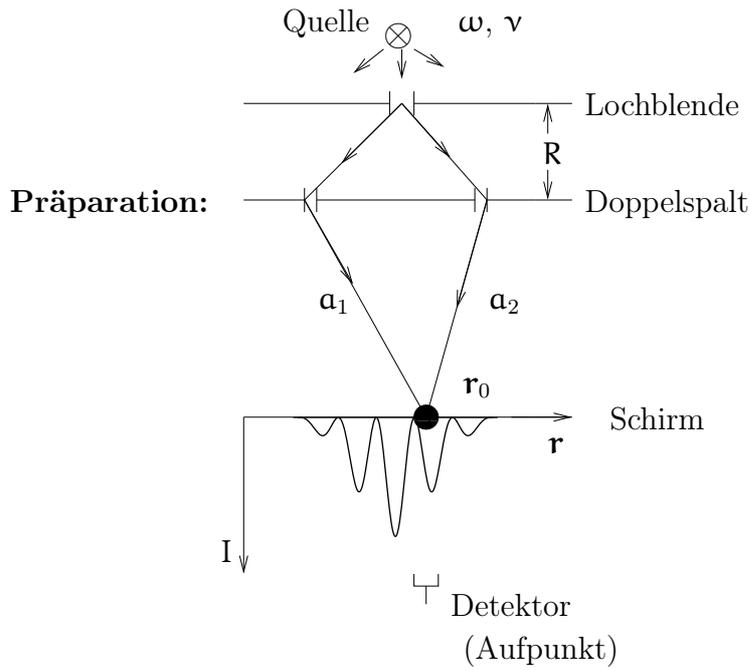
\rightarrow Mess-Winkel (z. B. Polarisationsrichtung in Ebene $\perp \mathbf{k}$)

Geometrische Phase (Berry Phase)

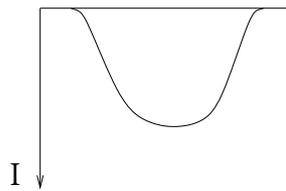
Adiabatische Näherung, Parameterraum (Prozess)

III.5.1. Interferenz-Muster

Selektion jeweils zweier diskreter Moden



Intensitätsabfall bewegungsbezogen ohne Interferenz:



Ebene Welle (komplexe Darstellung)

$$\mathbf{E}_{\mathbf{k}\nu}^{(+)}(\mathbf{r}, t) \equiv i\epsilon_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}\nu} \mathbf{e}_{\mathbf{k}\nu} e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)} \quad (\text{orthonormiert}) \quad (\text{III.5.3})$$

$\epsilon_{\mathbf{k}}$ = Skalenfaktor

$\mathbf{e}_{\mathbf{k}\nu}$ = Polarisations-Einheitsvektor, \mathbf{k} = Wellenvektor

$a_{\mathbf{k}\nu}$ = Amplitude (komplex) (III.5.4)

Selektiere feste Polarisation $\nu \implies$ skalare Beschreibung.

Sei $E_j^{(+)} \sim a_j e^{i\phi_j}$ mit $\underbrace{\phi_j \equiv \mathbf{k}_j \mathbf{r} - \omega t}_{\text{Feld-Phase (Mode)!}} = \text{Input}, \mathbf{r}_0 = \text{fest}.$

Superposition: (2 Moden)

$$E^{(+)} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} (a_1 e^{i\phi_1} + a_2 e^{i\phi_2}) \quad (\text{III.5.5})$$

Output bzgl. festem Aufpunkt \mathbf{r}_0 .

Konjugiert komplex: $E^{(-)} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} (a_1^* e^{-i\phi_1} + a_2^* e^{-i\phi_2}) \quad (\text{III.5.6})$

Photodetektor

Mess Signal (misst nicht $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ separat!).

$$\boxed{I_0 \sim E^{(-)} E^{(+)}} \quad \text{Intensität (Energie) zeitunabhängig} \quad (\text{III.5.7})$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow I_0 &\sim \frac{1}{2} (\mathbf{a}_1^* e^{-i\phi_1} + \mathbf{a}_2^* e^{-i\phi_2}) (\mathbf{a}_1 e^{-i\phi_1} + \mathbf{a}_2 e^{-i\phi_2}) \\ &= \frac{1}{2} |\mathbf{a}_1|^2 + \frac{1}{2} |\mathbf{a}_2|^2 + \frac{1}{2} \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2^* e^{i(\phi_1 - \phi_2)} + \frac{1}{2} \mathbf{a}_1^* \mathbf{a}_2 e^{-i(\phi_1 - \phi_2)} \\ \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2^* &= |\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2| e^{i\gamma} = (\mathbf{a}_1^* \mathbf{a}_2)^* \end{aligned}$$

$$\boxed{I_0 \sim \underbrace{\frac{1}{2} |\mathbf{a}_1|^2 + \frac{1}{2} |\mathbf{a}_2|^2}_{\text{const.}} + \underbrace{|\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2| \cos(\phi_1 - \phi_2 + \gamma)}_{\text{Interferenz-Term}}} \quad (\text{III.5.8})$$

Definition: Interferenzmuster:

$$I_0(\Delta\phi) \quad \Delta\phi = \phi_1 - \phi_2; \quad \omega_1 = \omega_2$$

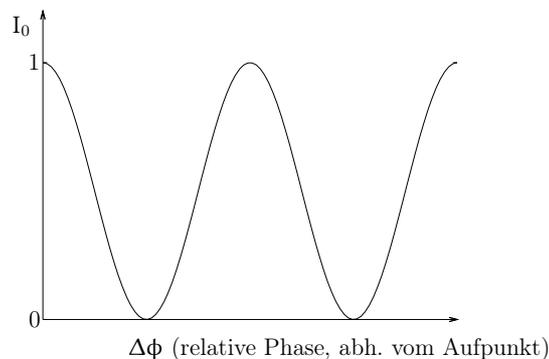
Setze $\mathbf{a}_1 = \sin \alpha$, $\mathbf{a}_2 = \cos \alpha$ ($\Rightarrow \gamma = 0$), $|\mathbf{a}_1|^2 + |\mathbf{a}_2|^2 = 1$ (Normierung)

$$\Rightarrow \boxed{I_0(\Delta\phi) \sim \frac{1}{2} + \sin \alpha \cos \alpha \cos \Delta\phi}$$

Destruktive Interferenz: $I_0 = 0$, Maximaler Kontrast:

$$\Delta I_0 = I_{\max} - I_{\min} \approx 2 \sin \alpha \cos \alpha = 1 \quad \text{für} \quad \sin \alpha = \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Falls $\omega_1 \neq \omega_2$: Interferenzterm mittelt sich weg. Beachte: $\omega_1 \neq \omega_2$ kann nur auf großen Zeitskalen festgestellt werden.



Quantenmechanische Formulierung (Heisenberg-Bild)

$$a_i \rightarrow \hat{a}_i \quad \left[\hat{a}_i, \hat{a}_j^\dagger \right] = \hat{1} \delta_{ij} \quad b_i \rightarrow \hat{b}_i$$

Also $\hat{E}_1^{(+)} \equiv \hat{b}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\hat{a}_1 e^{i\phi_1} + \hat{a}_2 e^{i\phi_2} \right)$

$$\boxed{I_1 \sim \langle \hat{E}_1^{(-)} \hat{E}_1^{(+)} \rangle = \frac{1}{2} \langle \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 \rangle + \frac{1}{2} \langle \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2 \rangle + \frac{1}{2} \langle \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 \rangle e^{-i(\phi_1 - \phi_2)} + \frac{1}{2} \langle \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_1 \rangle e^{i(\phi_1 - \phi_2)}} \quad \text{(III.5.9)}$$

Input-Zustand (= Anfangszustand):

a) $|\psi\rangle = |11\rangle = \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2^\dagger |0\rangle \implies \langle 11 | \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_j | 11 \rangle = 1, j = 1, 2$
 $\langle 11 | \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 | 11 \rangle = 0$ etc.
 $\implies I_1 \sim 1 = \text{const.}$ Keine Interferenz ($I_2 \sim 1$).

b) $|\psi\rangle = \sin \alpha |01\rangle + \cos \alpha |10\rangle$ „Verschränkung“, vgl. (II.3.8).

$$\hat{\rho} = |\psi\rangle\langle\psi| = \begin{pmatrix} \cos^2 \alpha & \sin \alpha \cos \alpha \\ \sin \alpha \cos \alpha & \sin^2 \alpha \end{pmatrix} \implies \begin{aligned} \langle \psi | \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 | \psi \rangle &= \cos^2 \alpha \\ \langle \psi | \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2 | \psi \rangle &= \sin^2 \alpha \\ \langle \psi | \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 | \psi \rangle &= \sin \alpha \cos \alpha \\ \langle \psi | \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_1 | \psi \rangle &= \sin \alpha \cos \alpha \end{aligned}$$

kohärent!

$$\boxed{I_1 \sim \frac{1}{2} [1 + 2 \sin \alpha \cos \alpha \cos(\phi_1 - \phi_2)]} \quad \text{Messgröße} \quad \text{(III.5.10)}$$

Entsprechend: $I_2 \sim \frac{1}{2} [1 - \dots]$ ← wird nicht gemessen. $I_1 + I_2 = \text{const.}$ für jedes ϕ_j .

$\alpha = 0$: $I_1 (I_2) = \text{const.}$ (keine Interferenz)

$\alpha = \frac{\pi}{4}$: $I_1 \simeq \frac{1}{2} (1 + \cos \Delta\phi) = \cos^2 \frac{\Delta\phi}{2}$
 $I_2 \simeq \frac{1}{2} (1 - \cos \Delta\phi) = \sin^2 \frac{\Delta\phi}{2}$ max. Interferenzhub
 $I_1 + I_2 = 1 = \text{const.}$

III.6. Theorie des Vierpols (Strahlteiler)

Literatur: U. Leonhardt, S. 67

III.6.1. Modenselektion

Klassische Felder, vgl. (II.2.15)

III. Elementare Input-Output-Analyse

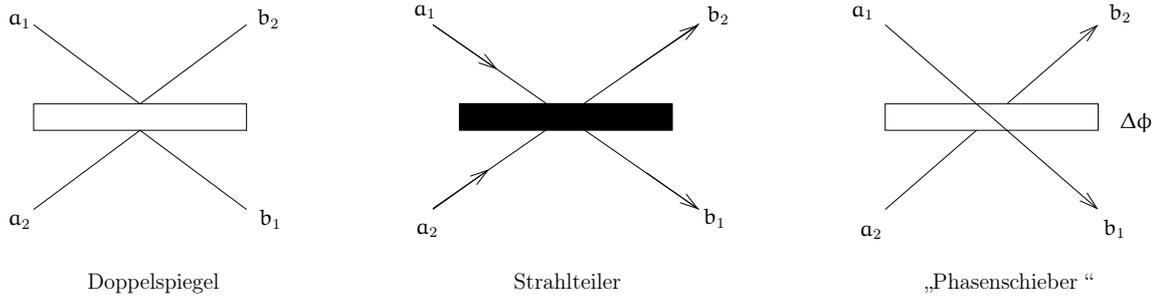


Abbildung III.12.: 4-Pole

$$\mathbf{A}^{(+)}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{k}\nu} \mathbf{u}_{\mathbf{k}\nu}(\mathbf{r}) q_{\mathbf{k}\nu}(t) \quad (\text{III.6.1})$$

$$\mathbf{E}^{(+)}(\mathbf{r}, t) = -\dot{\mathbf{A}}^{(+)}(\mathbf{r}, t) \quad (\text{III.6.2})$$

$$\mathbf{E}^{(+)}(\mathbf{r}, t) = i \sum_j \omega_j \mathbf{u}_j(\mathbf{r}) q_j(t) \quad (\mathbf{k}\nu \rightarrow j) \quad (\text{III.6.3})$$

Annahme: Die Moden-Eigenschaften sind im Fernfeld lokal überall unterscheidbar (orthogonal): Fokussierte Strahlen

$$\mathbf{u}_j(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{u}_{j'}(\mathbf{r}) \approx 0 \quad \text{für } j \neq j' \quad (\text{III.6.4})$$

$$\text{Input: } \mathbf{E}_{\text{in}}^{(+)}(\mathbf{r}, t) : \mathbf{q}_j = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots\} \quad (\text{III.6.5})$$

$$\text{Output: } \mathbf{E}_{\text{out}}^{(+)}(\mathbf{r}, t) : \mathbf{q}_j = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots\}$$

Vier-Pol:

$$\boxed{\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\} \longrightarrow \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}} \quad (\text{III.6.6})$$

III.6.2. Lineare Transformation

$$\begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \end{pmatrix} = \mathcal{B} \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \end{pmatrix} \quad \mathcal{B} = \begin{pmatrix} \mathcal{B}_{11} & \mathcal{B}_{12} \\ \mathcal{B}_{21} & \mathcal{B}_{22} \end{pmatrix} \quad (\text{III.6.7})$$

Postulat „passiv“: Energie-Erhaltung

$$|\mathbf{b}_1|^2 + |\mathbf{b}_2|^2 = |\mathbf{a}_1|^2 + |\mathbf{a}_2|^2 \quad (\text{III.6.8})$$

Die komplexe Matrix \mathcal{B} ist unitär. Beweis (III.6.7):

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1^* \\ \mathbf{b}_2^* \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \mathcal{B}_{11}\mathbf{a}_1 + \mathcal{B}_{12}\mathbf{a}_2 & \mathcal{B}_{21}\mathbf{a}_1 + \mathcal{B}_{22}\mathbf{a}_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathcal{B}_{11}^*\mathbf{a}_1^* + \mathcal{B}_{12}^*\mathbf{a}_2^* \\ \mathcal{B}_{21}^*\mathbf{a}_1^* + \mathcal{B}_{22}^*\mathbf{a}_2^* \end{pmatrix} \\ &= \left(|\mathcal{B}_{11}|^2 + |\mathcal{B}_{21}|^2 \right) |\mathbf{a}_1|^2 + \left(|\mathcal{B}_{22}|^2 + |\mathcal{B}_{12}|^2 \right) |\mathbf{a}_2|^2 \\ &\quad + (\mathcal{B}_{11}\mathcal{B}_{12}^* + \mathcal{B}_{21}\mathcal{B}_{22}^*) \mathbf{a}_1\mathbf{a}_2^* + \text{c.c.} \end{aligned} \quad (\text{III.6.9})$$

Aus Gl. (III.6.8) folgt:

$$\boxed{\begin{aligned} |\mathcal{B}_{11}|^2 + |\mathcal{B}_{21}|^2 &= |\mathcal{B}_{12}|^2 + |\mathcal{B}_{22}|^2 = 1 \\ \mathcal{B}_{11}\mathcal{B}_{12}^* + \mathcal{B}_{21}\mathcal{B}_{22}^* &= \text{c.c.} = 0 \end{aligned}} \quad (\text{III.6.10})$$

Wegen $(\mathcal{B}^\dagger)_{ij} = (\mathcal{B}^*)_{ji}$ und Gl. (III.6.10) ist schließlich

$$\mathcal{B} \cdot \mathcal{B}^\dagger = \dots \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \checkmark \quad (\text{III.6.11})$$

Behauptung: Jede unitäre 2×2 -Matrix lässt sich darstellen als das Matrix-Produkt („drei Schritte“, ohne Beweis)

$$\boxed{\mathcal{B} = e^{i\Lambda/2} \begin{pmatrix} e^{i\Psi/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\Psi/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \frac{\Theta}{2} & \sin \frac{\Theta}{2} \\ -\sin \frac{\Theta}{2} & \cos \frac{\Theta}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\Phi/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\Phi/2} \end{pmatrix}} \quad (\text{III.6.12})$$

mit den reellen Parametern $\Lambda, \Psi, \Theta, \Phi$ ¹. Damit folgt

$$\mathcal{B} = e^{i\Lambda/2} \begin{pmatrix} \cos \frac{\Theta}{2} \cdot e^{i(\Phi+\Psi)/2} & \sin \frac{\Theta}{2} \cdot e^{i(\Psi-\Phi)/2} \\ -\sin \frac{\Theta}{2} \cdot e^{i(\Phi-\Psi)/2} & \cos \frac{\Theta}{2} \cdot e^{-i(\Phi+\Psi)/2} \end{pmatrix} \doteq \begin{pmatrix} \tau & -\rho \\ \rho^* & \tau^* \end{pmatrix} \quad (\text{III.6.13})$$

$$|\tau|^2 + |\rho|^2 \equiv \text{T} + \text{R} = 1 \quad (\text{III.6.14})$$

wobei **T** für Transmission und **R** für Reflexion stehen.

¹Entsprechend gibt es auch 4 unabh. Basis-Matrizen im 2-dim. Zustandsraum

III. Elementare Input-Output-Analyse

Vereinfachte Implementierungen:

- a. Dielektrische Mehrschicht (MS): $\Lambda = \Psi = \Phi = 0$

$$\tau = \cos \frac{\Theta}{2} \quad \rho = -\sin \frac{\Theta}{2} \quad (\text{III.6.15})$$

τ, ρ sind reell.

- b. Einfach-Schicht (ES): $\Lambda = 0; \Psi = -\Phi = \frac{\pi}{2}$

$$\tau = \cos \frac{\Theta}{2} \quad \rho = -i \sin \frac{\Theta}{2} \quad (\text{III.6.16})$$

- c. 50-50-Strahlteiler: $\Theta = -\frac{\pi}{2}$

$$\boxed{\mathcal{B}^{\text{MS}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathcal{B}^{\text{ES}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix}} \quad (\text{III.6.17})$$

\mathcal{B} liegt für jeden Strahlteiler konstruktiv fest!

Beachte: $e^{i\frac{\pi}{2}} = i, e^{i\pi} = -1$.

- d. Doppelspiegel (DS)

$$\mathcal{B}^{\text{DS}} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{III.6.18})$$

III.6.3. Quantenmechanische Formulierung – Heisenberg-Bild

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_i &\rightarrow \hat{\mathbf{a}}_i & [\hat{\mathbf{a}}_i, \hat{\mathbf{a}}_j^*] &= \hat{1} \delta_{ij} \\ \mathbf{b}_i &\rightarrow \hat{\mathbf{b}}_i & [\hat{\mathbf{b}}_i, \hat{\mathbf{b}}_j^*] &= \hat{1} \delta_{ij} \end{aligned} \quad (\text{III.6.19})$$

„Klassische“ (Operator-) Transformation:

$$\begin{pmatrix} \hat{\mathbf{b}}_1 \\ \hat{\mathbf{b}}_2 \end{pmatrix} = \mathcal{B} \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{a}}_1 \\ \hat{\mathbf{a}}_2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{b}}_1^\dagger \\ \hat{\mathbf{b}}_2^\dagger \end{pmatrix} = \mathcal{B}^* \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{a}}_1^\dagger \\ \hat{\mathbf{a}}_2^\dagger \end{pmatrix} \quad (\text{III.6.20a})$$

$$\hat{\mathbf{b}}_1 = \mathbf{B}_{11} \hat{\mathbf{a}}_1 + \mathbf{B}_{12} \hat{\mathbf{a}}_2 \quad \hat{\mathbf{b}}_1^\dagger = \mathbf{B}_{11}^* \hat{\mathbf{a}}_1^\dagger + \mathbf{B}_{12}^* \hat{\mathbf{a}}_2^\dagger \quad (\text{III.6.20b})$$

$$\hat{\mathbf{b}}_2 = \mathbf{B}_{21} \hat{\mathbf{a}}_1 + \mathbf{B}_{22} \hat{\mathbf{a}}_2 \quad \hat{\mathbf{b}}_2^\dagger = \mathbf{B}_{21}^* \hat{\mathbf{a}}_1^\dagger + \mathbf{B}_{22}^* \hat{\mathbf{a}}_2^\dagger \quad (\text{III.6.20c})$$

$$\text{Inverse: } \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{a}}_1^\dagger \\ \hat{\mathbf{a}}_2^\dagger \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_{11} & \mathbf{B}_{21} \\ \mathbf{B}_{12} & \mathbf{B}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{b}}_1^\dagger \\ \hat{\mathbf{b}}_2^\dagger \end{pmatrix} \quad (\text{III.6.20d})$$

Eigenschaften:

$$[\hat{\mathbf{b}}_1, \hat{\mathbf{b}}_1^\dagger] = |\mathbf{B}_{11}|^2 \underbrace{[\hat{\mathbf{a}}_1, \hat{\mathbf{a}}_1^\dagger]}_{=\hat{1}} + |\mathbf{B}_{12}|^2 \underbrace{[\hat{\mathbf{a}}_2, \hat{\mathbf{a}}_2^\dagger]}_{=\hat{1}} \stackrel{!}{=} \hat{1} \quad (\text{III.6.21})$$

$$\implies |\mathbf{B}_{11}|^2 + |\mathbf{B}_{12}|^2 = 1 \quad \text{vgl. Gl. (III.6.10)} \quad (\text{III.6.22})$$

Analog bekommt man

$$\begin{aligned} \left[\hat{\mathbf{b}}_1, \hat{\mathbf{b}}_2^\dagger \right] &= \mathbf{B}_{11} \mathbf{B}_{21}^* \overbrace{\left[\hat{\mathbf{a}}_1, \hat{\mathbf{a}}_1^\dagger \right]}^{=1} + \mathbf{B}_{11} \mathbf{B}_{22}^* \overbrace{\left[\hat{\mathbf{a}}_1, \hat{\mathbf{a}}_2^\dagger \right]}^{=0} \\ &+ \mathbf{B}_{12} \mathbf{B}_{21}^* \underbrace{\left[\hat{\mathbf{a}}_2, \hat{\mathbf{a}}_1^\dagger \right]}_{=0} + \mathbf{B}_{12} \mathbf{B}_{22}^* \underbrace{\left[\hat{\mathbf{a}}_2, \hat{\mathbf{a}}_2^\dagger \right]}_{=1} \stackrel{!}{=} 0 \end{aligned} \quad (\text{III.6.23})$$

$$\implies \mathbf{B}_{11} \mathbf{B}_{21}^* + \mathbf{B}_{12} \mathbf{B}_{22}^* = 0 \quad \text{vgl. Gl. (III.6.10)} \quad (\text{III.6.24})$$

Operator-Darstellung von \mathcal{B} ($\Lambda = 0$):

$$\hat{\sigma}_z \rightarrow \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \hat{\sigma}_y \rightarrow \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{III.6.25})$$

$$\hat{\mathbf{B}}(\Psi, \Theta, \Phi) = e^{-i\Psi\hat{\sigma}_z/2} e^{-i\Theta\hat{\sigma}_y/2} e^{-i\Phi\hat{\sigma}_z/2} \quad (\text{III.6.26})$$

Beachte:

$$e^{i\alpha\hat{\sigma}_j} = \hat{1} \cos \alpha + i\hat{\sigma}_j \sin \alpha \quad (\text{III.6.27})$$

Invariante, ebenso leicht nachzurechnen (vgl. Gl. (III.6.9)):

$$\hat{\mathbf{b}}_1^\dagger \hat{\mathbf{b}}_1 + \hat{\mathbf{b}}_2^\dagger \hat{\mathbf{b}}_2 = \dots = \hat{\mathbf{a}}_1^\dagger \hat{\mathbf{a}}_1 + \hat{\mathbf{a}}_2^\dagger \hat{\mathbf{a}}_2 \quad (\text{III.6.28})$$

III.6.4. Schrödinger-Bild (Exkurs)

Das Heisenberg-Bild ist für die Input-Output-Analyse gebräuchlich, schon wegen der Analogie zur klassischen Darstellung. Um die Umtransformation auf das Schrödinger-Bild zu finden, benötigt man das Standard-Transformationsgesetz. Statt (III.6.20):

$$\text{Heisenberg-Bild: } \boxed{\begin{pmatrix} \hat{\mathbf{b}}_1 \\ \hat{\mathbf{b}}_2 \end{pmatrix} = \hat{\mathbf{U}} \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{a}}_1 \\ \hat{\mathbf{a}}_2 \end{pmatrix} \hat{\mathbf{U}}^\dagger} \quad (\text{III.6.29})$$

Jordan-Schwinger-Darstellung (U. Leonhardt):

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{L}}_0 &= \frac{1}{2} \left(\hat{\mathbf{a}}_1^\dagger \hat{\mathbf{a}}_1 + \hat{\mathbf{a}}_2^\dagger \hat{\mathbf{a}}_2 \right) \\ \hat{\mathbf{L}}_1 &= \frac{1}{2} \left(\hat{\mathbf{a}}_1^\dagger \hat{\mathbf{a}}_2 + \hat{\mathbf{a}}_2^\dagger \hat{\mathbf{a}}_1 \right) \\ \hat{\mathbf{L}}_2 &= \frac{1}{2i} \left(\hat{\mathbf{a}}_1^\dagger \hat{\mathbf{a}}_2 - \hat{\mathbf{a}}_2^\dagger \hat{\mathbf{a}}_1 \right) \\ \hat{\mathbf{L}}_3 &= \frac{1}{2} \left(\hat{\mathbf{a}}_1^\dagger \hat{\mathbf{a}}_1 - \hat{\mathbf{a}}_2^\dagger \hat{\mathbf{a}}_2 \right) \end{aligned} \quad (\text{III.6.30})$$

III. Elementare Input-Output-Analyse

\hat{L}_0 kommutiert mit allen Operatoren $\hat{L}_1, \hat{L}_2, \hat{L}_3$ (Drehimpulskommutatoren).
Behauptung, ohne Beweis, vgl. Gl. (III.6.26; vgl. Euler-Winkel bei starrem Körper in theoret. Mechanik):

$$\boxed{\hat{U}(\Lambda, \Theta, \Phi, \Psi) = e^{-i\Phi\hat{L}_3} e^{-i\Theta\hat{L}_2} e^{-i\Psi\hat{L}_3} e^{-i\Lambda\hat{L}_0}} \quad (\text{III.6.31})$$

$$\begin{array}{l} \text{Schrödinger-Bild:} \end{array} \quad \begin{array}{l} |\Psi_{\text{in}}\rangle \rightarrow |\Psi_{\text{out}}\rangle \\ \boxed{|\Psi_{\text{out}}\rangle = \hat{U}^\dagger |\Psi_{\text{in}}\rangle} \end{array} \quad (\text{III.6.32})$$

Beispiel (U. Leonhardt, S. 77): Zwei-Moden-Fock-Zustand als Input

$$\text{IN: } |n_1 n_2\rangle = (n_1! n_2!)^{-1/2} (\hat{a}_1^\dagger)^{n_1} (\hat{a}_2^\dagger)^{n_2} |00\rangle \quad (\text{III.6.33})$$

$$\text{OUT: } \hat{U}^\dagger |n_1 n_2\rangle = (n_1! n_2!)^{-1/2} \hat{U}^\dagger (\hat{a}_1^\dagger)^{n_1} (\hat{a}_2^\dagger)^{n_2} \hat{U} |00\rangle \quad (\text{III.6.34})$$

↑ einschieben

da $\hat{U} |00\rangle = |00\rangle$ „Vakuum produziert Vakuum (Energie-Erhaltung)“. Nun folgt mit Hilfe der Gln. (III.6.20): Inverse (III.6.20d):

$$\begin{pmatrix} \hat{a}_1^\dagger \\ \hat{a}_2^\dagger \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{21} \\ B_{12} & B_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{b}_1^\dagger \\ \hat{b}_2^\dagger \end{pmatrix}$$

Nun mit (III.6.29)

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \hat{a}_1^\dagger \\ \hat{a}_2^\dagger \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} B_{11} & B_{21} \\ B_{12} & B_{22} \end{pmatrix} \hat{U} \begin{pmatrix} \hat{a}_1^\dagger \\ \hat{a}_2^\dagger \end{pmatrix} \hat{U}^\dagger \\ \implies \hat{U}^\dagger \begin{pmatrix} \hat{a}_1^\dagger \\ \hat{a}_2^\dagger \end{pmatrix} \hat{U} &= \begin{pmatrix} B_{11} & B_{21} \\ B_{12} & B_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{a}_1^\dagger \\ \hat{a}_2^\dagger \end{pmatrix}; \text{ also} \end{aligned}$$

$$\hat{U}^\dagger |n_1 n_2\rangle = (n_1! n_2!)^{-1/2} (B_{11}\hat{a}_1^\dagger + B_{21}\hat{a}_2^\dagger)^{n_1} (B_{12}\hat{a}_1^\dagger + B_{22}\hat{a}_2^\dagger)^{n_2} |00\rangle \quad (\text{III.6.35})$$

„Optisch gemischter Fock-Zustand“. Im folgenden Heisenberg-Bild.

III.7. Ein-Photon-Input am Strahlteiler

Sei der Input-Zustand

$$|\Psi^{\text{in}}\rangle = \hat{a}_2^\dagger |0\rangle \quad (\text{III.7.1})$$

III.7.1. Direkte selektive Messung (Heisenberg Bild)

Nach (III.4.5):

$$P = \alpha \langle \Psi_{\text{in}} | \hat{\mathbf{E}}_{\text{out}}^{(-)} \cdot \hat{\mathbf{E}}_{\text{out}}^{(+)} | \Psi_{\text{in}} \rangle \quad (\text{III.7.2})$$

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{E}}_{\text{out}}^{(-)} : \{ \hat{b}_1^\dagger, \hat{b}_2^\dagger \} & \quad \hat{\mathbf{E}}_{\text{out}}^{(+)} : \{ \hat{b}_1, \hat{b}_2 \} \\ \hat{b}_1 &= \tau \hat{a}_1 - \rho \hat{a}_2 & \hat{b}_1^\dagger &= \tau^* \hat{a}_1^\dagger - \rho^* \hat{a}_2^\dagger \\ \hat{b}_2 &= \rho^* \hat{a}_1 + \tau \hat{a}_2 & \hat{b}_2^\dagger &= \rho \hat{a}_1^\dagger + \tau \hat{a}_2^\dagger \end{aligned} \quad (\text{III.7.3})$$

$$\begin{aligned} \hat{b}_1^\dagger \hat{b}_1 &= (\tau^* \hat{a}_1^\dagger - \rho^* \hat{a}_2^\dagger) (\tau \hat{a}_1 - \rho \hat{a}_2) = |\tau|^2 \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 - \tau^* \rho \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 - \rho^* \tau \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_1 + |\rho|^2 \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2 \\ &\implies \hat{b}_1^\dagger \hat{b}_1 = |\rho|^2 \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2 + \dots \quad \text{Heisenberg-Bild} \\ \text{entspr. } \hat{b}_2^\dagger \hat{b}_2 &= |\tau|^2 \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 + \dots \end{aligned} \quad (\text{III.7.4})$$

$\text{Detektor } D_2 : P^{(2)} = \alpha |\tau|^2 \langle 0 | \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2 | 0 \rangle = \alpha |\tau|^2$

(III.7.5)

$\text{Detektor } D_1 : P^{(1)} = \alpha |\rho|^2 \quad \text{analog}$

(III.7.6)

Die Parameter τ, ρ des Strahlteilers führen hier also zu Wahrscheinlichkeiten!

III.7.2. Koinzidenz-Messung (Heisenberg-Bild)

$|\Psi^{\text{in}}\rangle$ sei weiterhin gegeben durch (III.7.1), $|\Psi^{\text{in}}\rangle = |n_2 = 1, n_1 = 0\rangle$

$$\text{Korrelation: } P^{(12)} = \alpha \langle \Psi^{\text{in}} | \hat{b}_1^\dagger \hat{b}_1 \hat{b}_2^\dagger \hat{b}_2 | \Psi^{\text{in}} \rangle \quad (\text{III.7.7})$$

Aus Gl. (III.6.21) :

$$\hat{b}_1^\dagger \hat{b}_1 = |B_{11}|^2 \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 + B_{11} B_{12}^* \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_1 + B_{12} B_{11}^* \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 + |B_{12}|^2 \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2 \quad (\text{III.7.8a})$$

$$\hat{b}_2^\dagger \hat{b}_2 = |B_{22}|^2 \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2 + B_{22} B_{21}^* \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 + B_{21} B_{22}^* \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_1 + |B_{21}|^2 \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 \quad (\text{III.7.8b})$$

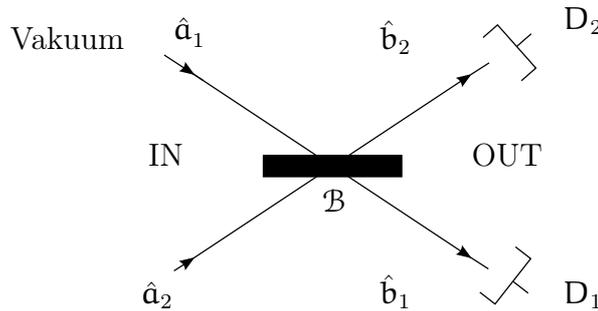


Abbildung III.13.: Schema des Strahlteilers \mathcal{B} aus (III.6.13). Konvention: Moden-Index 1 = abfallend, 2 = ansteigend.

III. Elementare Input-Output-Analyse

Im Erwartungswert (III.7.7) verschwinden alle Terme, in denen links \hat{a}_1^\dagger bzw. rechts \hat{a}_1 vorkommt, sowie mit ungleich vielen Erzeugern bzw. Vernichtern pro Mode, da der Input von Kanal 1 das Vakuum ist. Also wird

$$\begin{aligned} \hat{b}_1^\dagger \hat{b}_1 \hat{b}_2^\dagger \hat{b}_2 &\longrightarrow B_{11} B_{12}^* B_{22} B_{21}^* \hat{a}_2^\dagger \underbrace{\hat{a}_1 \hat{a}_1^\dagger}_{=\hat{1} + \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1} \hat{a}_2 + |B_{12}|^2 |B_{22}|^2 \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2 \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2 \\ &= |B_{12}|^2 |B_{22}|^2 (\hat{n}_2)^2 + B_{11} B_{12}^* B_{22} B_{21}^* \hat{n}_2 = |\rho|^2 |\tau|^2 (\hat{n}_2)^2 + |\tau|^2 (-\rho^*) \rho \hat{n}_2 \\ &= RT (\hat{n}_2^2 - \hat{n}_2) \quad (\text{III.7.9}) \end{aligned}$$

wobei $RT \equiv |\rho|^2 |\tau|^2$.

$$\boxed{P^{(12)} = \alpha RT [\langle 0 \hat{n}_2 | \hat{n}_2^2 | 0 \hat{n}_2 \rangle - \langle 0 \hat{n}_2 | \hat{n}_2 | 0 \hat{n}_2 \rangle]} = \alpha RT (n_2^2 - n_2) \quad (\text{III.7.10})$$

Bei $n_2 = 1$ gemäß (III.7.1):

$$\boxed{P^{(12)} = 0} \quad (\text{III.7.11})$$

Aus (III.7.5), (III.7.6), (III.7.10) folgt für beliebiges $n_2 = \text{fester Parameter (scharf)}$:

$$\begin{aligned} P^{(1)} &= \alpha R \cdot n_2 \\ P^{(2)} &= \alpha T \cdot n_2 \\ g^{(2,2)} &= \frac{P^{(12)}}{P^{(1)} P^{(2)}} = \frac{n_2^2 - n_2}{n_2^2} = \left(1 - \frac{1}{n_2}\right) \longrightarrow 1 \quad \text{für } n_2 \longrightarrow \infty \quad (\text{Vgl. (IV.3.35)}) \end{aligned}$$

$g^{(2,2)} = 1$: unkorreliert.

Betrachte zwei verschiedene Interpretationsmodelle (Einzelereignisse 0,1):

- 50:50-Strahlteiler mit $|\Psi^{\text{in}}\rangle = \hat{a}_2^\dagger |0\rangle$, Analogie hierzu: Galton-Brett 50:50. Siehe Abb. III.14.

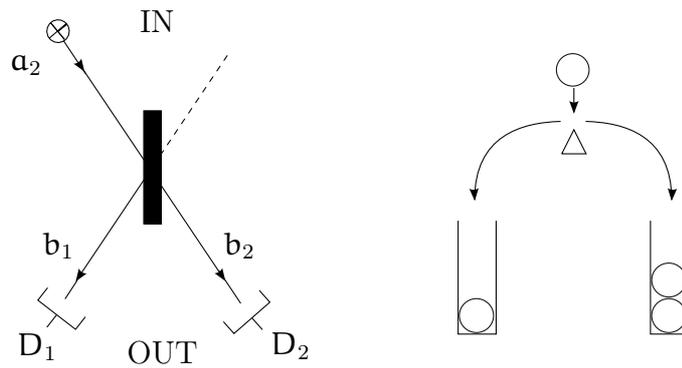


Abbildung III.14.: links: 50:50-Strahlteiler, rechts: Galton-Brett 50:50

Simulation:	Expt. Nr.	a	b	c	d	e	$\overline{N_1} = \frac{1}{2} = R$ $\overline{N_2} = \frac{1}{2} = T$ $\overline{N_1 N_2} = 0$
	N_1^{out}	0	1	1	0	1	
	N_2^{out}	1	0	0	1	0	
	$N_1 \cdot N_2$	0	0	0	0	0	

b. „Photonen teilbar“

Simulation:	N_1^{out}	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\overline{N_1} = \frac{1}{2} = R$ $\overline{N_2} = \frac{1}{2} = T$ $\overline{N_1 N_2} = \frac{1}{4}$
	N_2^{out}	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	
	$N_1 \cdot N_2$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	

Anmerkungen:

- Allein mit den Aussagen (III.7.5) und (III.7.6) kann man zwischen beiden obigen Modellen nicht unterscheiden!
- Mit der Bedingung (III.7.11) überlebt nur das diskrete Modell a! Die Koeffizienten $|\tau|^2 = T$, $|\rho|^2 = R$ kontrollieren die Wahrscheinlichkeit. Die einfallenden Photonen werden in festen Quanten auf die Ausgänge verteilt, aber so, dass im Mittel das Intensitätsverhältnis R/T konstant ist.
- Bei nur einem Input (wie oben) „verunreinigt“ das Vakuum am zweiten Input den Output durch Fluktuationen. Beide Inputs sind notwendig zur vollständigen Beschreibung.

Experiment nach Grangier, Roger, Aspect, Europhys. Lett. **1**, 173 (1986) (siehe Abb. III.15). Nur bei einem Klick bei D_0 werden beide Gates geöffnet. Damit werden zufällige

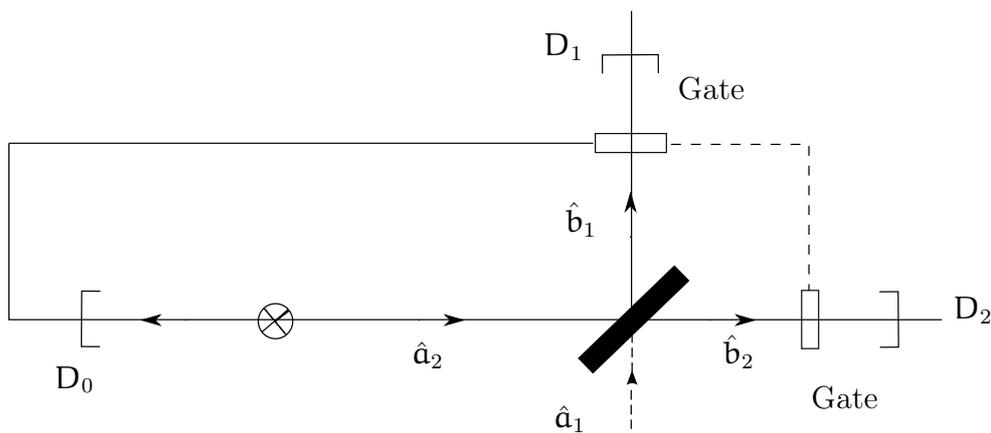


Abbildung III.15.: Versuch nach Grangier et al.

Detektions-Ereignisse unterdrückt. Entsprechend Bedingung (III.7.11) ist das Photon unteilbar, d. h. **entweder** Klick bei D_1 **oder** bei D_2 .

III.7.3. Homodyn-Messung („balanced homodyne detection“)

Literatur: Scully, S. 130, D’Ariano, quant-ph/9902013

Definition: Operator für Intensitäts-Differenz

$$\hat{\vartheta}_{12} = \hat{b}_1^\dagger \hat{b}_1 - \hat{b}_2^\dagger \hat{b}_2 \quad (\text{III.7.12})$$

Transformation gemäß (III.6.20):

$$\begin{aligned} \hat{b}_1^\dagger \hat{b}_1 &= |B_{11}|^2 \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 + B_{11} B_{12}^* \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_1 + B_{12} B_{11}^* \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 + |B_{12}|^2 \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2 \\ 1 \leftrightarrow 2 \quad \hat{b}_2^\dagger \hat{b}_2 &= |B_{22}|^2 \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2 + B_{22} B_{21}^* \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 + B_{21} B_{22}^* \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_1 + |B_{21}|^2 \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 \\ &= (|B_{11}|^2 - |B_{21}|^2) (\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 - \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2) \\ &\quad + \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 (B_{12} B_{11}^* - B_{22} B_{21}^*) + \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_1 (B_{11} B_{12}^* - B_{21} B_{22}^*) \end{aligned} \quad (\text{III.7.13})$$

Setze speziell (vgl. Strahlteiler ES nach Gl. (III.6.16))

$$\begin{aligned} B_{11} &= \tau = \cos \frac{\theta}{2} = B_{22} \\ B_{12} &= i \sin \frac{\theta}{2} = B_{21} \end{aligned} \quad (\text{III.7.14})$$

$$|B_{11}|^2 - |B_{21}|^2 = \cos^2 \frac{\theta}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2} = \cos \theta \quad (\text{III.7.15})$$

$$B_{12} B_{11}^* - B_{22} B_{21}^* = 2 \cdot i \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} = i \sin \theta \quad (\text{III.7.16})$$

$$\hat{\vartheta}_{12} = \cos \theta (\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 - \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2) + i \sin \theta (\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 - \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_1) \quad (\text{III.7.17})$$

50:50-Strahlteiler:

$$\theta = -\frac{\pi}{2} \quad (\text{III.7.18})$$

$$\hat{\vartheta}_{12} = -i (\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 - \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_1) \quad (\text{III.7.19})$$

Nur der Interferenz-Term überlebt!

Bei einem Ein-Photon-Zustand als Input (vgl. (III.7.11)):

$$|\Psi^{\text{in}}\rangle = \hat{a}_2^\dagger |0\rangle \implies P_A \sim \langle \Psi^{\text{in}} | \hat{\vartheta}_{12} | \Psi^{\text{in}} \rangle = 0 \quad (\text{III.7.20})$$

Nun fügt man zusätzlich in Kanal 1 einen starken Input („lokalen Oszillator“) hinzu:

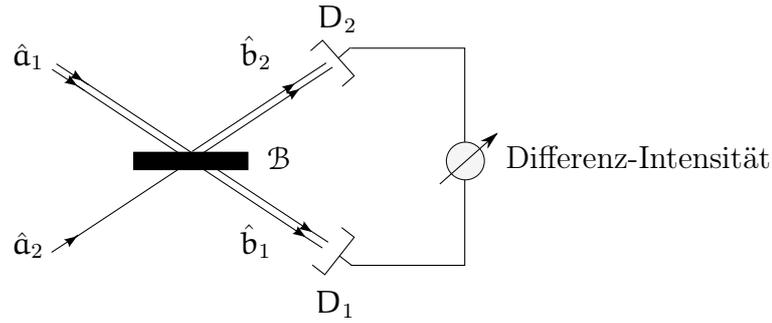


Abbildung III.16.: Schema Oszillator

Semiklassische Parametrisierung (D'Ariano, quant-ph/9902013)

$$\begin{aligned}
 \hat{a}_1^\dagger, \hat{a}_1 &\longrightarrow \mathbf{a}_1^*, \mathbf{a}_1 && \text{mit} \\
 \mathbf{a}_1 &= |\mathbf{a}_1| e^{i\varphi_{12}} && \text{(III.7.21)} \\
 \mathbf{a}_1^* &= |\mathbf{a}_1| e^{-i\varphi_{12}}
 \end{aligned}$$

mit φ_{12} als relative Phase bezüglich Mode 2. Beachte: ein einzelnes Photon (Fock-Zustand) hat keine eigene Phase!

$$\hat{\vartheta}_{12} = i |\mathbf{a}_1| e^{i\varphi_{12}} \left(\hat{a}_2^\dagger - \hat{a}_2 e^{-2i\varphi_{12}} \right) \quad \text{(III.7.22)}$$

Messung der Quadratur-Observablen:

$\varphi_{12} = 0$	$\hat{\vartheta}_{12} \sim \hat{a}_2^\dagger - \hat{a}_2 \sim \hat{P}_2$
$\varphi_{12} = \frac{\pi}{2}$	$\hat{\vartheta}_{12} \sim \hat{a}_2^\dagger + \hat{a}_2 \sim \hat{Q}_2$

(III.7.23)

Homodyn: $\omega_1 = \omega_2 \Rightarrow$ relative Phase $\varphi_{12} = \text{const}$

Heterodyn: $\omega_1 \neq \omega_2 \Rightarrow \varphi_{12}$ schwankt zeitlich.

III.7.4. Doppel-Homodyn-Messungen

Literatur: Römer, S. 277

Man kann die beiden Messungen der Gl. (III.7.23) sogar „gleichzeitig“ ausführen durch die Kombination zweier Homodyn-Anwendungen! Erfolgt hier die Messung inkompatibler Observabler!? (H.A. Haus, S. 298)

Man kann die Moden \hat{c} und \hat{d} unabhängig messen, durch den Strahlteiler tritt jedoch ein Rauschen auf. Die Unschärfe der gemessenen Quadratur-Operatoren ist dann der doppelte Heisenberg-Limit $2\hbar$!

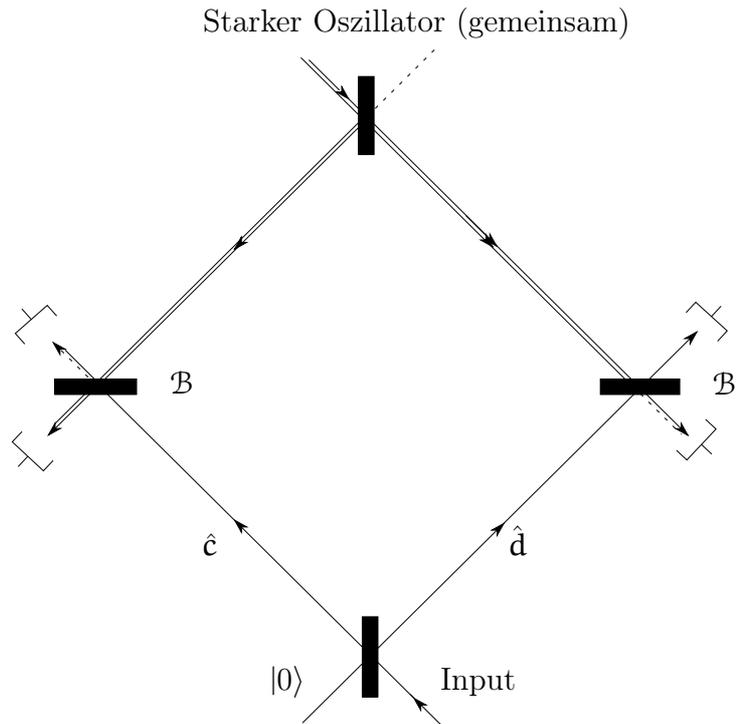


Abbildung III.17.: Doppel-Homodyn: Zwei Detektor-Sätze!

III.8. Ein-Photon-Interferometrie

III.8.1. Mach-Zehnder-Interferometer

„Kombi-Vierpol“, klassische Formulierung

Die geometrischen Wege sind gleich, betrachte nur die Zusatz-Phasen durch optische Bauelemente wie Strahlteiler

$$\mathcal{B}^{\text{ES}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{III.8.1})$$

und Doppelspiegel

$$\mathcal{B}^{\text{DS}} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{III.8.2})$$

Phasensprung von $e^{i\pi/2} = i$, auch andere Phasensprünge möglich!

Phasenschieber:

$$\mathcal{B}^{\text{Ph}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{-i\varphi/2} & 0 \\ 0 & e^{i\varphi/2} \end{pmatrix} \quad (\text{III.8.3})$$

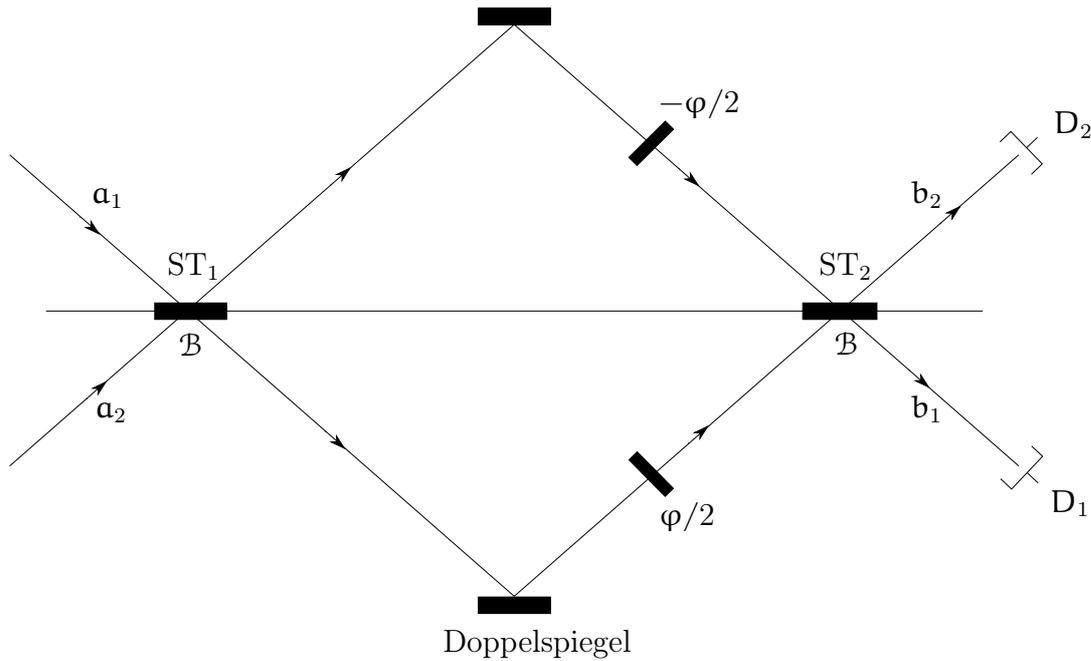


Abbildung III.18.: Mach-Zehnder-Interferometer.
1 = abfallend, 2 = ansteigend.

Konvention: Moden-Index

Linearität:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}}_{\text{Output}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-i\varphi/2} & 0 \\ 0 & e^{i\varphi/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}}_{\text{Input}} \equiv \mathcal{B}^{\text{eff}} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \quad (\text{III.8.4})$$

$$\mathcal{B}^{\text{eff}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -e^{-i\varphi/2} - e^{i\varphi/2} & i - e^{-i\varphi/2} - ie^{-i\varphi/2} \\ -ie^{-i\varphi/2} + ie^{i\varphi/2} & -e^{-i\varphi/2} - e^{i\varphi/2} \end{pmatrix} \stackrel{\substack{\text{gemeinsame Phase} \\ \downarrow}}{=} - \begin{pmatrix} \cos \frac{\varphi}{2} & -\sin \frac{\varphi}{2} \\ +\sin \frac{\varphi}{2} & \cos \frac{\varphi}{2} \end{pmatrix} \quad (\text{III.8.5})$$

Die Gesamtanordnung besteht aus zwei 50:50-Strahlteilern vom Typ ES und einem Phasenschieber, sowie einem Doppel-Spiegel. Dies ist äquivalent zu einem allgemeinen Strahlteiler vom Typ MS (vgl. (III.6.16), (III.6.15)). „Effektiver Vierpol“. Die Phase φ ist anpassbar!

III.8.2. Quantenmechanische Formulierung (Heisenberg-Bild)

Aus (III.6.20)

$$\begin{pmatrix} \hat{b}_1 \\ \hat{b}_2 \end{pmatrix} = \mathcal{B}^{\text{eff}} \begin{pmatrix} \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \end{pmatrix}$$

III. Elementare Input-Output-Analyse

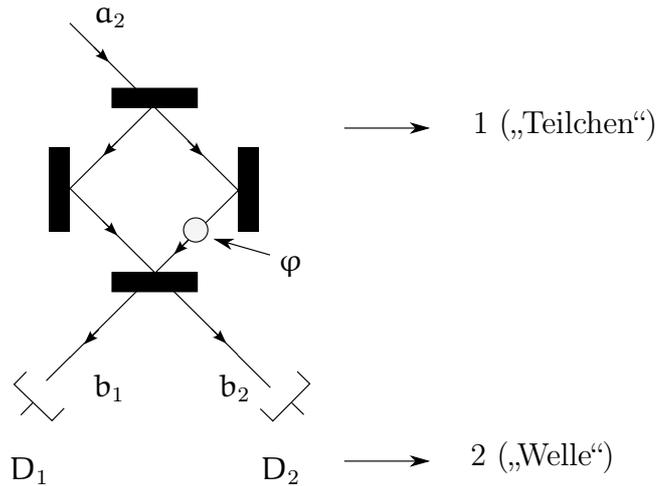


Abbildung III.19.: Experiment zum Welle-Teilchen-Dualismus

und, mit (III.8.5):

$$\frac{\theta}{2} = \beta \implies \hat{b}_1 = \hat{a}_1 \cos \beta - \hat{a}_2 \sin \beta$$

$$\hat{b}_1^\dagger = \hat{a}_1^\dagger \cos \beta - \hat{a}_2^\dagger \sin \beta$$

Zur Berechnung von $\hat{b}_1^\dagger \hat{b}_1$ und $\hat{b}_2^\dagger \hat{b}_2$ vgl. (III.7.13).

Sei $|\Psi^{\text{in}}\rangle = \hat{a}_2^\dagger |0\rangle$ (ein Photon). Man erhält an den Detektoren ein „Phasenmuster“:

$$\boxed{\begin{aligned} I_1 &\sim \langle \Psi^{\text{in}} | \hat{b}_1^\dagger \hat{b}_1 | \Psi^{\text{in}} \rangle = \sin^2 \beta \\ I_2 &\sim \langle \Psi^{\text{in}} | \hat{b}_2^\dagger \hat{b}_2 | \Psi^{\text{in}} \rangle = \cos^2 \beta \end{aligned}} \quad (\text{III.8.6})$$

Diese Experiment „beweist“ die Wellen-Natur des elektromagnetischen Feldes: Phasen gibt es nicht für Teilchen. In Abb. III.19 zeigt die Messung oben (1) den Teilchen-Aspekt, die Messung unten (2) den Wellen-Aspekt (Phasenabhängigkeit). Dies zeigt den Welle-Teilchen-Dualismus. Die Messungen 1 und 2 sind natürlich nur alternativ möglich!

III.8.3. Beispiel: Phasenschieber in der Teilchenoptik

Neutronen-Interferometrie im Schwerfeld: Experiment nach Colela, PRL **34**, 1472 (1975)

De Broglie:

$$|\mathbf{p}| = \hbar |\mathbf{k}| = \frac{2\pi\hbar}{\lambda_0} \quad (\text{III.8.7})$$

Für $z = 0$:

$$E_{\text{kin}} = \frac{p^2}{2M} = \frac{2\pi^2\hbar^2}{M\lambda_0^2}$$

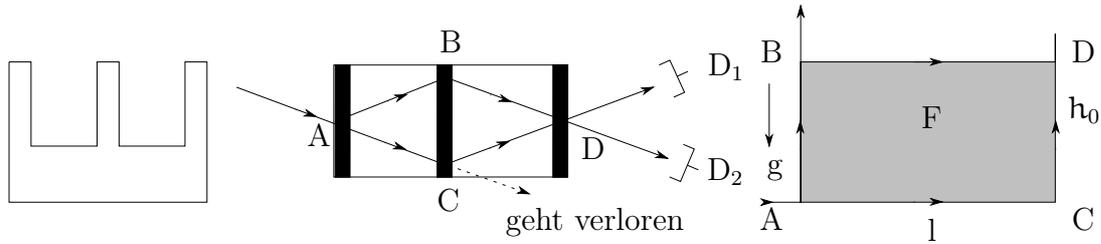


Abbildung III.20.: Versuch nach Colela. Links: Interferometer, rechts: Weg-Schema

Eigenschaft der Quelle am Ort $z = 0$:

$$\lambda_0^2 = \frac{2\pi^2 \hbar^2}{M E_{\text{kin}}} \quad (\text{III.8.8})$$

Im Schwerfeld: Energieerhaltung!

$$E = \frac{2\pi^2 \hbar^2}{M \lambda_0^2} = \frac{\hbar^2 k^2}{2M} + Mgz = \text{const} \quad (\text{III.8.9})$$

$$\Rightarrow k^2 = \frac{4\pi^2}{\lambda_0^2} - \frac{2M^2 g z}{\hbar^2} = \frac{4\pi^2}{\lambda_0^2} \left(1 - \frac{M^2 g z \lambda_0^2}{2\pi^2 \hbar^2} \right)$$

$$|\mathbf{k}| \approx \frac{2\pi}{\lambda_0} \left(1 - \frac{M^2 g z \lambda_0^2}{4\pi^2 \hbar^2} \right) \equiv k_0 - \alpha \cdot z \quad (\text{III.8.10})$$

Phasenunterschied: $\phi_{ABD} - \phi_{ACD}$. Phasenbeziehungen zwischen den einzelnen Punkten:

$$\begin{aligned} \varphi_{AB} &= \varphi_{CD} && \text{vgl. Abb. III.20 rechts} \\ \varphi_{AC} &= k_0 l \\ \varphi_{BD} &= k_0 l - \alpha h l \end{aligned}$$

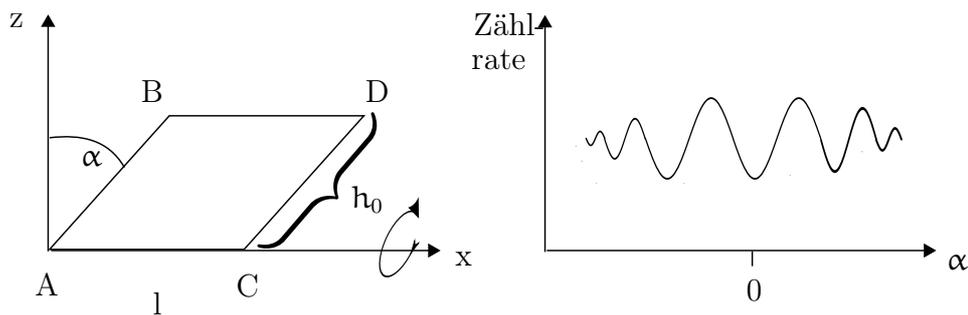


Abbildung III.21.: Beispiel: Phasenunterschied am Si-Einkristall, 10cm lang. Links: schematische Anordnung mit Drehung um x -Achse, rechts: Zählrate eines Zählers (z. B. D_2), symmetrisch bzgl. α

$$\alpha = 0: \boxed{\phi_{ABD} - \phi_{ACD} = -\alpha_0 F} \quad (\text{III.8.11})$$

Drehung der Anordnung:

$$h = h_0 \cos \alpha \implies \Delta\phi = -\alpha_0 F \cos \alpha$$

III.9. Zwei-Photon-Interferometrie (Acht-Pol)

Literatur:

Horne, Shimony, Zeilinger, PRL **62**, 2209 (1989)

Greenberger, Horne, Zeilinger, Phys. Today, Aug. 1993, S. 22

R. Gosh, L. Mandel, PRL **59**, 1903 (1987)

Scully, S. 601

III.9.1. System

Zwei Subsysteme **1,2** mit jeweils zwei Moden k_1, k_2 .

Quelle: parametric down-conversion Typ 1 (vgl. Abschnitt III.3.2)

$$|\Psi^{\text{in}}\rangle(1,2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[|k_1(1), k_2(2)\rangle + |k_2(1), k_1(2)\rangle \right] \quad (\text{III.9.1})$$

mit maximaler Verschränkung. (symmetrisch! Bosonischer Charakter)

Bilokale Transformation:

$$\boxed{\mathcal{B}(1,2) = \mathcal{B}(1) \otimes \mathcal{B}(2)} \quad (\text{III.9.2})$$

Für Subsystem **1**:

$$\begin{pmatrix} \hat{b}_1(1) \\ \hat{b}_2(1) \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-i\alpha/2} & 0 \\ 0 & e^{i\alpha/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{a}_1(1) \\ \hat{a}_2(1) \end{pmatrix} \quad (\text{III.9.3})$$

$$\boxed{\mathcal{B}(1) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -e^{i\alpha/2} & ie^{-i\alpha/2} \\ ie^{i\alpha/2} & -e^{-i\alpha/2} \end{pmatrix}} \quad (\text{III.9.4})$$

Entsprechend für Subsystem **2**:

$$\begin{pmatrix} \hat{b}_1(2) \\ \hat{b}_2(2) \end{pmatrix} = \mathcal{B}(2) \begin{pmatrix} \hat{a}_1(2) \\ \hat{a}_2(2) \end{pmatrix} \quad (\text{III.9.5})$$

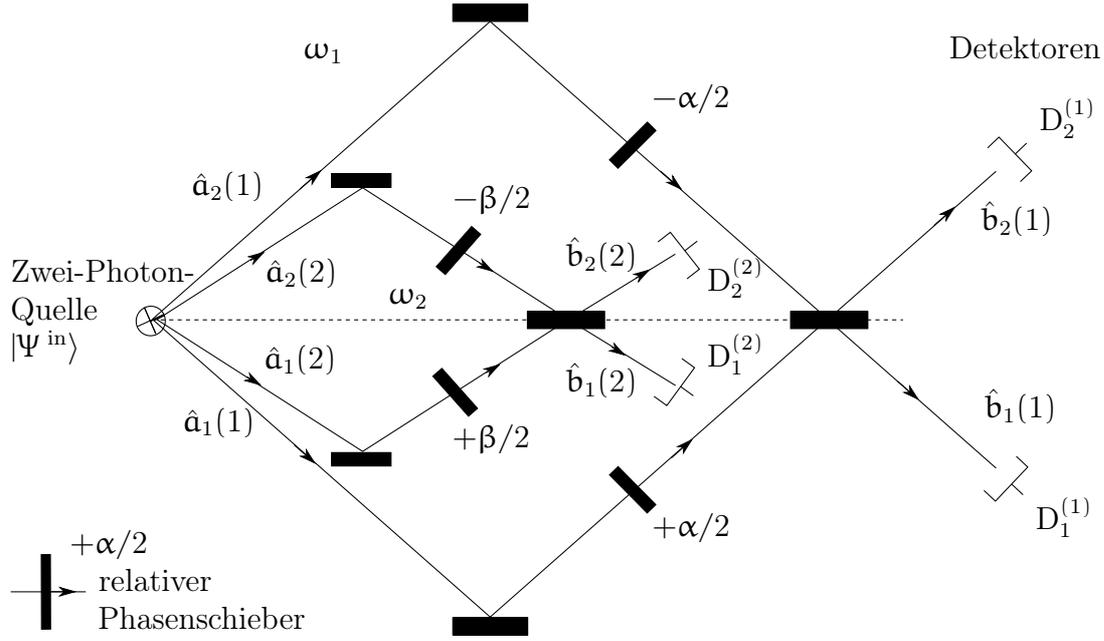


Abbildung III.22.: Schema Zwei-Photon-Interferometrie, Acht-Pol (vier Inputs, vier Outputs)

III.9.2. Koinzidenzmessungen

„Interferenz 4. Ordnung“

$$I_{n,m}^{(2,1)} \sim \langle \Psi^{\text{in}} | \hat{b}_m^\dagger(1) \hat{b}_n^\dagger(2) \hat{b}_n(2) \hat{b}_m(1) | \Psi^{\text{in}} \rangle \quad (\text{III.9.6})$$

$$\hat{b}_n(2) \hat{b}_m(1) = \sum_{n', m'} B_{nn'}(2) B_{mm'}(1) \hat{a}_{n'}(2) \hat{a}_{m'}(1)$$

Sei

$$| \Psi^{\text{in}} \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [\hat{a}_2^\dagger(2) \hat{a}_1^\dagger(1) + \hat{a}_1^\dagger(2) \hat{a}_2^\dagger(1)] | 0 \rangle \quad (\text{verschränkt}) \quad (\text{III.9.7})$$

$$\Rightarrow \hat{b}_n(2) \hat{b}_m(1) | \Psi^{\text{in}} \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [B_{n2}(2) B_{m1}(1) + B_{n1}(2) B_{m2}(1)] | 0 \rangle \quad (\text{III.9.8})$$

Einzelfälle:

$$\begin{aligned} \hat{b}_2(2) \hat{b}_1(1) | \Psi^{\text{in}} \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} [B_{22}(2) B_{11}(1) + B_{21}(2) B_{12}(1)] | 0 \rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\beta/2} \right) \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\alpha/2} \right) + \left(\frac{i}{\sqrt{2}} e^{i\beta/2} \right) \left(\frac{i}{\sqrt{2}} e^{-i\alpha/2} \right) \right] | 0 \rangle \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} (e^{i(\alpha-\beta)/2} - e^{-i(\alpha-\beta)/2}) | 0 \rangle = \frac{i}{\sqrt{2}} \sin \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) | 0 \rangle \quad (\text{III.9.9}) \end{aligned}$$

$$\langle \Psi^{\text{in}} | \hat{b}_1^\dagger(1) \hat{b}_2^\dagger(2) = \langle 0 | \left[-\frac{i}{\sqrt{2}} \sin \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) \right]$$

$$\Rightarrow \boxed{I_{21}^{(2,1)} \sim \frac{1}{2} \sin^2 \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)} \quad (\text{III.9.10})$$

Entsprechend ist

$$\hat{b}_2(1)\hat{b}_1(2) |\Psi^{\text{in}}\rangle = \dots = -\frac{i}{\sqrt{2}} \sin \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) |0\rangle$$

$$\Rightarrow \boxed{I_{12}^{(2,1)} \sim \frac{1}{2} \sin^2 \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)} \quad (\text{III.9.11})$$

sowie

$$\hat{b}_1(2)\hat{b}_1(1) |\Psi^{\text{in}}\rangle = \dots = -\frac{i}{\sqrt{2}} \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) |0\rangle$$

$$\boxed{I_{11}^{(2,1)} \sim \frac{1}{2} \cos^2 \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)} \quad (\text{III.9.12})$$

und

$$\boxed{I_{22}^{(2,1)} \sim \frac{1}{2} \cos^2 \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)} \quad (\text{III.9.13})$$

Insbesondere: Für $\alpha = \beta = 0$:

$$I_{12}^{(2,1)} = I_{21}^{(2,1)} = 0$$

$$I_{11}^{(2,1)} = I_{22}^{(2,1)} = \frac{1}{2}$$

III.9.3. Lokale Messungen („Interferenz 2. Ordnung“)

$$I_m^{(1)} \sim \langle \Psi^{\text{in}} | \hat{b}_m^\dagger(1) \hat{b}_m(1) | \Psi^{\text{in}} \rangle \quad (\text{III.9.14})$$

$$\hat{b}_m(1) = \sum_{m'} B_{mm'}(1) \hat{a}_{m'}(1)$$

$$\hat{b}_m(1) |\Psi^{\text{in}}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [B_{m1}(1) \hat{a}_2^\dagger(2) + B_{m2}(1) \hat{a}_1^\dagger(2)] |0\rangle$$

$$\langle \Psi^{\text{in}} | \hat{b}_m^\dagger(1) \hat{b}_m(1) | \Psi^{\text{in}} \rangle = \frac{1}{2} |B_{m1}(1)|^2 + \frac{1}{2} |B_{m2}(1)|^2 = \frac{1}{2}$$

Hierbei wurde benutzt:

$$\langle 0 | \hat{a}_2 \hat{a}_1^\dagger | 0 \rangle = 0 \quad \text{etc.}$$

$$\langle 0 | \hat{a}_2 \hat{a}_2^\dagger | 0 \rangle = 1 \quad \text{etc.}$$

$$\Rightarrow \boxed{I_m^{(1)} = I_n^{(2)} = \frac{1}{2} = \text{const}!} \quad (\text{III.9.15})$$

Es existiert also keine Phasenabhängigkeit, obwohl die lokale Phase α, β in die Koinzidenzmessung eingeht! „Visibility“ (Kontrast):

$$h = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} \quad (\text{III.9.16})$$

Im Koinzidenz-Fall ist $h = 1$, lokal ist $h = 0$! Weitere Charakterisierung: Kovarianz

$$V^{(2,1)} \equiv \langle \hat{A}(2)\hat{A}(1) \rangle - \langle \hat{A}(1) \rangle \langle \hat{A}(2) \rangle$$

Setze hier

$$\hat{A}(\mu) = \hat{b}_m^\dagger(\mu)\hat{b}_m(\mu) \quad m = 1, 2 \quad \mu = 1, 2$$

$V_{21}^{(2,1)} = V_{12}^{(2,1)} = \frac{1}{2} \left[\sin^2 \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) - \frac{1}{2} \right] = -\frac{1}{4} \cos(\alpha - \beta)$ $V_{11}^{(2,1)} = V_{22}^{(2,1)} = \frac{1}{2} \left[\cos^2 \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) - \frac{1}{2} \right] = +\frac{1}{4} \cos(\alpha - \beta)$

III.9.4. Produktzustands-Input

Statt (III.9.7):

$$|\Psi^{\text{in}}\rangle = |\Psi(1)\rangle \otimes |\Psi(2)\rangle \quad (\text{III.9.17})$$

$$\begin{aligned} \implies I_{n,m}^{(2,1)} &= \langle \Psi(2) | \hat{b}_n^\dagger(2)\hat{b}_n(2) | \Psi(2) \rangle \langle \Psi(1) | \hat{b}_m^\dagger(1)\hat{b}_m(1) | \Psi(1) \rangle \\ I_{n,m}^{(2,1)} &= I_n^{(2)} \cdot I_m^{(1)} \end{aligned} \quad (\text{III.9.18})$$

Lokale Interferenz:

Betrachte $|\Psi(1)\rangle = |+(1)\rangle$, wobei

$$|\pm(1)\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} [\hat{a}_1^\dagger \pm i\hat{a}_2^\dagger] |0\rangle \quad (\text{III.9.19})$$

$$\begin{aligned} \hat{b}_1 |\Psi(1)\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} [B_{11}(1) + iB_{12}(1)] |0\rangle \\ &= \frac{1}{2} [-e^{+i\alpha/2} - e^{-i\alpha/2}] |0\rangle \\ &= -\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) |0\rangle \end{aligned}$$

$I_1^{(1)} = \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ $I_2^{(1)} = \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$	(III.9.20)
---	------------

III. Elementare Input-Output-Analyse

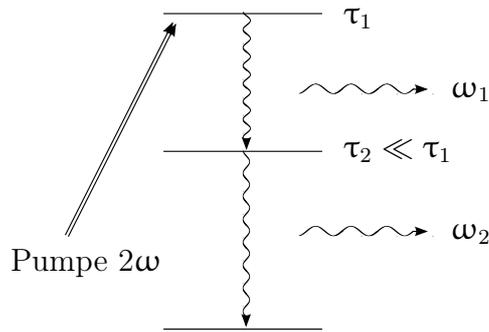


Abbildung III.23.: Energieschema Kaskadenprozess

Damit folgt, mit (III.9.18):

$$I_{11}^{(2,1)} \equiv \cos^2\left(\frac{\beta}{2}\right) \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) \quad \text{etc.} \quad (\text{III.9.21})$$

Vgl. (III.9.12) Die entsprechende Kovarianz $V_{11}^{(2,1)}$ verschwindet. Lokale bzw. Koinzidenz-Interferometrie ist komplementär!

III.9.5. Franson-Interferometer

("Reisezeit-Verschränkung")

Literatur:

J. Franson, PRL **62**, 2205 (1989)

Kwiat, PRL **47**, 2472 (1993)

Kwiat, J. mod. Opt **44**, 2173 (1997)

Zwei-Photonen-Quelle: Kaskadenprozess (vgl. Kapitel III.3)

Zeitskalen: τ_1 : zeitliche Unbestimmtheit der Kaskaden, τ_2 : Differenz der Emissionszeitpunkte, Δt : Messfenster

$$\omega_1 \approx \omega_2 \approx \omega = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$$

Der Unterschied der Reisezeiten l/s sei ΔT , es gelte $\tau_2 \ll \Delta T \ll \tau_1$.

Schema „Acht-Pol“, mit $\Delta l_j = l_j - s_j \quad j = R, L$.

- a. Für $\Delta t > \Delta T$ spielen alle Wegkombinationen $|ss\rangle, |sl\rangle, |ls\rangle, |ll\rangle$ mit. Es handelt sich also um einen Produktzustand, es gibt keine Koinzidenz-Korrelationen (vergleiche (III.9.17), (III.9.18)).

$$|\Psi^{\text{in}}\rangle \approx (|s\rangle + |l\rangle) \otimes (|s\rangle + |l\rangle)$$

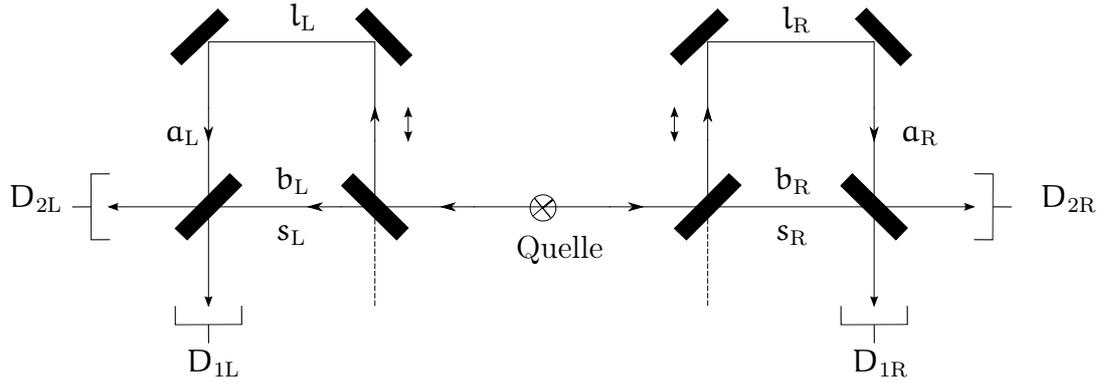


Abbildung III.24.: Franson-Interferometer. Links (L) und rechts (R) gibt es jeweils zwei mögliche Pfade (Moden). α, β = Phasen längs Pfad oben (Länge l)/unten (Länge s).

b. Für $\Delta t \ll \Delta T$ gilt: Nur $|ll\rangle$ und $|ss\rangle$ können „mitspielen“.

$$|\Psi^{\text{in}}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|l_L l_R\rangle + |s_L s_R\rangle] \quad (\text{III.9.22})$$

Phasenunterschied:

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{\omega}{c} s_L + \frac{\omega}{c} s_R \\ \alpha &= \frac{\omega}{c} l_L + \frac{\omega}{c} l_R \\ \Rightarrow \alpha - \beta &= \frac{\omega}{c} (\Delta l_L + \Delta l_R) \end{aligned} \quad (\text{III.9.23})$$

Gemäß Gleichung (III.9.13) ergibt sich für die Koinzidenzrate eine Variation durch Δl_L und Δl_R :

$$I_{22}^{(L,R)} \sim \frac{1}{2} \cos^2 \left[\frac{\omega}{2c} (\Delta l_L + \Delta l_R) \right] \quad (\text{III.9.24})$$

Es gibt keine lokalen Interferenzen in I_1^L und I_1^R !

III.9.6. Quantenoptischer M^2 -Pol (zu Abb. III.25)

Literatur (Prinzip): M. Reck, A. Zeilinger et al, PRL **73**, 58 (1994)

Bisher war $M = 2$. Zerlegung von B_{jk} in 2×2 -dimensionale Untermatrizen: siehe Abb. III.25. Unitäre Transformation von Moden-Operatoren:

$$\hat{b}_j = \sum_{k=1}^M B_{jk} \hat{a}_k \quad j = 1, 2, \dots, M$$

III.10. „Welcher-Weg“-Information und Quantenradierer

Literatur:

- Elitzer, Vaidman, Found. Phys. **23**, 987 (1993)
- Kwiat, Zeilinger, PRL **74**, 4763 (1995)
- Kwiat, Zeilinger, Spektrum der Wiss., Jan 1997, S. 42
- Kwiat, Zeilinger, PRL **83**, 4725 (1999)
- Vaidman, Quantum Optics **6**, 119 (1994)
- Schenzle, Physik in unserer Zeit, Nr. 1, S. 8 (1994)

III.10.1. Geht das?

In der Literatur existieren unterschiedliche „Geschichten“ als Motivation:

- a. Elitzer, Vaidman, Zeilinger: Menge von Bomben mit neuartigem Sensor, einzelnes Photon bringt Bombe zur Explosion. Annahme: Bei manchen Bomben fehlt der Sensor. Kann man mit Licht herausfinden, welche Bomben funktionieren, d. h. sortieren? Beachte: Falls die Bombe explodiert, war der Zünder gut. Andernfalls fehlte er.
- b. Vaidman: Ein Physiker behauptet, er habe einen Superdetektor gebaut mit hundertprozentiger Effizienz für alle Teilchen (z. B. Photonen). Dieser liege jetzt in einem verdunkelten Zimmer. Kann man den Detektor lokalisieren, ohne dass es klickt?
- c. Schenzle: Der Scherzartikel-Hersteller „Hahnenschrei“ bietet Glaskugeln an, die bei Morgensonne mit einem Knall zerplatzen. Diese sind perfektioniert, d. h. ein Photon genügt. Durch eine Unachtsamkeit geraten nun gefüllte und ungefüllte Kugeln

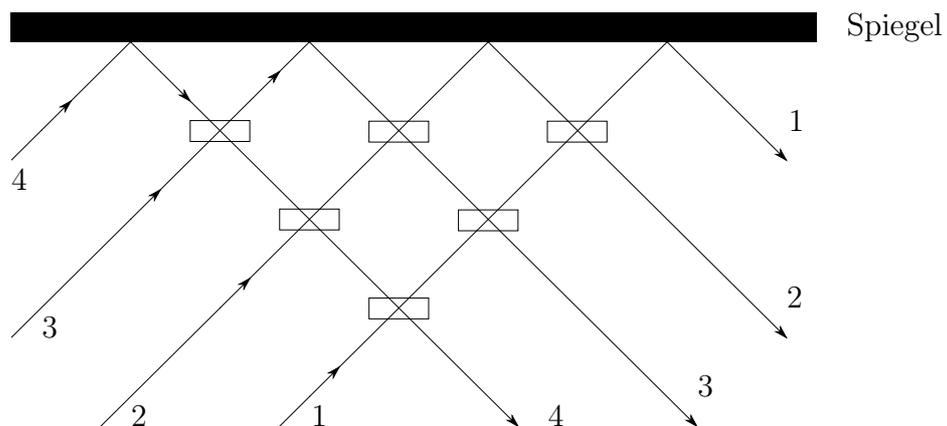


Abbildung III.25.: Quantenoptischer M^2 -Pol

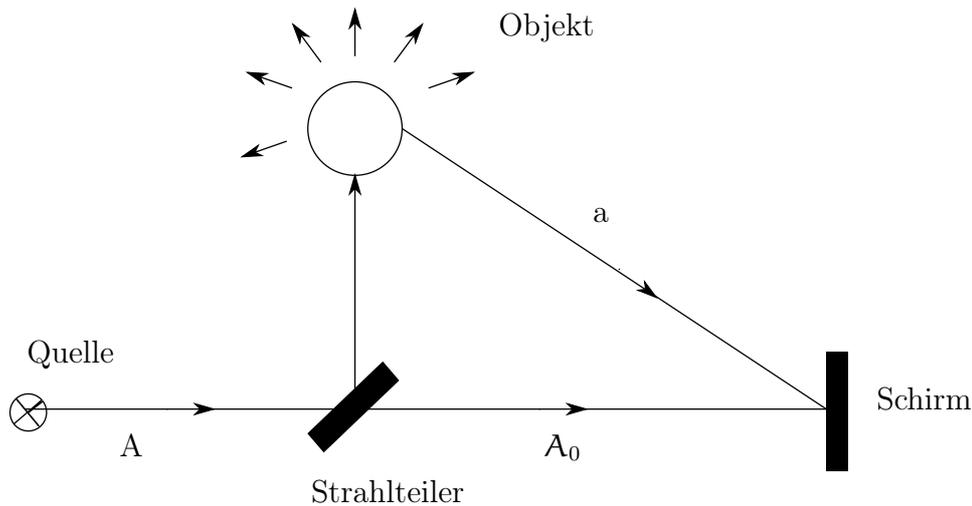


Abbildung III.26.: Gedankenexperiment nach Gabor

durcheinander. Bei Dunkelheit sind beide ununterscheidbar voneinander, bei Helligkeit gehen funktionierende Kugeln kaputt. Kann man diese „guten“ Kugeln ohne Zerstörung aussortieren?

III.10.2. Paradoxie: Beobachtung ohne Wechselwirkung

D. Gabor, Progr. Optics I, Light and Information. Sein Argument hat Bezug zur Debatte um Maxwells Dämon (Bennett, Sci. Am. **257**, 88 (1997)) Klassisch gilt:

$$I = A_0^2 + a^2 + 2aA_0\cos\phi$$

Lasse $a \rightarrow 0$ gehen mit $A_0 a = \text{const.}$ Interferenzterm \rightarrow Objekt.

These: Dies funktioniert nicht wegen der Quanten-Natur des Lichts, nach der Photonen unteilbar sind. Mindestens ein Photon muss das Objekt „sehen“. Stimmt das?

III.10.3. „Welcher-Weg“-Markierung durch klassisches Objekt

Modell: Beschreibe das Objekt als Strahlteiler mit Transmission T und Reflexion R . Der Strahlteiler „Objekt“ hat „2 Zustände“:

- Bei „nicht vorhandenem“ Objekt ist $T = 1, R = 0$. (bezgl. Mode 2,3)
(Verallgemeinert: Kwiat, PRL **83**, 4725 (1999))

$$\mathcal{B}^{\text{Obj}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{III.10.1})$$

III. Elementare Input-Output-Analyse

- Bei „vorhandenem“ Objekt: $T = 0, R = 1$ (III.6.13)

$$\mathcal{B}^{\text{Obj}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{III.10.2})$$

3-Moden-Beschreibung: (6-Pol)

$$\begin{pmatrix} \hat{\mathbf{b}}_1 \\ \hat{\mathbf{b}}_2 \\ \hat{\mathbf{b}}_3 \end{pmatrix} = \mathcal{C}^{(\text{obj})} \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{a}}_1 \\ \hat{\mathbf{a}}_2 \\ \hat{\mathbf{a}}_3 \end{pmatrix} \quad (\text{III.10.3})$$

a. Objekt „nicht vorhanden“:

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{a}_1 \rightarrow \mathbf{a}'_1 \\ \mathbf{a}_2 \rightarrow \mathbf{a}'_2 \\ \mathbf{a}_3 \rightarrow \mathbf{a}'_3 \end{array} \right\} \mathcal{C}^{(\text{obj})} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{1} \quad (\text{III.10.4a})$$

(III.8.5) Gesamt-Andordnung:

$$\mathcal{C}^{(\text{eff})} = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \mathcal{B}^{\text{eff}} & \\ 0 & & \end{array} \right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{III.10.4b})$$

$$\text{da } \mathcal{B}^{\text{eff}} = - \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) & -\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) & \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Wähle } \varphi=0} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{III.10.4c})$$

b. Objekt „vorhanden“

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{a}_1 \rightarrow \mathbf{a}'_1 \\ \mathbf{a}_2 \rightarrow \mathbf{a}'_2 \\ \mathbf{a}_3 \rightarrow \mathbf{a}'_3 \end{array} \right\} \mathcal{C}^{(\text{obj})} = \begin{pmatrix} 1 & | & 0 & 0 \\ \hline 0 & | & 0 & -1 \\ 0 & | & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{III.10.5})$$

$$\begin{pmatrix} \hat{\mathbf{b}}_1 \\ \hat{\mathbf{b}}_2 \\ \hat{\mathbf{b}}_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} & | & 0 \\ \frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & | & 0 \\ \hline 0 & 0 & | & 1 \end{pmatrix}}_{\text{BS2}} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & i & | & 0 \\ i & 0 & | & 0 \\ \hline 0 & 0 & | & 1 \end{pmatrix}}_{\text{Spiegel}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & | & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 \\ 0 & | & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{Objekt}} \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} & | & 0 \\ \frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & | & 0 \\ \hline 0 & 0 & | & 1 \end{pmatrix}}_{\text{BS1}} \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{a}}_1 \\ \hat{\mathbf{a}}_2 \\ \hat{\mathbf{a}}_3 \end{pmatrix} \quad (\text{III.10.6})$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{i}{2} & -\frac{i}{\sqrt{2}} \\ \frac{i}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{a}}_1 \\ \hat{\mathbf{a}}_2 \\ \hat{\mathbf{a}}_3 \end{pmatrix} = \mathcal{C}^{\text{eff}} \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{a}}_1 \\ \hat{\mathbf{a}}_2 \\ \hat{\mathbf{a}}_3 \end{pmatrix} \quad (\text{III.10.7})$$

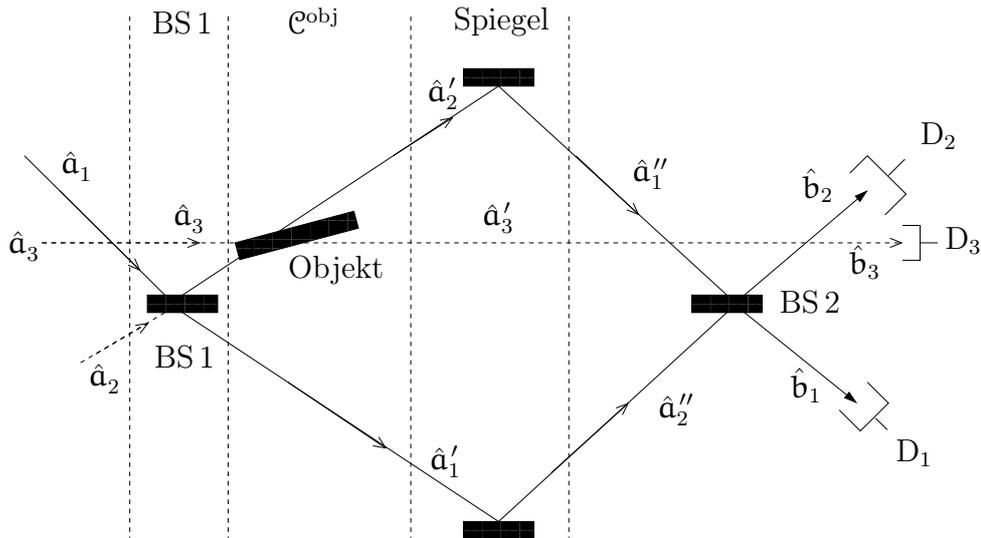


Abbildung III.27.: 3-Moden-Ersatzschaltbild (Input nur in Mode 1).

Die einzelnen Operatoren \hat{b}_i sind also:

$$\begin{aligned}\hat{b}_1 &= -\frac{1}{2} \left(\hat{a}_1 + i\hat{a}_2 + i\sqrt{2}\hat{a}_3 \right) \\ \hat{b}_2 &= \frac{1}{2} \left(i\hat{a}_1 - \hat{a}_2 - \sqrt{2}\hat{a}_3 \right) \\ \hat{b}_3 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(i\hat{a}_1 + \hat{a}_2 \right)\end{aligned}\quad (\text{III.10.8})$$

Besetzungszahl-Operatoren:

$$\begin{aligned}\hat{b}_1^\dagger \hat{b}_1 &= \frac{1}{4} \left(\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 + \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2 + 2\hat{a}_3^\dagger \hat{a}_3 + \text{Kreuzterme} \right) \\ \hat{b}_2^\dagger \hat{b}_2 &= \frac{1}{4} \left(\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 + \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2 + 2\hat{a}_3^\dagger \hat{a}_3 + \text{Kreuzterme} \right) \\ \hat{b}_3^\dagger \hat{b}_3 &= \frac{1}{2} \left(\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 + \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2 + \text{Kreuzterme} \right)\end{aligned}$$

Input: $|\Psi^{\text{in}}\rangle = \hat{a}_1^\dagger |0\rangle$

$$D_k: P^{(k)} \sim \langle \Psi^{\text{in}} | \hat{b}_k^\dagger \hat{b}_k | \Psi^{\text{in}} \rangle \quad k = 1, 2, 3$$

$$\boxed{\begin{aligned}D_1: & P^{(1)} \sim \frac{1}{4} \\ D_2: & P^{(2)} \sim \frac{1}{4} \\ D_3: & P^{(3)} \sim \frac{1}{2}\end{aligned}} \quad (\text{III.10.9})$$

III. Elementare Input-Output-Analyse

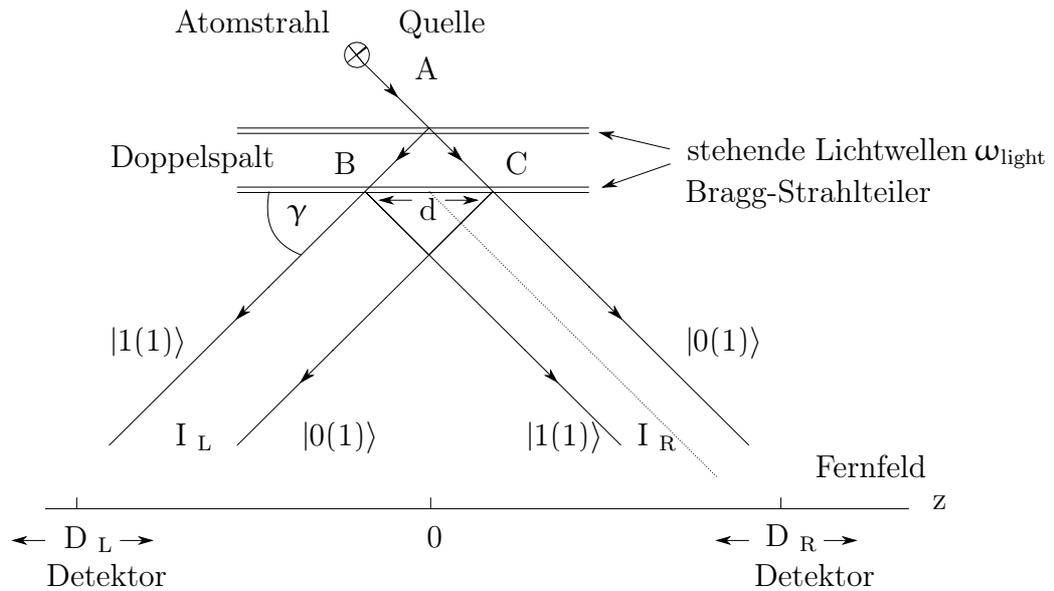


Abbildung III.28.: Experiment nach Dürr et al mit Rb-Atomen. Zwei separate Interferenz-Experimente nach links (L) bzw. nach rechts (R)

Falls das Objekt nicht vorhanden ist (vgl. (III.10.4)):

$$\begin{array}{l}
 \boxed{D_1 : P^{(1)} \sim 1} \\
 \boxed{D_2 : P^{(2)} \sim 0} \\
 \boxed{D_3 : P^{(3)} \sim 0}
 \end{array}
 \quad (III.10.10)$$

Falls Detektor 1 klickt, kann das Objekt da sein oder auch nicht. Man fährt fort mit einem zweiten Photon.

Falls Detektor 2 klickt, ist das Objekt vorhanden, aber es „sieht“ kein Photon. Findet hier eine Beobachtung ohne Wechselwirkung statt? Das Photon kann nicht den Pfad genommen haben, auf dem sich auch das Objekt befindet! Dies beruht auf der Unteilbarkeit des Photons, denn ansonsten nähmen nur alle Intensitäten kontinuierlich ab.

Falls Detektor 3 klickt, ist das Objekt vorhanden, es „sieht“ das Photon.

III.10.4. Welcher-Weg-Markierung durch inneren Freiheitsgrad (QM)

Teilchenoptik:

M.O. Scully et al, Nature **351**, 111 (1991)

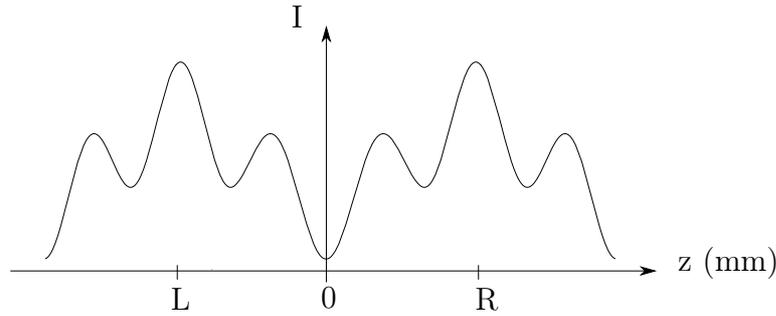


Abbildung III.29.: Interferenzmuster, „lokale Kohärenz“

P.G. Kwiat et al, PRA **45**, 7725 (1992)

J. Summhammer et al, Phys. Lett. A **50**, 110 (1982)

M.O. Scully, S. 568

Literatur:

Dürr et al, Nature **395**, 33 (1998), siehe auch:

Englert, Phys Bl. **54**, 999 (1998), O. Steuernagel, quant-ph/9908011

Experiment: Rb-Atome aus magneto-optischer Falle (gekühlt) im freien Fall

$N = 1$ (d. h. ein Subsystem), $\mu = 1 = \text{Atom}$, 0: transmittierter Strahl (Weg C), 1: gebrochener Strahl (Weg B), Geschwindigkeit der Atome $v \approx 2 \text{ ms}$

In beiden Detektoren D_L, D_R treffen Atome ein, welche über Weg B oder Weg C gekommen sind. Es kommt zur Interferenz, vgl. Doppelspalt, geometrischer Phasenunterschied!

$$|\Psi(1)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|0(1)\rangle + |1(1)\rangle] \quad (\text{III.10.11})$$

Erweiterung: $N = 2$ (Tensorraum), $\mu = 1$: Atom, Translations-Freiheitsgrad, $\mu = 2$: innerer Zustand des Atoms:

Zwei Hyperfein-Niveaus von ^{85}Rb , $n = 0, 1$ (Abb. III.30)

Markierung: Siehe Abb. III.31. Im Fernfeld gilt (sowohl für D_L wie für D_R):

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|00\rangle + |11\rangle] \quad (\text{III.10.12})$$

a. Keine Messung des inneren Zustands $m = 0, 1$. Spure diesen Freiheitsgrad aus:

$$\hat{\rho}(1) = \text{Spur}_2\{\hat{\rho}\} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} |0(1)\rangle\langle 0(1)| + \frac{1}{2} |1(1)\rangle\langle 1(1)| \quad (\text{III.10.13})$$

Man erhält eine Mischung \rightarrow keine Interferenz!

III. Elementare Input-Output-Analyse

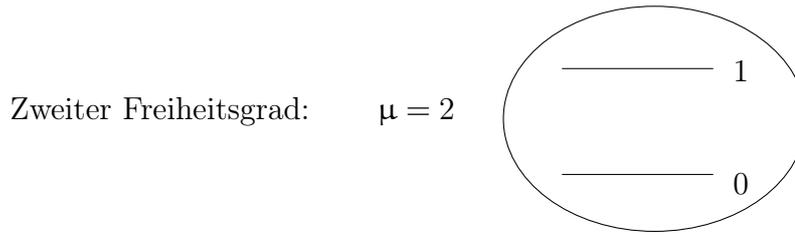


Abbildung III.30.: Hyperfein-Niveaus des Atoms

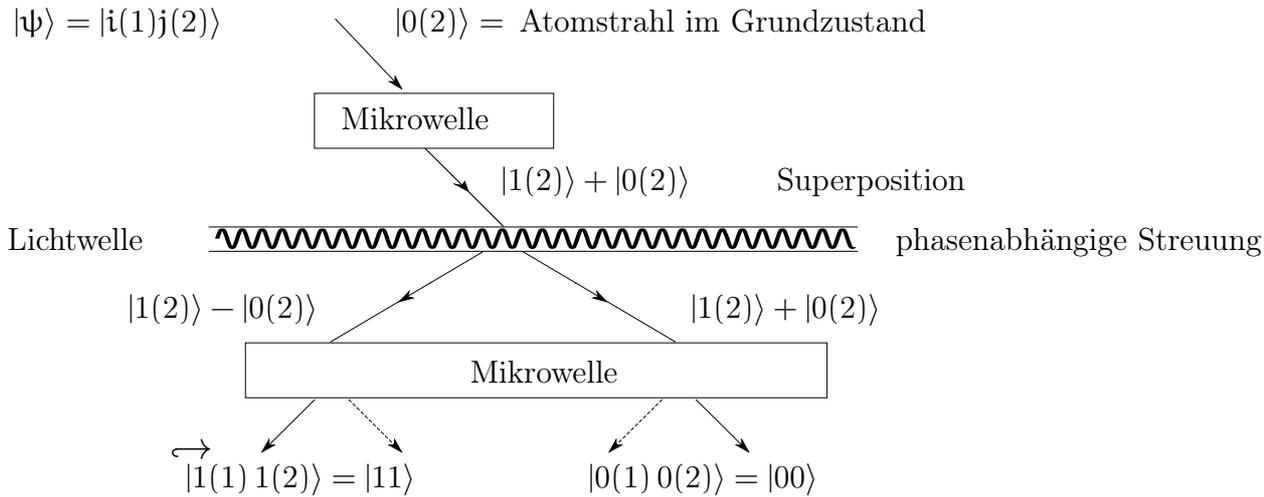


Abbildung III.31.: Markierung

b. Mit Messung von n : $|0(1)\rangle$ oder $|1(1)\rangle$, keine Interferenz!

Ursache: Verschränkung zerstört lokale Eigenschaften, dies geschieht hier durch die Überlagerung der beiden Pfade. Ob der Pfad (innere Zustand) gemessen wird oder nicht, spielt keine Rolle!

III.10.5. Quanten-Radierer

Definiere:

$$|\pm(\mu)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|0(\mu)\rangle \pm |1(\mu)\rangle] \quad (\text{III.10.14})$$

Darstellungswechsel:

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|00\rangle + |11\rangle] = \frac{1}{\sqrt{2}} [|++\rangle + |--\rangle] \quad (\text{III.10.15})$$

Nach Messung von $|+(2)\rangle, |-(2)\rangle$ und anschließender Selektion, ist der Strahl bezüglich $\mu = 1$, d. h. $|\pm(1)\rangle$, lokal kohärent. Nun ist wieder Interferenz vorhanden! (Gedanken-Experiment von Scully; vgl. Abb. III.32)

$$|\Psi(1)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|0(1)\rangle + |1(1)\rangle] \quad (\text{III.10.16})$$

Beachte: Der Radierer funktioniert nur bezüglich der Interferenz-Zerstörung durch Verschränkung ohne vorherige Messung von 0, 1 bzgl. (2).

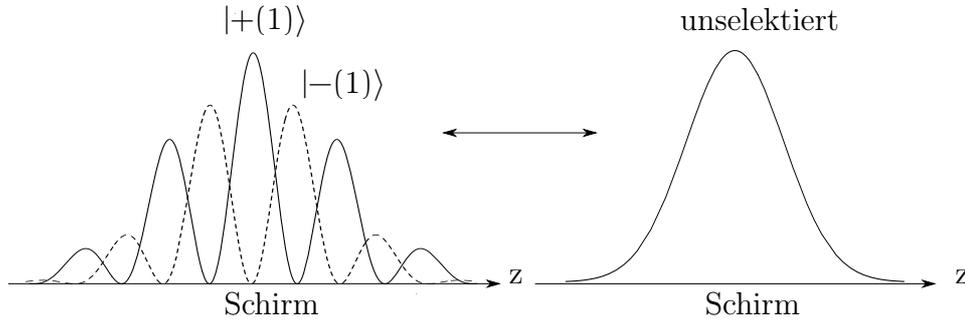


Abbildung III.32.: Interferenzmuster zu Scullys Gedankenexperiment

Experiment nach Walborn, PRA **65**, 033818 (2002):

Markiere ein Photon durch ein Photon, vgl. (III.3.13), Polarisationsverschränkung durch Parametric Down Conversion (PDC) 2 (lineare Polarisation in x-/y- Richtung)

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[|x(1)\rangle \otimes |y(2)\rangle + |y(1)\rangle \otimes |x(2)\rangle \right] \quad (\text{III.10.17})$$

Lokale Kohärenz:
$$|\Psi(1)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[|0(1)\rangle + |1(1)\rangle \right] \quad (\text{III.10.18})$$

Hier:
$$|\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[|x\rangle \pm |y\rangle \right] \quad (\text{III.10.19})$$

Ohne Polarisator gibt es keine Interferenz! Mit einem Polarisator in 45°-Stellung wird $|+(1)\rangle$ selektiert, in -45°-Stellung $|-(1)\rangle$, und es gibt Interferenz.

Anmerkung: Das Experiment testet nur *einen* Aspekt des Quantenradierers! Die Ursache der Verschränkung ist hier *nicht* die Pfadmarkierung.

III.10.6. Welcher-Weg-Markierung: klassischer Limes („Teilchen-Optik“)

Warum zeigen makroskopische Objekte keine Interferenz, z. B. am Doppelspalt?

Wie groß kann man Objekte machen, bevor sie die Fähigkeit zur Interferenz verlieren?

Wo liegt die Grenze zwischen klassischer Mechanik und Quantenmechanik?

Interferenz-Experiment mit C^{60} -Molekülen nach Arndt, Zeilinger, Nature **401**, 680 (1999); 651 (comment)

Die Moleküle emittieren bei einer Temperatur von 1000°C zwei bis drei IR-Photonen während der Passage. Ist das eine Pfadmessung?

Aber: es gibt keine Information über den Weg der Moleküle, da die Wellenlänge der

III. Elementare Input-Output-Analyse

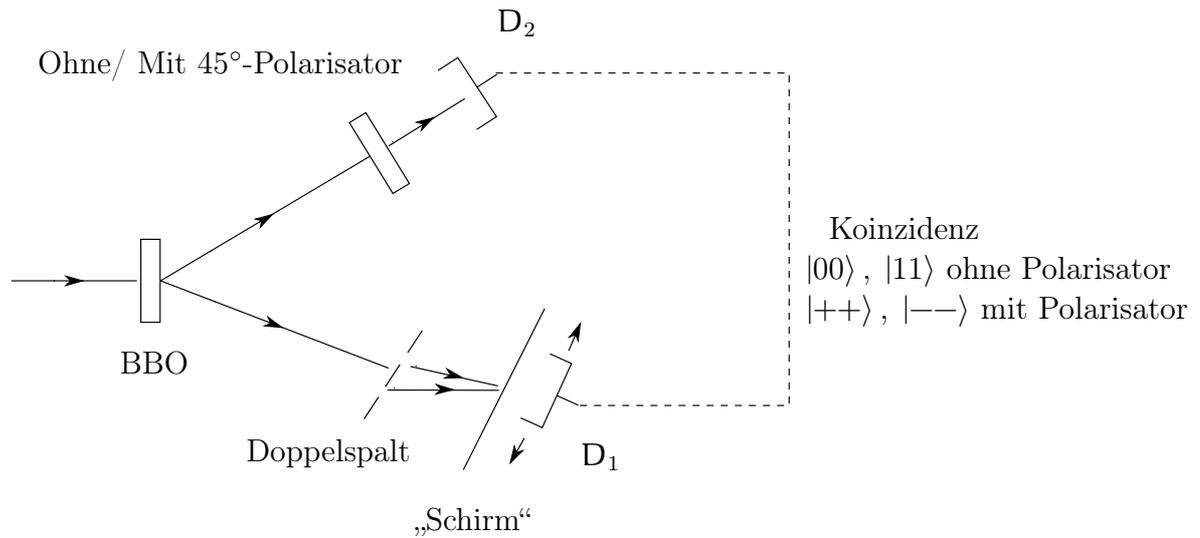


Abbildung III.33.: Schema zu Scullys Gedankenexperiment

Photonen λ sehr viel größer ist als der Spaltabstand d ($\lambda \gg d$), daher ist ihr Auflösungsvermögen zu gering! Es folgt

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \underbrace{[|0\rangle + |1\rangle]}_{\text{Molekül-Pfad}} \otimes \underbrace{|1(2)\rangle}_{\text{Photon}} \quad \lambda_{\text{DeBroglie}} = \frac{2\pi\hbar}{p}$$

Klassischer Limes: die höhere Temperatur aufgrund von inneren Freiheitsgraden führt zu einer kürzeren Wellenlänge der emittierten Photonen! Dies erlaubt eine Pfadmessung und damit Interferenz-Verlust.

IV. Zustandsmodelle

IV.1. Charakteristische Zustandsparameter

Motivation: Eine vollständige Zustandsbeschreibung ist oft zu aufwändig, da der vollständige Zustand nicht messbar und außerdem nicht immer wichtig ist.

Kenngößen:

- Von-Neumann-Entropie
- Reinheit (Purity)
- Metrik (Abstand)
- Reduzierte Entropien

Funktionen:

- Verteilungsfunktionen (Photon-Statistik)
- Korrelationsfunktionen

IV.1.1. Von-Neumann-Entropie

Definition:

$$S(\hat{\rho}) = -k_0 \text{Spur}\{\hat{\rho} \ln \hat{\rho}\} \quad (k_0 = \text{const}) \quad (\text{IV.1.1})$$

Beachte:

$$\ln \hat{\rho} = \ln \sum_{i,j} \rho_{ij} |i\rangle \langle j| \neq \sum_{i,j} \ln \rho_{ij} |i\rangle \langle j|$$

Zur Berechnung wähle die Eigendarstellung:

$$\begin{aligned} \hat{\rho} |j\rangle &= \rho_j |j\rangle \\ \implies f(\hat{\rho}) |j\rangle &= f(\rho_j) |j\rangle \\ \hat{\rho} \ln \hat{\rho} |j\rangle &= \rho_j \ln \rho_j |j\rangle \end{aligned} \quad (\text{IV.1.2})$$

$$S = -k_0 \sum_j \rho_j \ln \rho_j \quad (\text{IV.1.3})$$

Eigenschaften:

a. Wahl der Einheit k_0 :

$$\ln x = \ln 2 \cdot \log_2 x \quad (\text{IV.1.4})$$

$$\text{Sei } k_0 = \frac{1}{\ln 2}$$

$$S = - \sum_j \rho_j \log_2 \rho_j = -I_{\text{Shannon}} [\text{Bit}] \quad (\text{IV.1.5})$$

S = Mittlere Zahl von ja/nein- Entscheidungen, um in Diagonalbasis Zustand festzulegen (Ignoranz-Interpretation), Ensemble. I_{Shannon} ist die Shannon-Information. In Folge wird $k_0 = 1$ gewählt

b. Reiner Zustand:

$$\begin{aligned} \hat{\rho} = |m\rangle \langle m| &\implies \rho_j = \delta_{jm} \\ \lim_{\rho_j \rightarrow 0} \rho_j \ln \rho_j &\longrightarrow 0 \quad \text{für } j \neq m \\ S = S_{\min} &= 0 \end{aligned} \quad (\text{IV.1.6})$$

c. Breiteste Verteilung, ohne Struktur: $\rho_j = \frac{1}{n}$

$$S_{\max} = - \sum_{j=1}^n \frac{1}{n} \ln \frac{1}{n} = \ln n \quad (\text{IV.1.7})$$

IV.1.2. Momente des Dichteoperators

$$C(q) \equiv \text{Spur}\{\hat{\rho}^q\} = \sum_{\nu} \rho_{\nu}^q \quad q = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{IV.1.8})$$

$$\begin{aligned} \sum_{\nu} \rho_{\nu}^q &\leq \sum_{\nu} \rho_{\nu}^{q-1} \underbrace{\sum_{\nu} \rho_{\nu}}_{=1} = \sum_{\nu} \rho_{\nu}^{q-1} \\ \dots &\leq C(4) \leq C(3) \leq C(2) \leq C(1) = 1 \end{aligned} \quad (\text{IV.1.9})$$

$C(2)$ ist die „Purity“ (Reinheitsparameter)

IV.1.3. Linearisierte Entropie

$$\boxed{S^{\text{lin}} \equiv 1 - \text{Spur}\{\hat{\rho}^2\} = 1 - C(2)} \quad (\text{IV.1.10})$$

Eigendarstellung:

$$S^{\text{lin}} \equiv 1 - \sum_j \rho_j^2 \quad (\text{IV.1.11})$$

Mit der grafisch leicht zu zeigenden Ungleichung

$$\ln x \leq x - 1 \quad (\text{IV.1.12})$$

folgt ($k_0 = 1$ in (IV.1.3)):

$$1 - \rho_j \leq -\ln \rho_j \quad (\text{IV.1.13})$$

$$\begin{aligned} S &= \sum_j \rho_j (-\ln \rho_j) \geq \sum_j \rho_j (1 - \rho_j) = 1 - \text{Spur}\{\hat{\rho}^2\} \\ &\implies \boxed{S \geq S^{\text{lin}}} \end{aligned} \quad (\text{IV.1.14})$$

IV.1.4. Bures-Metrik (kommutatives Abstandsmaß)

$$D_{\rho\rho'}^2 = \text{Spur}\{(\rho - \rho')^2\} \quad (\text{IV.1.15})$$

Eigenschaften:

$$\begin{aligned} D^2 &\geq 0 \\ D^2 = 0 &\iff \hat{\rho} = \hat{\rho}' \end{aligned}$$

Dreiecksungleichung (ohne Beweis):

$$D_{\rho\rho'}^2 \leq D_{\rho\rho''}^2 + D_{\rho''\rho'}^2$$

Speziell: Reine Zustände:

$$\begin{aligned} \hat{\rho} &= |\Psi\rangle\langle\Psi| \\ \hat{\rho}' &= |\Phi\rangle\langle\Phi| \\ \implies D^2 &= \text{Spur}\{\hat{\rho}^2 - \hat{\rho}\hat{\rho}' - \hat{\rho}'\hat{\rho} + (\hat{\rho}')^2\} = 2[1 - \text{Spur}\{|\Psi\rangle\langle\Psi|\Phi\rangle\langle\Phi|\}] \end{aligned}$$

Hier wurde benutzt: $\text{Spur}\{A + B\} = \text{Spur}\{A\} + \text{Spur}\{B\}$. Zur Berechnung wählt man eine vollständige Basis $\sum_{j=0}^n \langle\Psi_j|\dots|\Psi_j\rangle$ mit $|\Psi_0\rangle = |\Psi\rangle$

$$\boxed{D^2 = 2(1 - |\langle\Psi|\Phi\rangle|^2) \leq 2} \quad (\text{IV.1.16})$$

Das Abstandsmaß ist gegen unitäre Transformationen invariant:

$$(D')^2 = \text{Spur}\{\hat{U}(\rho - \rho')^2\hat{U}^\dagger\} = \text{Spur}\{\hat{U}^\dagger\hat{U}(\rho - \rho')^2\} = \text{Spur}\{(\rho - \rho')^2\} = D^2$$

Anwendung auf unitäre Zeitentwicklung: Da der Abstand unter einer unitären Transformation erhalten bleibt, ergibt sich kein dynamisches Quantenchaos (keine Sensibilität wie kleine Anfangsdistanz, später große Distanz)!

IV.1.5. Tensorräume

$$N = 2: \quad \mathcal{H} = \mathcal{H}(1) \otimes \mathcal{H}(2) \quad \text{Dimension:} \quad \mathbf{n} = \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2 \quad (\text{IV.1.17})$$

Produktbasis:

$$|ij\rangle = |i(1)\rangle \otimes |j(2)\rangle \quad (\text{IV.1.18})$$

Produktdarstellung (mit Doppelindex):

$$\text{Zustand } |\Psi\rangle = \sum_{ij} C_{ij} |ij\rangle \quad C_{ij} = \langle ij|\Psi\rangle \quad (\text{IV.1.19})$$

$$\text{Operator } \hat{M} = \sum_{ij} \sum_{i'j'} M_{ij, i'j'} |ij\rangle \langle i'j'| \quad M_{ij, i'j'} = \langle ij|\hat{M}|i'j'\rangle \quad (\text{IV.1.20})$$

Tensorprodukt von Matrizen ($N = 2, \mathbf{n}_{1,2} = 2$)

$$\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} = \begin{pmatrix} \mathcal{A}_{11}\mathcal{B} & \mathcal{A}_{12}\mathcal{B} \\ \mathcal{A}_{21}\mathcal{B} & \mathcal{A}_{22}\mathcal{B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{A}_{11}\mathcal{B}_{11} & \mathcal{A}_{11}\mathcal{B}_{12} & | \\ \mathcal{A}_{11}\mathcal{B}_{21} & \mathcal{A}_{11}\mathcal{B}_{22} & | \\ \hline & & | \\ & & | \end{pmatrix} \quad (\text{IV.1.21})$$

Reduzierte Dichtematrix:

$$\hat{\rho}_1 = \text{Spur}_2\{\hat{\rho}\} \implies \rho_{ii'}(1) = \sum_n \rho_{in, i'n} \quad (\text{IV.1.22})$$

IV.1.6. Reduzierte Entropien

a. Additivität: Für den Produktzustand ρ gelte

$$\begin{aligned} \hat{\rho} &= \hat{\rho}(1) \otimes \hat{\rho}(2) \\ S &= -k_0 \text{Spur}\{\hat{\rho}(1) \otimes \hat{\rho}(2) \ln(\hat{\rho}(1) \otimes \hat{\rho}(2))\} \end{aligned}$$

Benutze die Eigendarstellung

$$\hat{\rho}(1) \otimes \hat{\rho}(2) = \sum_{i,j} \rho_{ii}^{(1)} \rho_{jj}^{(2)} |ij\rangle \langle ij| \quad (\text{IV.1.23})$$

Der Operator $\hat{F}(\hat{A})$ hat das gleiche System von Eigenfunktionen wie \hat{A} :

$$\begin{aligned} \ln(\hat{\rho}(1) \otimes \hat{\rho}(2)) &= \sum_{i,j} \ln(\rho_{ii}^{(1)} \rho_{jj}^{(2)}) |ij\rangle \langle ij| \\ &= \sum_{i,j} (\ln \rho_{ii}^{(1)} + \ln \rho_{jj}^{(2)}) |ij\rangle \langle ij| \\ &= \sum_i \ln \rho_{ii}^{(1)} |i\rangle \langle i| \sum_j |j\rangle \langle j| + \sum_j \ln \rho_{jj}^{(2)} |j\rangle \langle j| \sum_i |i\rangle \langle i| \\ &= \ln \hat{\rho}(1) \otimes \hat{1}(2) + \ln \hat{\rho}(2) \otimes \hat{1}(1) \end{aligned}$$

$$\implies S = -k_0 \text{Spur} \{ \hat{\rho}(1) \otimes \hat{\rho}(2) [\ln \hat{\rho}(1) \otimes \hat{1}(2) + \ln \hat{\rho}(2) \otimes \hat{1}(1)] \}$$

Benutze die Beziehung $\text{Spur} \{ \hat{A}(1) \otimes \hat{A}(2) \} = \text{Spur}_1 \{ \hat{A}(1) \} \cdot \text{Spur}_2 \{ \hat{A}(2) \}$

$$\implies S = -k_0 \text{Spur}_1 \{ \hat{\rho}(1) \ln \hat{\rho}(1) \} \cdot \text{Spur}_2 \{ \hat{\rho}(2) \} - k_0 \text{Spur}_2 \{ \hat{\rho}(2) \ln \hat{\rho}(2) \} \cdot \text{Spur}_1 \{ \hat{\rho}(1) \}$$

Die Entropie ist also additiv:

$$\boxed{S = S(1) + S(2)} \quad (\text{IV.1.24})$$

Diese Extensivität gilt jedoch nicht allgemein.

b. **Theorem von Araki und Lieb**

(Commun. Math.Phys **18**, 160 (1970)):

$$\boxed{|S(1) - S(2)| \leq S \leq |S(1) + S(2)|}$$

Anmerkungen:

- Die Sub-Additivität $S \leq S(1) + S(2)$ gilt auch klassisch; die linke Seite der Ungleichung gilt nur quantenmechanisch.
- speziell: $S = 0 \implies S(1) = S(2) \geq 0$!
(Ming Li, P. Vitanyi, An Introduction to Kolmogorov Entropy, S. 64)

c. Einbettung

Schmidt-Zerlegung: immer möglich für $N = 2$

$$|\Psi\rangle = \sum_j \alpha_j |\rho_j(1)\rangle \otimes |\rho_j(2)\rangle \quad (\text{IV.1.25})$$

$$(\hat{\rho}(1))_{ll'} = |\alpha_l|^2 \delta_{ll'} = (\hat{\rho}(2))_{ll'}$$

Reduzierte Entropien:

$$\boxed{S(1) = S(2) = \sum_j |\alpha_j|^2 \log_2 |\alpha_j|^2 \geq 0} \quad (\text{IV.1.26})$$

Umgekehrt: Jeder nichtreine Zustand

$$\hat{\rho}(1) = \sum_i \rho_i |\Psi_i(1)\rangle \langle \Psi_i(1)| \quad (\text{IV.1.27})$$

lässt sich als Teil eines größeren Systems in einem *reinen* Zustand auffassen („Einbettung“):

$$(\text{IV.1.25}), (\text{IV.1.27}): \quad |\Psi(12)\rangle = \sum_i \sqrt{\rho_i} |\Psi_i(1)\rangle \otimes |\Psi_i(2)\rangle \quad (\text{IV.1.28})$$

$S(\mu) \geq 0$:

- klassischer Mangel an Kontrolle (Ensemble), oder
- mikroskopische Unbestimmtheit (Verschränkung, Entanglement)

Diese Interpretationen sind bezüglich des Subsystems μ nicht unterscheidbar!

Früher war ausschließlich der erste Fall, die klassische Mischung, populär als Deutung.

Verschränkung bei gemischtem Zustand (Vedral, PRA **57**, 1619 (1998)) Wenn ein Zustand $\hat{\rho}$ ($N = 2$) verschränkt ist, kann $|\Psi\rangle$ kann *nicht* geschrieben werden als

$$\hat{\rho} = \sum_j w_j \hat{\rho}_j(1) \otimes \hat{\rho}_j(2) \quad \sum_j w_j = 1 \quad w_j \geq 0 \quad (\text{IV.1.29})$$

$\hat{\rho}_j(\mu)$ darf als rein angenommen werden, d. h. eine fehlende Verschränkung muss hier nicht bedeuten, dass $\hat{\rho}$ faktorisiert, d. h. $\hat{\rho} = \hat{\rho}(1) \otimes \hat{\rho}(2)$; „klassische“ Mischung bedeutet **nicht** Verschränkung.

IV.2. Photon-Statistik

Greife eine beliebige Mode $\{\mathbf{k}, \nu\}$ heraus und wähle eine spezielle Darstellung für den Dichteoperator $\hat{\rho}$:

IV.2.1. Fock-Darstellung von $\hat{\rho}$

Fock-Basis:

$$\hat{n} = \hat{q}^\dagger \hat{q} \quad \hat{q} \leftrightarrow \hat{q}_{\mathbf{k}\nu} \quad (\text{IV.2.1})$$

$$\hat{n} |n\rangle = n |n\rangle \quad n = 0, 1, 2, \dots, d-1 \quad (\text{künstlich beschränkt}) \quad (\text{IV.2.2})$$

$$\hat{\rho} = \sum_{n, n'} \rho_{nn'} |n\rangle \langle n'| \quad (\text{IV.2.3})$$

$$\rho_{nn'} = \text{Spur}\{\hat{\rho} |n'\rangle \langle n|\} = \langle n| \hat{\rho} |n'\rangle \quad (\text{IV.2.4})$$

Anmerkungen: Dies ist die Operator Darstellung im Liouville-Raum der Dimension d^2 bei einem Hilbertraum der Dimension d . Als Basisoperatoren dienen hier die Übergangsoperatoren

$$|n\rangle \langle n'| = \hat{P}_{nn'} \quad (\text{IV.2.5})$$

$$\hat{P}_{n'n} = \hat{P}_{nn'}^\dagger \quad (\text{nicht hermitesch})$$

$$\text{Spur}\{\hat{P}_{nn'} \hat{P}_{mm'}^\dagger\} = \delta_{nm} \delta_{n'm'} \quad \text{„orthonormiert“} \quad (\text{IV.2.6})$$

Definiere als Photonstatistik $P(\mathbf{n})$ die Diagonalelemente von $\hat{\rho}$ in Fock-Basis¹:

$$\boxed{P(\mathbf{n}) = \rho_{\mathbf{n}\mathbf{n}}} \quad (\text{IV.2.7})$$

Mittelwert:

$$\begin{aligned} \bar{n} &= \text{Spur}\{\hat{\rho}\hat{n}\} = \sum_{\mathbf{n}, \mathbf{n}'} \langle \mathbf{n} | \hat{\rho} | \mathbf{n}' \rangle \langle \mathbf{n}' | \hat{n} | \mathbf{n} \rangle \\ &= \sum_{\mathbf{n}} \rho_{\mathbf{n}\mathbf{n}} \cdot \mathbf{n} \quad (= 1. \text{ Moment}) \end{aligned} \quad (\text{IV.2.8})$$

IV.2.2. Schwankungs-Maße

- Varianz:

$$\begin{aligned} (\Delta \mathbf{n})^2 &\equiv \text{Spur}\{\hat{\rho}(\hat{n} - \bar{n})^2\} \\ &= \text{Spur}\{\hat{\rho}(\hat{n})^2\} + \bar{n}^2 - 2\bar{n} \text{Spur}\{\hat{\rho}\hat{n}\} = \overline{\mathbf{n}^2} - \bar{n}^2 \end{aligned} \quad (\text{IV.2.9})$$

- Fano-Faktor (Bachor S. 79):

$$f = \frac{(\Delta \mathbf{n})^2}{\bar{n}} \geq 0 \quad (\text{IV.2.10})$$

- Mandel- Q_M -Parameter:

$$\boxed{Q_M = \frac{(\Delta \mathbf{n})^2 - \bar{n}}{\bar{n}} = f - 1 \geq -1} \quad (\text{IV.2.11})$$

$Q_M = -1$ Fock-Zustand: $(\Delta \mathbf{n})^2 = 0$, keine Schwankungen

$Q_M = 0$ Poisson-Verteilung, s.u.

$Q_M \geq 0$ „Super-Poisson“

$Q_M \leq 0$ „Sub-Poisson“

IV.2.3. Spezielle statistische Modelle $P(\mathbf{n})$

(Mandel, Wolf, S. 23)

- a. **Binomialverteilung** nach Bernoulli:

Bei N Versuchen bzw. Beobachtungen sei β die Wahrscheinlichkeit für einen Erfolg, $(1 - \beta)$ für Misserfolg. Gesucht ist $P_N(\mathbf{n})$, die Wahrscheinlichkeit für \mathbf{n} Erfolge bei N Versuchen. Man erhält

$$\boxed{P_N(\mathbf{n}) = \binom{N}{\mathbf{n}} \beta^{\mathbf{n}} (1 - \beta)^{N - \mathbf{n}}} \quad (\text{IV.2.12})$$

¹Zustand muss in Fock-Basis nicht diagonal sein; $\hat{\rho}_{\mathbf{n}\mathbf{n}}$ sind nicht unbedingt die Eigenwerte von $\hat{\rho}$!

IV. Zustandsmodelle

$$\binom{N}{n} = \text{Binomialkoeffizienten} = \frac{N!}{n!(N-n)!}$$

$$\begin{aligned}\bar{n} &= N\beta & (\text{IV.2.13}) \\ \overline{n^2} &= N\beta + N(N-1)\beta^2 \\ (\Delta n)^2 &= N\beta(1-\beta)\end{aligned}$$

$$\boxed{Q_M = -\beta \geq -1} \quad f = 1 - \beta \quad (\text{IV.2.14})$$

b. **Poisson-Verteilung:**

Ausgangspunkt ist die Binomialverteilung mit $N \rightarrow \infty$ und $\bar{n} = N\beta$ konstant.

$$\boxed{P(n) = \frac{\bar{n}^n e^{-\bar{n}}}{n!}} \quad (\text{IV.2.15})$$

$$\begin{aligned}\overline{n^2} &= \bar{n}^2 + \bar{n} \\ (\Delta n)^2 &= \bar{n} = N\beta\end{aligned}$$

$$\boxed{Q_M = 0} \quad f = 1 \quad \rightarrow \text{Glauber-Zustand}$$

c. **Bose-Einstein-Verteilung:** (Mandel, Wolf, S. 25)

Ausgangspunkt ist die Binomialverteilung mit Berücksichtigung der Ununterscheidbarkeit der Sequenzen. Aus (IV.2.12) folgt:

$$\begin{aligned}P \in N(n) &\sim \beta^n (1-\beta)^{N-n} \\ \eta &\equiv \frac{\beta}{1-\beta} \leq 1\end{aligned}$$

mit der Fugazität η . Mit $N \rightarrow \infty$ und Normierung ergibt sich (vgl. quant-ph 0010010 sowie Römer, Filk, S. 149):

$$\boxed{p(n) = (1-\eta)\eta^n} \quad (\text{IV.2.16})$$

$$\begin{aligned}\bar{n} &= \frac{\eta}{1-\eta} \\ (\Delta n)^2 &= \bar{n}(1+\bar{n})\end{aligned}$$

$$\boxed{Q_M = \bar{n} \geq 0} \quad f = 1 + \bar{n} \quad \text{Super-Poisson}$$

Interpretation: $P(n)$ ist die Wahrscheinlichkeit für n Photonen in einer Zelle des Phasenraums, wenn das optische Feld im thermischen Gleichgewicht ist.

IV.3. Korrelationsfunktionen

IV.3.1. Struktur

Sei $\hat{A}(\alpha)$ eine Operatorfunktion mit α als kontinuierlichem Parameter.

$$C(\alpha, \beta) = \text{Spur}\{\hat{\rho}\hat{A}(\alpha)\hat{B}(\beta)\} \equiv \langle \hat{A}\hat{B} \rangle \quad (\text{IV.3.1})$$

Beispiel: Spin-Spin-Korrelationsfunktion ($\hat{\sigma}_i$ sind die Pauli-Matrizen)

$$\hat{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \hat{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Sei nun

$$\begin{aligned} \hat{A}(\theta_\mu) &\equiv \sin \theta_\mu \hat{\sigma}_x(\mu) + \cos \theta_\mu \hat{\sigma}_z(\mu) \\ C(\theta_1, \theta_2) &= \text{Spur}\{\hat{\rho}\hat{A}(\theta_1)\hat{A}(\theta_2)\} \end{aligned}$$

C ist hier eine Funktion der Spinrichtungen (Winkel) in der (x,z)-Ebene.

IV.3.2. Feld-Korrelationsfunktionen 1. Ordnung

Literatur:

Scully: Quantum coherence functions, S. 111

R.J. Glauber, Les Houhes Summer School 1964, S. 65 ff

R.J. Glauber, PR **131**, 2766 (1963)

Gardiner, Quantum Noise, Springer

Mandel, Wolf, Optical coherence and quantum optics, S. 591

Aus (IV.3.1) (Skalenfaktor \mathcal{E} , Polarisationsvektor \mathbf{e}):

$$\begin{aligned} \hat{A}(\alpha) &\longrightarrow \hat{\mathbf{E}}^{(+)}(\mathbf{r}, t) = i\mathcal{E}\hat{q}_{\mathbf{k}}\mathbf{e}e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r}-\omega t)} \\ \hat{B}(\beta) &\longrightarrow \hat{\mathbf{E}}^{(-)}(\mathbf{r}, t) = -i\mathcal{E}\hat{q}_{\mathbf{k}}^\dagger\mathbf{e}e^{-i(\mathbf{k}\mathbf{r}-\omega t)} \end{aligned} \quad (\text{IV.3.2})$$

Definition: Zwei-Punkt-Erwartungswerte im **Heisenberg-Bild**, normalgeordnet, (vgl. die Propagatoren in der Festkörper-Vielteilchentheorie)

$$\boxed{G_{\nu\nu'}^{(1,1)}(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') = \text{Spur}\left\{\hat{\rho}(\theta)\hat{\mathbf{E}}_{\nu}^{(-)}(\mathbf{r}, t)\hat{\mathbf{E}}_{\nu'}^{(+)}(\mathbf{r}', t')\right\} \equiv G_{\nu\nu'}^{(1,1)}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')} \quad (\text{IV.3.3})$$

wobei $\hat{\mathbf{E}}_{\nu}^{(\pm)}$ die Feldkomponenten sind und $\hat{\mathbf{x}} \equiv \{\mathbf{r}, t\}$.

Eigenschaften:

IV. Zustandsmodelle

a. $\text{Spur}\{\hat{A}^\dagger\} = \text{Spur}\{\hat{A}\}^* \implies$

$$\mathbf{G}_{\mathbf{v}\mathbf{v}'}^{(1,1)}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')^* = \text{Spur}\left\{\left(\hat{\rho} \hat{E}_{\mathbf{v}}^{(-)}(\mathbf{x}) \hat{E}_{\mathbf{v}'}^{(+)}(\mathbf{x}')\right)^\dagger\right\} \quad (\text{IV.3.4})$$

$$= \text{Spur}\left\{\hat{E}_{\mathbf{v}'}^{(-)}(\mathbf{x}') \hat{E}_{\mathbf{v}}^{(+)}(\mathbf{x}) \hat{\rho}\right\} = \mathbf{G}_{\mathbf{v}'\mathbf{v}}^{(1,1)}(\mathbf{x}', \mathbf{x})$$

b. $\text{Spur}\{\hat{\rho} \hat{A}^\dagger \hat{A}\} \geq 0 \implies \mathbf{G}^{(1,1)}(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \geq 0$ reell wegen (IV.3.4) (IV.3.5)

c. Setze $\hat{A} \equiv \lambda_1 \hat{E}^{(+)}(\mathbf{x}_1) + \lambda_2 \hat{E}^{(+)}(\mathbf{x}_2)$ (vgl. Mandel, Wolf, S. 586). Dann ist mit beliebigen λ_j

$$\text{Spur}\{\hat{\rho} \hat{A}^\dagger \hat{A}\} = \sum_i \lambda_i^* \sum_j \lambda_j \mathbf{G}^{(1,1)}(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) \geq 0 \implies \det \underbrace{|\mathbf{G}^{(1,1)}(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)|}_{\text{Koeffizienten-Matrix}} \geq 0$$

Für $\lambda_i^* = \lambda_j = 1$; $i = j = 1, 2$, (IV.3.5) und $\det |\mathbf{G}| \geq 0$ folgt die **Schwarzsche Ungleichung**:

$$\boxed{\mathbf{G}^{(1,1)}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_1) \cdot \mathbf{G}^{(1,1)}(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_2) \geq |\mathbf{G}^{(1,1)}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)|^2} \quad (\text{IV.3.6})$$

$$\mathbf{G}^{(1,1)}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_1) \geq \det |\mathbf{G}^{(1,1)}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)|$$

Normierte Korrelationsfunktionen:

$$\boxed{g_{\mathbf{v}\mathbf{v}'}^{(1,1)}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \equiv \frac{\mathbf{G}_{\mathbf{v}\mathbf{v}'}^{(1,1)}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')}{\left(\mathbf{G}_{\mathbf{v}}^{(1,1)}(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \mathbf{G}_{\mathbf{v}'}^{(1,1)}(\mathbf{x}', \mathbf{x}')\right)^{1/2}}} \quad (\text{IV.3.7})$$

Aus (IV.3.6):

$$|g^{(1,1)}|^2 = \frac{|\mathbf{G}^{(1,1)}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')|^2}{|\dots|} \leq 1 \quad (\text{IV.3.8})$$

Aus (IV.3.3) folgt weiterhin, dass $\mathbf{G}_{\mathbf{v}\mathbf{v}'}$ eine Matrix ist, d. h. es ist $\mathbf{e}_{\mathbf{v}} \otimes \mathbf{e}_{\mathbf{v}'}$ zu bilden! Diese Vektoren können beliebig orientiert sein.

Kohärenz erster Ordnung: (Meystre, S. 19 ff)

$$\hat{E}^+(\mathbf{r}, t) = \hat{E}^+(\mathbf{r}_1, t_1) + \hat{E}^+(\mathbf{r}_2, t_2)$$

$$I \sim |\hat{E}^+(\mathbf{r}, t)|^2 = |\hat{E}^+(\mathbf{r}_1, t_1)|^2 + |\hat{E}^+(\mathbf{r}_2, t_2)|^2 + 2 \text{Re} [\hat{E}^-(\mathbf{r}_1, t_1) \hat{E}^-(\mathbf{r}_2, t_2)]^2$$

$$= \mathbf{G}^{(1,1)}(\mathbf{r}_1, t_1; \mathbf{r}_1, t_1) + \mathbf{G}^{(1,1)}(\mathbf{r}_2, t_2; \mathbf{r}_2, t_2) + 2 \text{Re} \mathbf{G}^{(1,1)}(\mathbf{r}_1, t_1; \mathbf{r}_2, t_2)$$

I = Intensität. Sei nun $\mathbf{G}^{(1,1)}(\mathbf{r}_1, t_1; \mathbf{r}_2, t_2) = |\mathbf{G}^{(1)}(\mathbf{r}_1, t_1; \mathbf{r}_2, t_2)| e^{i\Phi}$.

$$\begin{aligned}
 2\operatorname{Re}G^{(1,1)}(1, 2) &= 2|G^{(1,1)}(1, 2)| \cos \varphi \\
 I_{\max} &= G^{(1,1)}(1, 1) + G^{(1,1)}(2, 2) + 2|G^{(1,1)}(1, 2)| \\
 I_{\min} &= G^{(1,1)}(1, 1) + G^{(1,1)}(2, 2) - 2|G^{(1,1)}(1, 2)|
 \end{aligned}$$

Kontrast:

$$\boxed{V = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} \leq 1}$$

$$V = \frac{2 |G^{(1,1)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{t}_1; \mathbf{r}_2, \mathbf{t}_2)|}{G^{(1,1)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{t}_1; \mathbf{r}_1, \mathbf{t}_1) + G^{(1,1)}(\mathbf{r}_2, \mathbf{t}_2; \mathbf{r}_2, \mathbf{t}_2)} \quad (\text{IV.3.9})$$

V wird maximal, wenn in (IV.3.6) Gleichheitszeichen gilt, d. h. $G^{(1,1)}(1, 2)$ faktorisiert.

IV.3.3. Anwendungen

- a. **Absorptiver Photodetektor** („direkte Messung“, siehe auch Abschnitt III.4)
 Die lokale Zählrate bezüglich fester Polarisation wird beschrieben durch das Intensitätsfeld $I(\mathbf{x})$:

$$\boxed{I(\mathbf{x}) \sim G^{(1,1)}(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \geq 0} \quad (\text{IV.3.10})$$

Das Feld wird ausgemessen, indem die Detektorsonde von Ort zu Ort bewegt wird. Bei einem stationären Feld gibt es keine explizite Zeitabhängigkeit. Detektoren, die auf stimulierter Emission beruhen, führen auf „anti-normal geordnete“ Korrelationsfunktionen. Ansonsten benutzt man „normal-geordnete“ Produkte von Operatoren.

- b. **Polarisationsmatrix** (Aspekt der Vektorkomponenten, Orts- und Zeitabhängigkeit unterdrückt, H. Römer, Theoretical Optics, S. 239 ff)

Betrachte die Moden $\mathbf{k} \parallel \mathbf{ke}_3$ $\nu, \nu' = 1, 2$ Feldkomponenten

$$\text{Vgl. (IV.3.3):} \quad J_{\nu\nu'} = \operatorname{Spur} \left\{ \hat{\rho}(0) \hat{E}_{\nu}^{(-)} \hat{E}_{\nu'}^{(+)} \right\} \quad (\text{IV.3.11})$$

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} \langle \hat{E}_1^{(-)} \hat{E}_1^{(+)} \rangle & \langle \hat{E}_1^{(-)} \hat{E}_2^{(+)} \rangle \\ \langle \hat{E}_2^{(-)} \hat{E}_1^{(+)} \rangle & \langle \hat{E}_2^{(-)} \hat{E}_2^{(+)} \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{pmatrix} \quad (\text{IV.3.12})$$

Es gilt:

$$\begin{aligned}
 J_{11} \geq 0, \quad J_{22} \geq 0 & \quad \text{reell} \\
 J_{12} = -J_{21}^* & \\
 \implies \boxed{\mathcal{J} = \mathcal{J}^\dagger} & \quad \text{hermitesch} \quad (\text{IV.3.13})
 \end{aligned}$$

IV. Zustandsmodelle

Jede hermitesche 2×2 -Matrix lässt sich darstellen durch vier Basismatrizen:

$$\boxed{\mathcal{J} = j_0 \hat{1} + \mathbf{j} \hat{\sigma}}$$
 (IV.3.14)

Hier (neben der 1-Matrix):

$$\hat{\sigma}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \hat{\sigma}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \hat{\sigma}_3 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$$
 (IV.3.15)

(im wesentlichen Pauli-Matrizen, hier ist eine andere Schreibweise üblich)

Stokes-Parameter: j_0, j_1, j_2, j_3

$$\boxed{\mathcal{J} = \begin{pmatrix} j_0 + j_1 & j_2 + ij_3 \\ j_2 - ij_3 & j_0 - j_1 \end{pmatrix}}$$
 (IV.3.16)

Schwarzsche Ungleichung:

$$\left| \langle \hat{\mathbf{E}}_1^{(-)} \hat{\mathbf{E}}_2^{(+)} \rangle \right|^2 \leq \langle \hat{\mathbf{E}}_1^{(-)} \hat{\mathbf{E}}_1^{(+)} \rangle \langle \hat{\mathbf{E}}_2^{(-)} \hat{\mathbf{E}}_2^{(+)} \rangle$$

$$J_{12} J_{21} \leq J_{11} J_{22}$$

$$\det \mathcal{J} = J_{11} J_{22} - J_{12} J_{21} \stackrel{(IV.3.16)}{=} j_0^2 - \mathbf{j}^2 \geq 0$$
 (IV.3.17)

$$\Rightarrow |\mathbf{j}| \leq j_0$$
 (IV.3.18)

$$\text{Spur } \mathcal{J} = \langle \hat{\mathbf{E}}_1^{(-)} \hat{\mathbf{E}}_1^{(+)} \rangle + \langle \hat{\mathbf{E}}_2^{(-)} \hat{\mathbf{E}}_2^{(+)} \rangle = 2j_0 \quad \text{Intensität}$$
 (IV.3.19)

Messbarkeit der Stokes-Parameter

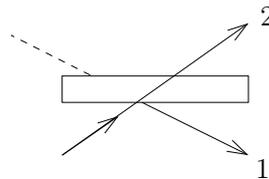


Abbildung IV.1.: Polarisationsfilter „Ersatz-Schaltbild“

(Relativer) Phasenschieber ψ :

$$\mathcal{K}(\psi) = \begin{pmatrix} e^{i\psi/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\psi/2} \end{pmatrix}$$
 (IV.3.20)

Vgl. Kap. III.6.4, III.8.1

$$\mathcal{J}' = \mathcal{K} \mathcal{J} \mathcal{K}^\dagger = \begin{pmatrix} J_{11} & e^{i\psi/2} J_{12} \\ e^{-i\psi/2} J_{21} & J_{22} \end{pmatrix}$$

Absorptiver Polarisationsfilter \mathcal{P} : Projiziere $\hat{\mathbf{E}}$ auf die Polarisation $\mathbf{e} = (\cos \theta, \sin \theta, 0)^\top$

$$\text{Projektor (nicht unitär): } \mathcal{P}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos^2 \theta & \sin \theta \cos \theta \\ \sin \theta \cos \theta & \sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad (\text{IV.3.21})$$

$$\mathcal{P}^\dagger = \mathcal{P} = \mathcal{P}^2 \quad (\text{IV.3.22})$$

$$\mathcal{J}' = \mathcal{P} \mathcal{J} \mathcal{P}$$

$$\text{Spur } \mathcal{J}' = \text{Spur} \{ \mathcal{J} \mathcal{P} \} \leq \text{Spur } \mathcal{J} \quad (\text{IV.3.23})$$

Folgende Kombination der Transformationen von \mathcal{P} und \mathcal{K} definieren ein Messprogramm über Intensitätsmessungen:

$$\text{Spur} \{ \mathcal{J} \mathcal{P}(0) \} = j_0 + j_1$$

$$\text{Spur} \{ \mathcal{J} \mathcal{P}(\pi/2) \} = j_0 - j_1$$

$$\text{Spur} \{ \mathcal{J} \mathcal{P}(\pi/4) \} = j_0 + j_2$$

$$\text{Spur} \left\{ \mathcal{K}(\pi/4) \mathcal{J} \mathcal{K}(\pi/4)^\dagger \mathcal{P}(\pi/4) \right\} = j_0 + j_3$$

Spezielle Polarisationszustände

- Unpolarisiertes Licht:

$$\begin{aligned} \mathbf{j} &= 0, & \mathcal{J} &= j_0 \hat{1} \\ \det \mathcal{J} &= j_0^2 \end{aligned} \quad (\text{IV.3.24})$$

- vollständige Polarisation:

$$\begin{aligned} \mathbf{j}^2 &= j_0^2 \\ \det \mathcal{J} &= 0 \end{aligned} \quad (\text{IV.3.25})$$

Polarisationsgrad:

$$\boxed{p = \frac{|\mathbf{j}|}{j_0}} \quad (\text{IV.3.26})$$

Anmerkung:

Es ist eine direkte mathematische Konsequenz von Gl. (IV.3.13), dass bezüglich der Polarisation die Spin-Algebra relevant wird. Dazu ist also die formale Einführung von Photonen als Teilchen mit Spin Eins nicht notwendig!

IV.3.4. Feld-Korrelationsfunktionen 2. Ordnung

Literatur: Mandel, Wolf, S. 585

Definition:

$$\boxed{G_{\nu_1 \nu_2 \mu_2 \mu_1}^{(2,2)}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2; \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2) = \text{Spur} \{ \hat{\rho}(0) \hat{E}_{\nu_1}^{(-)}(\mathbf{x}_1) \hat{E}_{\nu_2}^{(-)}(\mathbf{x}_2) \hat{E}_{\mu_2}^{(+)}(\mathbf{y}_2) \hat{E}_{\mu_1}^{(+)}(\mathbf{y}_1) \}} \quad (\text{IV.3.27})$$

IV. Zustandsmodelle

mit den Feldkomponenten $\mathbf{x}_j = \{\mathbf{r}_j, \mathbf{t}_j\}$ etc. Bei $\mathbf{G}^{(m,n)}$ beschreibt m die Anzahl der $(-)$ -Terme und n die Anzahl der $(+)$ -Terme. Die Vier-Punkt-Funktion \mathbf{G} ist der normalgeordnete Erwartungswert im Heisenberg-Bild.

Eigenschaften:

$$\mathbf{G}_{\nu_1\nu_2\mu_2\mu_1}^{(2,2)}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2; \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \geq 0 \quad \text{vgl. (IV.3.5)} \quad (\text{IV.3.28})$$

Schwarzsche Ungleichung (vgl. (IV.3.6))

$$\left| \mathbf{G}_{\nu_1\nu_2\mu_2\mu_1}^{(2,2)}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2; \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_1) \right|^2 \leq \mathbf{G}_{\nu_1\nu_2\nu_2\nu_1}^{(2,2)}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2; \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1) \mathbf{G}_{\mu_1\mu_2\mu_2\mu_1}^{(2,2)}(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2; \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_1) \quad (\text{IV.3.29})$$

Normierte Korrelationsfunktionen mit fester Feldkomponente nach Glauber:

$$\mathbf{g}^{(2,2)}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2; \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_1) = \frac{\mathbf{G}^{(2,2)}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2; \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_1)}{\prod_{j=1}^2 [\mathbf{G}^{(1,1)}(\mathbf{x}_j, \mathbf{x}_j) \mathbf{G}^{(1,1)}(\mathbf{y}_j, \mathbf{y}_j)]^{1/2}} \quad (\text{IV.3.30})$$

Beachte: Hierfür gilt nicht die Ungleichung (IV.3.29)! Daher:

$$|\mathbf{g}^{(2,2)}| \not\leq 1 \quad (\text{IV.3.31})$$

Definition: Kohärenz zweiter Ordnung (Meystre, Sargent, S. 340)

$$|\mathbf{g}^{(2,2)}| = 1 \quad (\text{IV.3.32})$$

Dies folgt, falls $\mathbf{G}^{(2,2)}$ faktorisiert, d. h. falls gilt (unkorreliert):

$$\mathbf{G}^{(2,2)}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2; \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_1) = \mathbf{U}^*(\mathbf{x}_1)\mathbf{U}^*(\mathbf{x}_2)\mathbf{U}(\mathbf{y}_2)\mathbf{U}(\mathbf{y}_1) \quad (\text{IV.3.33})$$

Analog Kohärenz 1. Ordnung: $\mathbf{g}^{(1,1)} = 1$ unabhängig von Ort und Zeit! Vgl. (IV.3.9).

Anwendungen:

a. Zweipunkt-Koinzidenzmessungen

Für stationäre Felder: $\tau = t' - t$, die Feldkomponenten seien fest.

$$\mathbf{I}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \tau) \sim \mathbf{G}^{(2,2)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \mathbf{r}', \mathbf{r}, \tau) \quad (\text{IV.3.34})$$

Beispiel: eine Mode: (\mathbf{k}, ω)

$$\hat{\mathbf{E}}^{(+)} = i\mathcal{E}\hat{\mathbf{q}}e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r}-\omega t)}$$

festе Polarisation

$$\mathbf{G}^{(2,2)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1) = |\mathcal{E}|^4 \text{Spur}\{\hat{\rho}(0)\hat{\mathbf{q}}^\dagger\hat{\mathbf{q}}^\dagger\hat{\mathbf{q}}\hat{\mathbf{q}}\}$$

$$\text{Gl. (II.3.2): } \hat{\mathbf{q}}^\dagger\hat{\mathbf{q}} = \hat{\mathbf{q}}\hat{\mathbf{q}}^\dagger - 1: \quad \hat{\mathbf{q}}^\dagger\hat{\mathbf{q}}^\dagger\hat{\mathbf{q}}\hat{\mathbf{q}} = \dots = (\hat{n})^2 - \hat{n}$$

$$\mathbf{G}^{(2,2)} = |\mathcal{E}|^4 (\overline{\hat{n}^2} - \bar{n})$$

$$\mathbf{G}^{(1,1)} = |\mathcal{E}|^2 \text{Spur}\{\hat{\rho}(0)\hat{\mathbf{q}}^\dagger\hat{\mathbf{q}}\} = \bar{n}|\mathcal{E}|^2$$

Die normierte Funktion $g^{(2,2)}$ wird zu:

$$g^{(2,2)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \mathbf{r}', \mathbf{r}, \tau) = \frac{\overline{n^2} - \bar{n}}{\bar{n}^2} \quad (\text{IV.3.35})$$

Speziell: Fock-Zustand $\hat{\rho}$ mit $\overline{n^2} = \bar{n}^2$, da Eigenzustand zu \hat{n}

$$g^{(2,2)} = 1 - \frac{1}{\bar{n}} \leq 1 \quad (\bar{n} \neq 0) \quad (\text{IV.3.36})$$

Einphoton-Zustand: $g^{(2,2)} = 0$, keine Koinzidenz, das Photon ist unteilbar (experimenteller Aspekt, vgl. Kapitel III.7, Kapitel IV.3.5)

Für $\hat{\rho}$ gilt die Poisson-Statistik (Glauber-Zustand). Aus Kapitel IV.2: $\overline{n^2} = \bar{n}^2 + \bar{n}$. Demnach folgt hier:

$$g^{(2,2)} = 1 \quad (\text{IV.3.37})$$

b. lokale Intensitäts-Korrelationsfunktion

Stationarität: $t_2 = t_1 + \tau$, sowie $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2 = 0$. Aus (IV.3.10) folgt:

$$I(t) = \langle G^{(1,1)}(t_1) \rangle = \langle G^{(1,1)}(t_1 + \tau) \rangle$$

„Zeitliche Kohärenz 2. Ordnung“: $(g^{(2)}(\tau) \geq 0)$

$$g^{(2)}(\tau) = \frac{\langle \hat{E}^{(-)}(t_1) \hat{E}^{(-)}(t_1 + \tau) \hat{E}^{(+)}(t_1 + \tau) \hat{E}^{(+)}(t_1) \rangle}{[I(t)]^2} \quad (\text{IV.3.38})$$

Definition: Photon-Bunching (zeitlicher Aspekt)

$$g^{(2)}(\tau) < g^{(2)}(0) \quad \tau > 0 \quad (\text{IV.3.39})$$

$$|\Psi(1)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|0(1)\rangle + |1(1)\rangle] \quad (\text{IV.3.40})$$

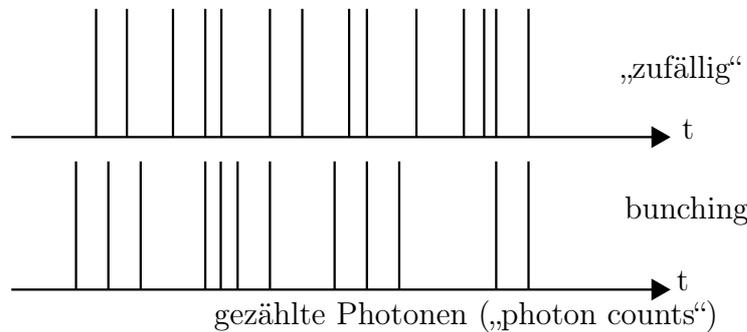


Abbildung IV.2.: Photon Bunching

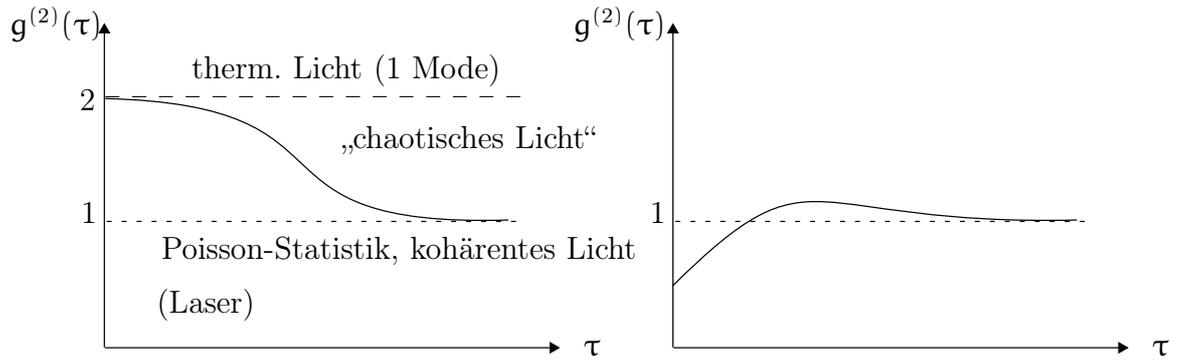


Abbildung IV.3.: Bunching (links) und Anti-Bunching (rechts)

Bunching:

$$g^{(2)}(\tau) = 1 + (g^{(1)}(\tau))^2 = 1 + e^{-\gamma^2 \tau^2} \quad \text{Gauß}$$

Anti-Bunching, nicht-klassisch:

$$g^{(2)}(0) = 1 - \frac{1}{n} < 1 \quad \text{vgl. (IV.3.36)}$$

Siehe Abb. IV.3, Literatur: H. Bachor, S. 53; Walls, Milburn, S. 40

IV.3.5. Feld-Korrelationsfunktionen n-ter Ordnung

Definition:

$$G^{(n,n)}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{2n}) \equiv \text{Spur} \left\{ \hat{\rho}(0) \hat{\mathbf{E}}^{(-)}(\mathbf{x}_1) \dots \hat{\mathbf{E}}^{(-)}(\mathbf{x}_n) \hat{\mathbf{E}}^{(+)}(\mathbf{x}_{n+1}) \dots \hat{\mathbf{E}}^{(+)}(\mathbf{x}_{2n}) \right\} \quad (\text{IV.3.41})$$

Fundamentale Eigenschaften:

- $G^{(n,n)} = 0$ für $n > N$, der maximalen Anzahl von Photonen in $\hat{\rho}$.
Beweis: $\hat{\mathbf{E}}^{(+)}(\mathbf{x}_n) \dots \hat{\mathbf{E}}^{(+)}(\mathbf{x}_{n+p}) \hat{\rho}(0) = 0$ für $p > N$
- $G^{(n,n)}(\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_n, \mathbf{x}_n \dots \mathbf{x}_1) \geq 0$
- Meystre, Sargent, S. 940:
Ein Feld heißt kohärent n-ter Ordnung, falls für alle $m \leq n$ gilt :

$$G^{(m,m)}(\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_m, \mathbf{x}_{m+1} \dots \mathbf{x}_{2m}) = \mathcal{E}^*(\mathbf{x}_1) \dots \mathcal{E}^*(\mathbf{x}_m) \mathcal{E}(\mathbf{x}_{m+1}) \dots \mathcal{E}(\mathbf{x}_{2m}) \quad (\text{IV.3.42})$$

Die $\mathcal{E}(\mathbf{x}_j)$ sind komplexe Funktionen.

- Im Allgemeinen haben die Funktionen $G^{(m,m)}$ keine intuitive Bedeutung mehr (Mandel, Wolf, S. 591). Die vollständige Darstellung von $\hat{\rho}$ durch die Korrelationsfunktionen ist aber im Prinzip möglich.

IV.4. Kohärente (Glauber-) Zustände

Man betrachtet eine selektierte Mode $\{\mathbf{k}, \nu\}$.

Definition: $|\alpha\rangle$ als Eigenzustände zu \hat{q} . Im Vakuumzustand ist $\alpha = 0$.

$$\hat{q} |\alpha\rangle = \alpha |\alpha\rangle \quad (\text{IV.4.1})$$

Eigenschaften:

a. **Fock-Darstellung:**

konjugierte Gleichung zu (IV.4.1)

$$\begin{aligned} \langle \alpha | \hat{q}^\dagger &= \langle \alpha | \alpha^* \\ \hat{q}^\dagger |n\rangle &= (n+1)^{\frac{1}{2}} |n+1\rangle \\ \langle \alpha | \hat{q}^\dagger |n\rangle &= \alpha^* \langle \alpha |n\rangle = (n+1)^{\frac{1}{2}} \langle \alpha |n+1\rangle \\ \Rightarrow |n+1\rangle \langle \alpha | &= \frac{\alpha}{(n+1)^{1/2}} \langle n | \alpha \rangle \end{aligned}$$

Rekursion:

$$\begin{aligned} \langle m | \alpha \rangle &= \frac{\alpha^m}{(m!)^{1/2}} \langle 0 | \alpha \rangle \\ \Rightarrow |\alpha\rangle &= \sum_n |n\rangle \langle n | \alpha \rangle = \sum_n |n\rangle \frac{\alpha^n}{(n!)^{1/2}} \langle 0 | \alpha \rangle \end{aligned}$$

Normierung:

$$\begin{aligned} 1 = \langle \alpha | \alpha \rangle &= |\langle 0 | \alpha \rangle|^2 \sum_n \frac{\alpha^{2n}}{(n!)^{1/2}} = |\langle 0 | \alpha \rangle|^2 e^{|\alpha|^2} \\ \Rightarrow \langle 0 | \alpha \rangle &= e^{-|\alpha|^2/2} \quad \text{reell} \end{aligned}$$

$$\boxed{|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_n \frac{\alpha^n}{(n!)^{1/2}} |n\rangle} \quad (\text{IV.4.2})$$

b. **Photon-Statistik**

$$\hat{\rho} = |\alpha\rangle \langle \alpha| = e^{-|\alpha|^2} \sum_{nn'} \frac{\alpha^n (\alpha^n)^*}{(n!n')^{1/2}} |n\rangle \langle n'|$$

$$\boxed{P(n) = \langle n | \hat{\rho} |n\rangle = \frac{\alpha^{2n}}{(n!)} e^{-|\alpha|^2}} \quad \text{Poisson-Verteilung!} \quad (\text{IV.4.3})$$

c. **Momente** (leicht nachzurechnen):

$$\bar{n} = \langle \alpha | \hat{n} | \alpha \rangle = |\alpha|^2 \quad (\text{IV.4.4})$$

$$\overline{n^2} = \langle \alpha | \hat{n}^2 | \alpha \rangle = |\alpha|^4 + |\alpha|^2 \quad (\text{IV.4.5})$$

$$(\Delta n)^2 = \overline{n^2} - \bar{n}^2 = |\alpha|^2 = \bar{n} \quad (\text{IV.4.6})$$

$$(\text{IV.2.11}): \quad Q_M = 0 \quad \text{Mandel}$$

d. **Zeitabhängigkeit:** Mit (II.4.12), $\hat{H} = \hbar\omega\hat{n}$, und (IV.4.2) erhält man den nichtstationären Zustand

$$\begin{aligned} |\alpha(t)\rangle &= e^{-i\hat{H}t/\hbar} |\alpha(0)\rangle \\ &= e^{-|\alpha|^2/2} \sum_n \frac{\alpha^n}{(n!)^{1/2}} e^{-in\omega t} |n\rangle \\ &= |\alpha e^{-i\omega t}\rangle \end{aligned} \quad (\text{IV.4.7})$$

e. **Erwartungswerte der Quadratur-Operatoren:** Mit einer festen Mode $\{\mathbf{k}, \nu\}$ (vgl. (II.3.17))

$$\hat{P}_{\mathbf{k}\nu}(t) \equiv \frac{i}{\sqrt{2}} \left(\hat{q}_{\mathbf{k}\nu}^\dagger e^{+i\omega t} - \hat{q}_{\mathbf{k}\nu} e^{-i\omega t} \right)$$

Im Heisenberg-Bild, es sei $\alpha \equiv |\alpha| e^{i\delta}$; zeitunabhängig

$$\begin{aligned} \langle \alpha | \hat{P}_{\mathbf{k}\nu}(t) | \alpha \rangle &= \frac{i}{\sqrt{2}} (\alpha^* e^{i\omega t} - \alpha e^{-i\omega t}) = \frac{i}{\sqrt{2}} (\alpha^*(t) - \alpha(t)) \\ &= \frac{i}{\sqrt{2}} |\alpha| (e^{i\omega t - i\delta} - e^{-i\omega t + i\delta}) \end{aligned} \quad (\text{IV.4.8})$$

$$\langle \alpha | \hat{P}_{\mathbf{k}\nu}(t) | \alpha \rangle = \sqrt{2} |\alpha| \sin(\omega t - \delta) \quad (\text{IV.4.9})$$

Entsprechend:

$$\begin{aligned} \hat{Q}_{\mathbf{k}\nu}(t) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\hat{q}_{\mathbf{k}\nu}^\dagger e^{+i\omega t} + \hat{q}_{\mathbf{k}\nu} e^{-i\omega t} \right) \\ \langle \alpha | \hat{Q}_{\mathbf{k}\nu}(t) | \alpha \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\alpha^*(t) + \alpha(t)) = \frac{1}{\sqrt{2}} |\alpha| (e^{i\omega t - i\delta} + e^{-i\omega t + i\delta}) \\ &= \sqrt{2} |\alpha| \cos(\omega t - \delta) \end{aligned} \quad (\text{IV.4.10})$$

f. **Korrelationsfunktion 1. Ordnung**

Glauber, PR **131**, 2766 (1963)

Gardiner, Quantum Noise, S. 242; Mandel, Wolf

Nach Gleichung (II.3.13) ist, mit $(\mathbf{r}, t) \equiv \mathbf{x}$, $\phi = \mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t$

$$\begin{aligned} \hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}, t) &= i\mathcal{E}\hat{q} e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)} \equiv i\mathcal{E}\hat{q} e^{i\phi} \\ \text{(IV.4.1)} \implies \hat{E}^{(+)}(\mathbf{x})|\alpha\rangle &= i\alpha\mathcal{E} e^{i\phi} |\alpha\rangle \equiv i\mathcal{E}\alpha(\mathbf{x})|\alpha\rangle \\ \text{entspr.: } \langle\alpha|\hat{E}^{(-)}(\mathbf{x}) &= \langle\alpha|\mathcal{E}\alpha^*(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

Sei nun

$$\begin{aligned} \hat{\rho}(0) &= |\alpha\rangle\langle\alpha| \\ G^{(1,1)}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') &= \text{Spur}\{\hat{E}^{(+)}(\mathbf{x}')|\alpha\rangle\langle\alpha|\hat{E}^{(-)}(\mathbf{x})\} = \alpha(\mathbf{x}')\alpha^*(\mathbf{x})|\mathcal{E}|^2 \quad \text{faktoriert!} \end{aligned}$$

$$\boxed{|g^{(1,1)}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')| = \frac{|\alpha(\mathbf{x}')\alpha^*(\mathbf{x})|}{[\alpha^*(\mathbf{x})\alpha(\mathbf{x})\alpha^*(\mathbf{x}')\alpha(\mathbf{x}')]^{1/2}} = 1} \quad \text{(IV.4.11)}$$

$|g^{(1,1)}|$ ist also konstant („Kohärenz erster Ordnung“)!

g. Korrelationsfunktion 2. Ordnung

$$\begin{aligned} \text{(IV.3.35): } g^{(2,2)} &= \frac{\overline{n^2} - \bar{n}}{\bar{n}^2}, \quad \bar{n} = |\alpha|^2, \quad \overline{n^2} = |\alpha|^4 + |\alpha|^2 \\ \implies \boxed{g^{(2,2)} = \frac{|\alpha|^4}{|\alpha|^4} = 1} & \quad \text{für alle } \alpha \quad \text{(IV.4.12)} \end{aligned}$$

IV.5. Squeezed States

Literatur:

Mandel, Wolf, S. 1034 ff

Scully, S. 57

Walls, Milburn, S. 15

Definition 1 (formal): Spezielle Bogoliubov-Transformation für eine Mode $\{\mathbf{k}\nu\}$

$$\boxed{\hat{\mathbf{b}} \equiv \mu\hat{\mathbf{q}} + \nu\hat{\mathbf{q}}^\dagger} \quad \text{(IV.5.1)}$$

Die Parameter μ, ν sind komplex. Der adjungierte Operator dazu ist:

$$\hat{\mathbf{b}}^\dagger = \mu^*\hat{\mathbf{q}}^\dagger + \nu^*\hat{\mathbf{q}}$$

Kommutatoreigenschaften:

$$\begin{aligned} \text{Fordere} \quad [\hat{\mathbf{b}}, \hat{\mathbf{b}}^\dagger]_- &= (|\mu|^2 - |\nu|^2) \hat{\mathbf{1}} \equiv \hat{\mathbf{1}} \\ \implies |\mu|^2 - |\nu|^2 &= 1 \end{aligned} \quad \text{(IV.5.2)}$$

IV. Zustandsmodelle

Ein Zustand $|\beta\rangle$ heißt squeezed state (verallgemeinerter kohärenter Zustand), falls gilt:

$$\hat{b}|\beta\rangle = \beta|\beta\rangle \quad (\text{IV.5.3})$$

und analog

$$\langle\beta|\hat{b}^\dagger = \langle\beta|\beta^*$$

Eigenschaften:

a. Bezüglich \hat{b} sind mit $|\beta\rangle$ die Verhältnisse wie bei Glauber-Zuständen ($\mu = 1, \nu = 0$)

b. Inverse Transformation:

$$\begin{aligned} \hat{q} &= \mu^* \hat{b} - \nu \hat{b}^\dagger \\ \hat{q}^\dagger &= \mu \hat{b}^\dagger - \nu^* \hat{b} \end{aligned} \quad (\text{IV.5.4})$$

c. Aus b folgt:

$$\begin{aligned} \langle\beta|\hat{q}|\beta\rangle &= \mu^* \beta - \nu \beta^* \equiv \tilde{\beta} \\ \langle\beta|\hat{q}^\dagger|\beta\rangle &= \mu \beta^* - \nu^* \beta \equiv \tilde{\beta}^* \\ \langle\beta|\hat{q}^\dagger \hat{q}|\beta\rangle &= |\tilde{\beta}|^2 + |\nu|^2 \end{aligned} \quad (\text{IV.5.5})$$

d. Unschärfe (ohne Beweis), vgl. die Quadratur-Operatoren (II.3.17)

$$\begin{aligned} (\Delta Q)^2 &= \frac{1}{2} |\mu - \nu|^2 \\ (\Delta P)^2 &= \frac{1}{2} |\mu + \nu|^2 \end{aligned} \quad (\text{IV.5.6})$$

$$(\Delta Q)^2 (\Delta P)^2 = \frac{1}{4} [1 - (\mu\nu^* - \nu\mu^*)^2] = \frac{1}{4} [1 + (2 \operatorname{Im}(\mu\nu^*))^2]$$

Im Fall von „squeezed states“ gilt, vgl. (IV.5.6):

$$\begin{aligned} 2(\Delta Q)^2 < 1 < 2(\Delta P)^2 & \quad \text{oder} \\ 2(\Delta P)^2 < 1 < 2(\Delta Q)^2 \end{aligned}$$

Definition 2: „Squeezing Operator“

$$\hat{S}(\varepsilon) = \exp \left[-\frac{1}{2} (\varepsilon^* \hat{q}^2 + \varepsilon (\hat{q}^\dagger)^2) \right] \quad (\text{IV.5.7})$$

Hierbei ist r der „squeeze parameter“ und $\varepsilon \equiv r e^{i\theta}$.

Eigenschaften:

a. Unitarität:

$$\hat{S}^\dagger(\varepsilon) = \hat{S}^{-1}(\varepsilon) = \hat{S}(-\varepsilon)$$

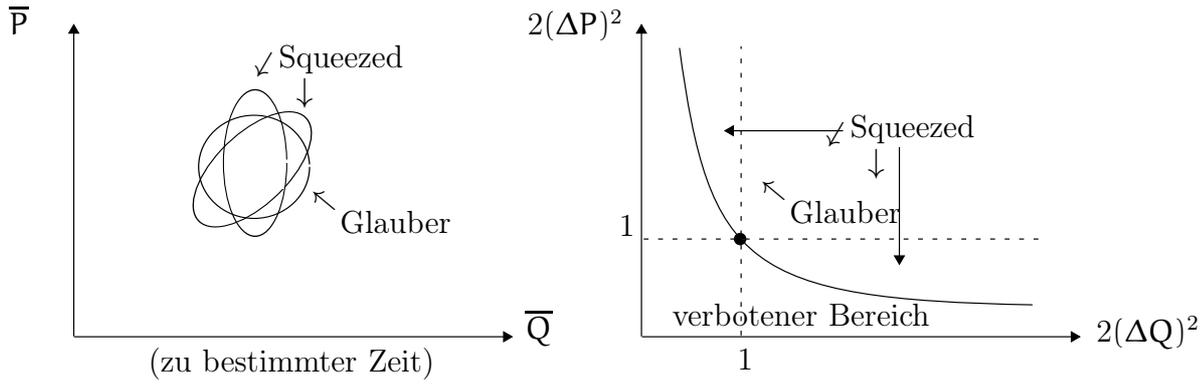


Abbildung IV.4.: Squeezed States

b. ohne Beweis:

$$\hat{S}\hat{q}\hat{S}^\dagger = \mu\hat{q} + \nu\hat{q}^\dagger = \hat{b} \quad (\text{IV.5.8})$$

wobei $\mu = \cosh r$ (reell), $\nu = \sinh r \cdot e^{i\theta}$ und $|\mu|^2 - |\nu|^2 = 1$, vgl. (IV.5.2). Bei $r = 0$ Glauber-Zustand.

c. Deformierter Glauber-Zustand. Behauptung:

$$|\beta\rangle \equiv |\varepsilon, \alpha\rangle = \hat{S}(\varepsilon) |\alpha\rangle \quad (\text{IV.5.9})$$

Beweis: (Mandel, Wolf, S. 1039, Gl. 21.3-9)

$$(\text{IV.5.8}), (\text{IV.5.9}): \quad \hat{b} |\beta\rangle = \hat{S}(\varepsilon) \hat{q} \hat{S}^\dagger(\varepsilon) \hat{S}(\varepsilon) |\alpha\rangle = \hat{S} \hat{q} |\alpha\rangle = \alpha \hat{S} |\alpha\rangle = \alpha |\beta\rangle \checkmark$$

„Squeezed Vakuum“: $|0\rangle \equiv |\beta = 0\rangle$

$$\langle \beta = 0 | \hat{q}^\dagger \hat{q} | \beta = 0 \rangle = |\nu|^2 \langle \beta = 0 | \hat{b} \hat{b}^\dagger | \beta = 0 \rangle = |\nu|^2 \neq 0 \quad (\text{IV.5.10})$$

d. Unschärfe: (Mandel, Wolf, S. 1040): $|\beta\rangle = |\varepsilon, \alpha\rangle$, gemäß c.

Ohne Beweis, mit $\phi(t) = \omega t - \delta$:

$$2 \langle \varepsilon, \alpha | (\Delta \hat{Q})^2 | \varepsilon, \alpha \rangle = \cosh 2r - \sinh 2r \cos(\theta - 2\phi(t))$$

Für $r = 0$ ist $\overline{(\Delta \hat{Q})^2} = \frac{1}{2}$, unabhängig von t (Glauber).

Für $r > 0$ ist die Varianz abhängig von t und hat ein Minimum bei $\phi(t) = \theta/2$:

$$\langle \varepsilon, \alpha | (\Delta \hat{Q})^2 | \varepsilon, \alpha \rangle_{\min} = \frac{1}{2} [\cosh 2r - \sinh 2r] = \frac{1}{2} e^{-2r} \quad (\text{IV.5.11})$$

Analog hat sie bei $\phi(t) = -\theta/2$ ein Maximum:

$$\langle \varepsilon, \alpha | (\Delta \hat{Q})^2 | \varepsilon, \alpha \rangle_{\max} = \frac{1}{2} [\cosh 2r + \sinh 2r] = \frac{1}{2} e^{2r} \quad (\text{IV.5.12})$$

e. **Anwendungen:** „Messungen jenseits des Quanten-Limits“, „stroboskopische“ Messung (Scully, S. 57; Meystre, S. 438, Mandel, Wolf, S. 1037). Vergleiche auch (IV.5.11), (IV.5.12). Interessant für die Detektion von Gravitationswellen.

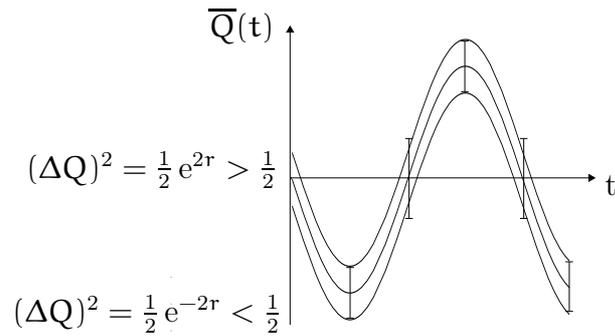


Abbildung IV.5.: Entwicklung eines „Squeezed States“, $r > 0$

IV.6. Thermische Gleichgewichts-Zustände

Kanonischer Dichteoperator

Beobachtungs- (Kontroll-) Ebene: $\{\hat{G}_1, \hat{G}_2, \dots, \hat{G}_b\}$ mit $b \ll n^2 - 1 = s$

$$\overline{\hat{G}_v} = \text{Spur}\{\hat{\rho}\hat{G}_v\} \quad v = 1, \dots, b$$

Dies reicht bei weitem nicht aus, um die Dichtematrix festzulegen! Forderung an die Entropie (Jaynes-Prinzip):

$$S(\hat{\rho}) = -k_0 \text{Spur}\{\hat{\rho} \ln \hat{\rho}\} \quad \text{maximal!}$$

unter den Nebenbedingungen $\overline{\hat{G}_v}$ und mit den Lagrange-Parametern β_v (vgl. Fick, Sauermann, Quantenstatistik dynamischer Prozesse I). Es ist

$$\hat{\rho}_0 \equiv \frac{1}{Z} \exp\left(-\sum_{v=1}^b \beta_v \hat{G}_v\right)$$

$$Z = \text{Spur}\left\{\exp\left(\sum_{v=1}^b \beta_v \hat{G}_v\right)\right\}$$

Damit folgt

$$\ln \hat{\rho}_0 = -\sum_{v=1}^b \beta_v \hat{G}_v - \ln Z \cdot \hat{1}$$

und für den Mittelwert dieses Ausdrucks, wie auch im klassischen Fall

$$S = k_0 \sum_v \beta_v \overline{\hat{G}_v} - k_0 \ln Z$$

Gleichgewichts-Thermodynamik

Man betrachtet ein kanonisches Ensemble. Mit $b = 1$ sei $\hat{G}_1 = \hat{H}$ und $\overline{\hat{G}_1} = E$. Die Konstante k_0 ist dann die Boltzmann-Konstante $k_B \approx 10^{-4} \text{eV/K}$. Der Dichteoperator wird zu

$$\hat{\rho} = \frac{1}{Z} \exp(-\beta_1 \hat{H}), \quad \beta_1 = \frac{1}{k_B T} \quad (\text{IV.6.1})$$

Thermische Strahlung

„Schwarzkörperstrahlung“ (Loudon, S. 7 ff) Sei eine **feste Mode**: $\{\mathbf{k}, \nu\}$:

$$\hat{H} = \hbar\omega\hat{n} \quad (\text{IV.6.2})$$

Die Nullpunktsenergie fällt im folgenden heraus. Die Fock-Darstellung von $\hat{\rho}$ ist dann mit

$$B \equiv e^{-\hbar\omega/k_B T} \leq 1 \quad (\text{IV.6.3})$$

Fock-Basis:

$$Z = \sum_n \langle n | e^{-\beta_1 \hat{H}} | n \rangle \implies$$

$\rho_{nn'} = \langle n \hat{\rho} n' \rangle = \frac{1}{Z} B^n \delta_{nn'}$ $Z = \sum_n B^n = \frac{1}{1-B}$
--

(IV.6.4)

$$\implies \rho_{nn} = (1-B)B^n \quad (\text{IV.6.5})$$

Eigenschaften:

a. Mittlere Photonenzahl

$$\bar{n} = \sum_n n \rho_{nn} = (1-B) \sum_n n B^n \quad (\text{IV.6.6})$$

$$\frac{\partial B^n}{\partial B} = n B^{n-1} \quad (\text{IV.6.7})$$

$$\bar{n} = (1-B)B \frac{\partial}{\partial B} \sum_n B^n = (1-B)B \frac{\partial}{\partial B} \frac{1}{1-B} = \frac{B}{1-B} \quad (\text{IV.6.8})$$

Die mittlere Photonenzahl folgt einer Bose-Verteilung:

$\bar{n} = \frac{1}{\exp(\hbar\omega/k_B T) - 1}$

(IV.6.9)

$$\bar{n} = \frac{1}{Z} B \frac{\partial}{\partial B} Z$$

Beispiel: Mit $\hbar\omega = 1,5\text{eV}$ und $k_B T = 0,25\text{eV} (\hat{=} 2500\text{K})$ wird $\bar{n} \approx 10^{-3}$.
Bei $k_B T = 2,5 \text{ eV} (\hat{=} 25000\text{K})$ wird $\bar{n} \approx 1$.

b. Mandel-Q_M-Parameter

$$\overline{n^2} - \bar{n} = \sum_n (n^2 - n) \rho_{nn} \stackrel{(\text{IV.6.5})}{=} (1-B) \sum_n (n^2 - n) B^n$$

Beachte:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial B^2} B^n &= n(n-1)B^{n-2} \implies B^2 \frac{\partial^2}{\partial B^2} B^n = (n^2 - n)B^n \\ \implies \overline{n^2} - \bar{n} &= (1-B)B^2 \frac{\partial^2}{\partial B^2} \sum_n B^n = (1-B)B^2 \frac{\partial^2}{\partial B^2} \frac{1}{1-B} \end{aligned} \quad (\text{IV.6.10})$$

IV. Zustandsmodelle

Nebenrechnung:

$$\frac{\partial}{\partial B} \frac{1}{1-B} = \frac{1}{(1-B)^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial B} \frac{1}{(1-B)^2} = \frac{2(1-B)}{(1-B)^4}$$

Dann ist

$$\overline{n^2} - \bar{n} = 2(1-B)B^2 \frac{1-B}{(1-B)^4} = 2 \frac{B^2}{(1-B)^2} = 2(\bar{n})^2 \quad (\text{IV.6.11})$$

Quadrat der Abweichung (vgl. Kapitel III.2):

$$(\Delta n)^2 = \overline{n^2} - (\bar{n})^2 = 2(\bar{n})^2 + \bar{n} - (\bar{n})^2 = (\bar{n})^2 + \bar{n}$$

Der Mandel- Q_M -Parameter ist also vom Typ „Super-Poisson“:

$$Q_M = \frac{(\Delta n)^2 - \bar{n}}{\bar{n}} = \bar{n} \geq 0 \quad (\text{IV.6.12})$$

c. **Energiedichte** über alle Moden $\{\mathbf{k}\nu\}$

$$g^{(2,2)} = \frac{\overline{n^2} - \bar{n}}{\bar{n}^2} = \frac{2\bar{n}^2}{\bar{n}^2} = 2$$

Beachte

$$\sum_{\mathbf{k}} \xrightarrow{\text{Polarisation}} \frac{2V}{(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{k} = \frac{8\pi}{(2\pi)^3} \int k^2 dk$$

$$\int k^2 dk = \int \frac{\omega^2}{c^2} \frac{d\omega}{c}$$

Also

$$\frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}} \rightarrow \frac{1}{\pi^2 c^3} \int_0^\infty \omega^2 d\omega$$

$$E_{\mathbf{k}} = \hbar\omega$$

$$\frac{\langle \hat{H} \rangle}{V} = \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}\nu} E_{\mathbf{k}} \bar{n}_{\mathbf{k}\nu} \rightarrow \int_0^\infty \epsilon(\omega) d\omega \sim (k_B T)^4$$

wobei wegen (IV.6.9):

$$\epsilon(\omega) = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3} \frac{1}{\exp(\hbar\omega/k_B T) - 1}$$

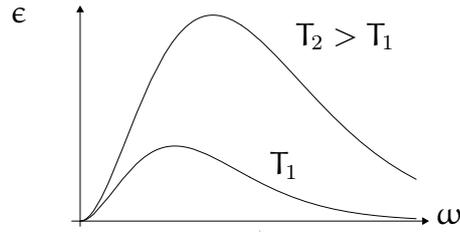


Abbildung IV.6.: Energiedichte für Bosonen

IV.7. Bell-Zustände und „Quanten-Mirakel“

IV.7.1. Operator-Darstellungen in SU(2)

Literatur: G. Mahler, Quantum Networks, S. 114

Die Übergangsoperatoren $P_{jj'} = |j\rangle\langle j'|$ $j = 1, 2, \dots, n$ bilden eine orthonormierte Basis:

$$\hat{P}_{kk'}^\dagger = \hat{P}_{k'k}, \quad \text{Spur}\{\hat{P}_{jj'}\hat{P}_{kk'}^\dagger\} = \delta_{jk}\delta_{j'k'}$$

Jeder Operator ist im n^2 -dimensionalen Liouville-Raum darstellbar als:

$$\begin{aligned} \hat{\rho} &= \sum_{j,j'} \rho_{jj'} \hat{P}_{jj'} \\ \rho_{jj'} &= \text{Spur}\{\hat{\rho} \hat{P}_{jj'}\} \end{aligned} \quad (\text{IV.7.1})$$

Speziell für $n = 2$ sind als Entwicklungsoperatoren alternativ die (unitären) **Pauli-Matrizen**

$$\hat{\sigma}_j^\dagger = \hat{\sigma}_j \quad \hat{\sigma}_j^\dagger \hat{\sigma}_j = \hat{1} \quad \hat{\sigma}_0 = \hat{1} \quad (\text{IV.7.2})$$

sehr praktisch. Es gilt ($i, j = 1, 2, 3$):

$$\text{Spur}\{\hat{\sigma}_i \hat{\sigma}_j\} = 2\delta_{ij} \quad \text{Spur}\{\hat{\sigma}_i\} = 0 \quad (i \neq 0) \quad (\text{IV.7.3})$$

Die Summe der Eigenwerte von $\hat{\sigma}_j$ ist demnach ebenfalls gleich Null. Darstellung des Dichteoperators:

$$\hat{\rho} = \frac{1}{2} \sum_{j=0}^3 \sigma_j \hat{\sigma}_j \quad (\text{IV.7.4})$$

Bloch-Vektor:

$$\sigma_j = \text{Spur}\{\hat{\rho} \hat{\sigma}_j\} \quad (\text{IV.7.5})$$

Für $N = 2, n = 2$:

$$\hat{Q}_{ij} \equiv \hat{\sigma}_i(1) \otimes \hat{\sigma}_j(2) \quad (i, j = 0, 1, 2, 3) \quad (\text{IV.7.6})$$

Der Dichteoperator lässt sich somit darstellen als:

$$\hat{\rho} = \frac{1}{4} \sum_{i,j=0}^3 Q_{ij} \hat{Q}_{ij} \quad (\text{IV.7.7})$$

IV. Zustandsmodelle

mit

$$Q_{ij} = \text{Spur}\{\hat{\rho}\hat{\sigma}_i \otimes \hat{\sigma}_j\} \quad (\text{IV.7.8})$$

$$Q_{i0} = \text{Blochvektor System 1: } \sigma(1)$$

$$Q_{0j} = \text{Blochvektor System 2: } \sigma(2)$$

$$Q_{00} = 1$$

$$Q_{ij} \quad (i, j = 1, 2, 3): \text{ Spin-Spin-Korrelationsmatrix } \mathcal{K}$$

Für $N = 3$, $n = 2$:

$$\begin{aligned} \hat{Q}_{ijk} &= \hat{\sigma}_i(1) \otimes \hat{\sigma}_j(2) \otimes \hat{\sigma}_k(3) \\ \hat{\rho} &= \frac{1}{8} \sum_{i,j,k=0}^3 Q_{ijk} \hat{Q}_{ijk} \end{aligned} \quad (\text{IV.7.9})$$

Für beliebiges, endliches N und $n = 2$ ist folgender Ausdruck eine Invariante unter unitärer Transformation (vgl. (IV.1.8)):

$$C(2) = \text{Spur}\{\hat{\rho}^2\} = \frac{1}{2^N} \sum_{i,j,k,\dots} Q_{ijk\dots}^2 \leq 1 \quad (\text{IV.7.10})$$

Reiner Zustand („Summenregel“):

$$\boxed{\sum_{i,j,k,\dots} Q_{ijk\dots}^2 = 2^N} \quad (\text{IV.7.11})$$

IV.7.2. Bell-Zustände ($N=2$)²

$$\begin{aligned} |\Phi_{1,2}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} [|11\rangle \pm |22\rangle] \\ |\Phi_{3,4}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} [|12\rangle \pm |21\rangle] \end{aligned} \quad (\text{IV.7.12})$$

Eigenschaften:

- vollständige orthonormale Basis: $\langle \Phi_i | \Phi_k \rangle = \delta_{ik}$
- Bloch-Vektoren (vgl. (IV.7.5)): $\sigma(1) = \sigma(2) = 0$, Unschärfe: $(\Delta \hat{\sigma}_i)^2 = 1 - \hat{\sigma}_j^2 = 1$
Die lokalen Eigenschaften sind maximal unscharf!
- Eigenwerte (Zwei-Teilchen-Operatoren): $Q_{11}^2 = Q_{22}^2 = Q_{33}^2 = 1$
Quadrate: $\sum_{i,j} Q_{ij}^2 = Q_{00}^2 + Q_{11}^2 + Q_{22}^2 + Q_{33}^2 = 4$ (vgl. (IV.7.11))
- $|\Phi_i\rangle \rightarrow |\Phi_j\rangle$ durch lokale unitäre Transformationen!
- Transformationen zwischen Produktbasis und Bell-Basis sind dagegen nichtlokal.

²X-states: cf. arXiv 0803.0406

Optische Bell-Messung

Vgl. Zwei-Photon-Interferometrie aus Kapitel III.9: Ersetze die zwei Subsysteme, klassifiziert nach $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2$ durch die Polarisierungen $j = 1, 2$.

Es sei $\alpha_j = 0$, und die lineare Transformation $\mathcal{B} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}$

$$|\Psi^{\text{in}}(12)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|1(1), 2(2)\rangle + |2(1), 1(2)\rangle] = |\Phi_3\rangle$$

$\begin{aligned} I_{21}^{(21)} &= I_{12}^{(21)} = 0 \\ I_{11}^{(21)} &\sim \frac{1}{2} \\ I_{22}^{(21)} &\sim \frac{1}{2} \end{aligned}$
--

$$|\Psi^{\text{in}}(12)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|1(1), 1(2)\rangle + |2(1), 2(2)\rangle] = |\Phi_1\rangle$$

$\begin{aligned} I_{21}^{(21)} &\sim \frac{1}{2} \\ I_{12}^{(21)} &\sim \frac{1}{2} \\ I_{11}^{(21)} &= I_{22}^{(21)} = 0 \end{aligned}$
--

Die Zustände $|\Phi_1\rangle$ und $|\Phi_3\rangle$ sind unterscheidbar.

Vergleiche S. Braunstein et al, PRA **51**, R1727, dort mit der linearen Transformation

$$\mathcal{B} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Beweis:

$$|\Psi^{\text{in}}\rangle = |\Phi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [\hat{a}_2^\dagger(2) \hat{a}_2^\dagger(1) + \hat{a}_1^\dagger(2) \hat{a}_1^\dagger(1)] |0\rangle$$

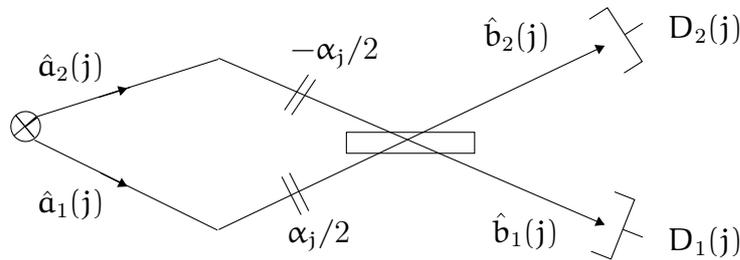


Abbildung IV.7.: Optische Bell-Messung ($j = 1, 2$)

IV. Zustandsmodelle

Entsprechend (III.9.8):

$$\begin{aligned}
 \hat{b}_n(2)\hat{b}_m(1) |\Psi^{\text{in}}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} [B_{n2}(2)B_{m2}(1) + B_{n1}(2)B_{m1}(1)] |0\rangle \\
 \hat{b}_2(2)\hat{b}_1(1) |\Psi^{\text{in}}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\beta/2}\right) \left(\frac{i}{\sqrt{2}} e^{-i\alpha/2}\right) + \left(\frac{i}{\sqrt{2}} e^{i\beta/2}\right) \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\alpha/2}\right) \right] |0\rangle \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[-\frac{i}{2} e^{-i(\alpha+\beta)/2} - \frac{i}{2} e^{i(\alpha+\beta)/2} \right] |0\rangle \\
 &= -\frac{i}{\sqrt{2}} \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) |0\rangle = -\frac{i}{\sqrt{2}} |0\rangle
 \end{aligned}$$

und analog für den komplex konjugierten Ausdruck.

IV.7.3. GHZ-Zustände (N = 3)

In Verallgemeinerung zu den Bell-Zuständen (vgl. (IV.7.12)):

$$\begin{aligned}
 |\Psi_{1,2}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} [|111\rangle \pm |222\rangle] \\
 |\Psi_{3,4}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} [|112\rangle \pm |221\rangle] \\
 |\Psi_{5,6}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} [|121\rangle \pm |212\rangle] \\
 |\Psi_{7,8}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} [|211\rangle \pm |122\rangle]
 \end{aligned} \tag{IV.7.13}$$

Eigenschaften:

a. vollständige orthogonale Basis:

$$\langle \phi_i | \phi_j \rangle = \delta_{ij}$$

b. Lokale Eigenschaften maximal unscharf: Blochvektor

$$\boldsymbol{\sigma}(1) = \boldsymbol{\sigma}(2) = \boldsymbol{\sigma}(3) = 0$$

c. Eigenwerte (Zwei-Teilchen-Operatoren):

$$Q_{330}^2 = Q_{303}^2 = Q_{033}^2 = 1$$

d. sowie Eigenwerte (Drei-Teilchen-Operatoren):

$$Q_{122}^2 = Q_{212}^2 = Q_{221}^2 = Q_{111}^2 = 1$$

(d. h. entspr. Summenregel (IV.7.11), $\sum_{ijk} Q_{ijk}^2 = 8$). Die Operatoren zu den Eigenwerten gemäß c und d kommutieren alle untereinander.

Experiment: Bouwmeester, PRL **82**, 1345 (1999)

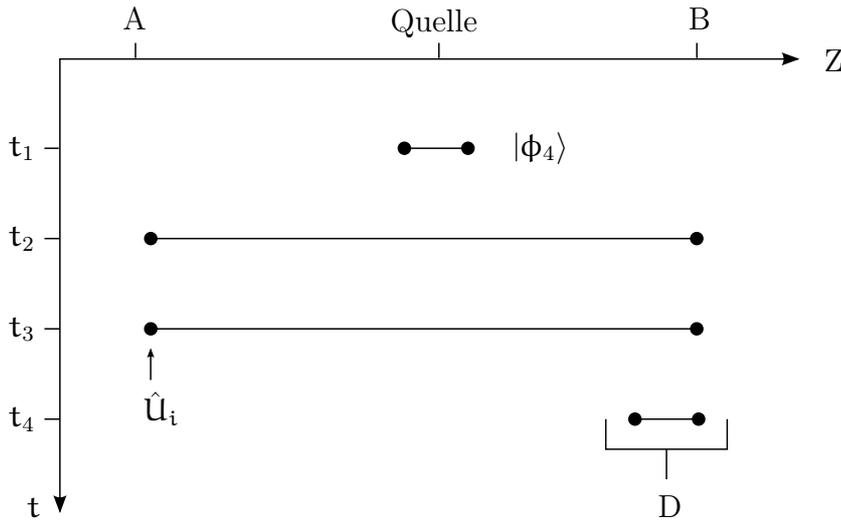


Abbildung IV.8.: Protokoll 1

IV.7.4. Anwendungen

„Dense Coding“ (N = 2)

Theorie: Bennett, PRL **69**, 2881 (1992), Experiment: Mattle, PRL **76**, 4656 (1996)

Der Polarisationsraum eines Photons kann höchstens ein Bit an Information übertragen. Man wählt die Codierung $|\uparrow\rangle = 0$ und $|\downarrow\rangle = 1$.

These: Diese Informationsübertragung lässt sich über Verschränkung (entanglement) verdoppeln.

Protokoll 1: vgl. (IV.7.13) sowie Abb. IV.8. Quelle:

$$|\phi_4\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|12\rangle - |21\rangle]$$

Der **Sender A** („Alice“) wählt eine von vier möglichen lokalen unitären Transformationen $\hat{U}_j(1)$ bezüglich Spin 1 aus.

Unitäre Pauli-Operatoren:

$$\hat{\sigma}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad |1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Möglichkeiten:

a. $|\phi_4\rangle \longrightarrow i|\phi_1\rangle : \quad \hat{U}(1) = \hat{\sigma}_2$

$$\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

IV. Zustandsmodelle

b. $|\phi_4\rangle \longrightarrow i|\phi_2\rangle : \quad \hat{U}(1) = \hat{\sigma}_1$

c. $|\phi_4\rangle \longrightarrow i|\phi_3\rangle : \quad \hat{U}(1) = \hat{\sigma}_3$

Der **Empfänger B** („Bob“) macht eine Bell-Messung, nachdem er Photon von **A** erhalten hat.

Quantenteleportation (N = 3)

Ziel: Teleportierung eines unbekanntes Zustands von Ort A zu Ort B. Notwendig hierzu ist die Übertragung von zwei Bit klassischer Information. Als Ressource dient ein Bell-Zustand (Verschränkung).

Protokoll 2: Sei (vgl. Abb. IV.9)

$$|\chi(1)\rangle = \mathbf{b}|1(1)\rangle + \mathbf{a}|2(1)\rangle \quad (\text{IV.7.14})$$

$$\begin{aligned} |\chi(123)\rangle &= |\chi(1)\rangle \otimes |\phi_4(23)\rangle \quad \leftarrow (\text{IV.7.12}) \\ &= \frac{\mathbf{a}}{\sqrt{2}}|212\rangle - \frac{\mathbf{a}}{\sqrt{2}}|221\rangle + \frac{\mathbf{b}}{\sqrt{2}}|112\rangle - \frac{\mathbf{b}}{\sqrt{2}}|121\rangle \end{aligned} \quad (\text{IV.7.15})$$

Partitionswechsel (analog Darstellungswechsel)

$$(1)(23) \quad \boxed{|\Psi(123)\rangle = \sum_{j,k} \mathbf{d}_{j,k} |j(1)\rangle \otimes |\phi_k(2,3)\rangle} \quad (\text{IV.7.16})$$

$$\mathbf{d}_{14} = \mathbf{a}/\sqrt{2} \quad \mathbf{d}_{24} = \mathbf{b}/\sqrt{2}$$

$$(12)(3) \quad \boxed{|\Psi(123)\rangle = \sum_{j,k} \mathbf{f}_{j,k} |\phi_j(1,2)\rangle \otimes |k(3)\rangle} \quad (\text{IV.7.17})$$

$$\begin{aligned} -\mathbf{f}_{11} = \mathbf{f}_{21} = \mathbf{f}_{32} = -\mathbf{f}_{42} &= \mathbf{a}/2 \\ \mathbf{f}_{12} = \mathbf{f}_{22} = -\mathbf{f}_{31} = -\mathbf{f}_{41} &= \mathbf{b}/2 \end{aligned} \quad (\text{IV.7.18})$$

In (IV.7.17) ist die Information (a,b) anders verteilt als in (IV.7.16), jedoch nach wie vor vorhanden! Beweis:

Beachte: $|\phi_1(12)\rangle \otimes |1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|111\rangle + |221\rangle] \quad (\text{a})$

$|\phi_2(12)\rangle \otimes |1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|111\rangle + |221\rangle] \quad (\text{b})$

$|\phi_1(12)\rangle \otimes |2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|112\rangle + |222\rangle] \quad (\text{c})$

$|\phi_2(12)\rangle \otimes |2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|112\rangle + |222\rangle] \quad (\text{d})$

$|\phi_3(12)\rangle \otimes |1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|121\rangle + |211\rangle] \quad (\text{e})$

$|\phi_4(12)\rangle \otimes |1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|121\rangle + |211\rangle] \quad (\text{f})$

$|\phi_3(12)\rangle \otimes |2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|122\rangle + |212\rangle] \quad (\text{g})$

$|\phi_4(12)\rangle \otimes |2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|122\rangle + |212\rangle] \quad (\text{h})$

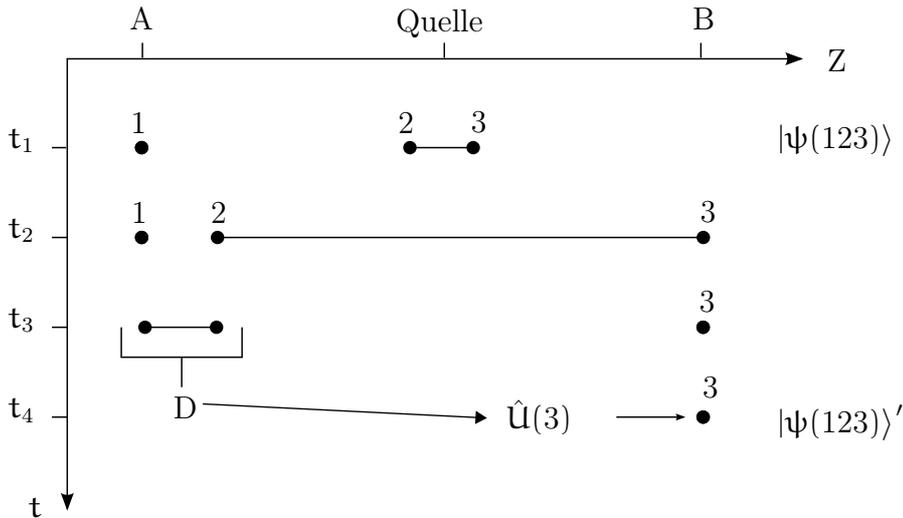


Abbildung IV.9.: Protokoll 2

Durch paarweise Addition bzw. Subtraktion und anschließendes Multiplizieren mit den Faktoren $\pm \frac{a}{2}$ bzw. $\pm \frac{b}{2}$ erhält man wieder den Zustand $|\Psi(123)\rangle$ aus (IV.7.17), qed. Eine andere Schreibweise von (IV.7.17) ist:

$$\begin{aligned}
 |\Psi_1(123)\rangle &= \frac{1}{2} |\Phi_1(12)\rangle [-a|1\rangle + b|2\rangle] \\
 &+ \frac{1}{2} |\Phi_2(12)\rangle [+a|1\rangle + b|2\rangle] \\
 &+ \frac{1}{2} |\Phi_3(12)\rangle [-b|1\rangle + a|2\rangle] \\
 &+ \frac{1}{2} |\Phi_4(12)\rangle [-b|1\rangle - a|2\rangle]
 \end{aligned} \tag{IV.7.19}$$

Strategie:

A	→	lokale Trafo	B
Messe $ \Phi_1(12)\rangle$	→	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}$	$= \chi(3)\rangle$
$ \Phi_2(12)\rangle$	→	$\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}$	$= i \chi(3)\rangle$
$ \Phi_3(12)\rangle$	→	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}$	$= \chi(3)\rangle$
$ \Phi_4(12)\rangle$	→	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}$	$= \chi(3)\rangle$ (IV.7.20)

Das Messergebnis von A ist notwendig, um B die „richtige“ lokale Transformation mitzuteilen.

„**No-Cloning**“: Der ursprüngliche Zustand von Teilchen 1 ist nach der Übertragung auf Teilchen 3 zerstört (rein gemischt), also ohne Information über die Amplituden a und b!

Literatur:

Bennett et al, PRL **70**, 1895 (1993)

A. Zeilinger, Sci. Am. April 2000, S. 32

„**Entanglement Swapping**“ (N = 4)

Verschränkung ist typischerweise das Ergebnis von Wechselwirkung, vgl. die Zwei-Photon-Quellen!

These: Durch Mess-Projektion lässt sich Verschränkung nicht-lokal „verschieben“. Es werden Subsysteme verschränkt, die **nie** direkt miteinander in Wechselwirkung standen.

Protokoll 3: (vgl. Abb. IV.10)

$$|\Psi(t_1)\rangle = |\phi_4(12)\rangle \otimes |\phi_4(34)\rangle \quad \text{vgl. (IV.7.12)}$$

Der Partitionswechsel ist ein Darstellungswechsel, die Bell-Zustände bilden vollständige orthogonale Basissysteme in ihrem jeweiligen Zeit-Teilchen-Unterraum.

$$\begin{aligned} |\Psi(1234)\rangle &= \sum_{ij} d_{ij} |\phi_i(12)\rangle \otimes |\phi_j(34)\rangle \\ &= \sum_{kl} f_{kl} |\phi_k(14)\rangle \otimes |\phi_l(23)\rangle \end{aligned} \quad \text{(IV.7.21)}$$

Zur Zeit t_1 :

$\begin{aligned} &d_{44} = 1 && d_{ij} = 0 \quad \text{sonst} \\ \implies &f_{11} = f_{44} = -1/2 && f_{22} = f_{33} = 1/2 \end{aligned}$	(IV.7.22)
---	-----------

Beweis: Es ist einerseits

$$\begin{aligned} |\phi_4(12)\rangle \otimes |\phi_4(34)\rangle &= \frac{1}{2} [|12..\rangle - |21..\rangle] \otimes [|..12\rangle - |..21\rangle] \\ &= \frac{1}{2} [|1212\rangle - |1221\rangle - |2112\rangle + |2121\rangle] \end{aligned} \quad \text{(IV.7.23)}$$

Andererseits:

$$\begin{aligned} &|\phi_1(14)\rangle \otimes |\phi_1(23)\rangle; |\phi_2(14)\rangle \otimes |\phi_1(23)\rangle : \\ &\frac{1}{2} [|1..1\rangle + |2..2\rangle] \otimes [|..11\rangle + |..22\rangle] = \frac{1}{2} [|1111\rangle + |1221\rangle - |2112\rangle + |2222\rangle] \end{aligned} \quad \text{(IV.7.24a)}$$

$$\frac{1}{2} [|1..1\rangle - |2..2\rangle] \otimes [|..11\rangle + |..22\rangle] = \frac{1}{2} [|1111\rangle + |1221\rangle - |2112\rangle + |2222\rangle] \quad \text{(IV.7.24b)}$$

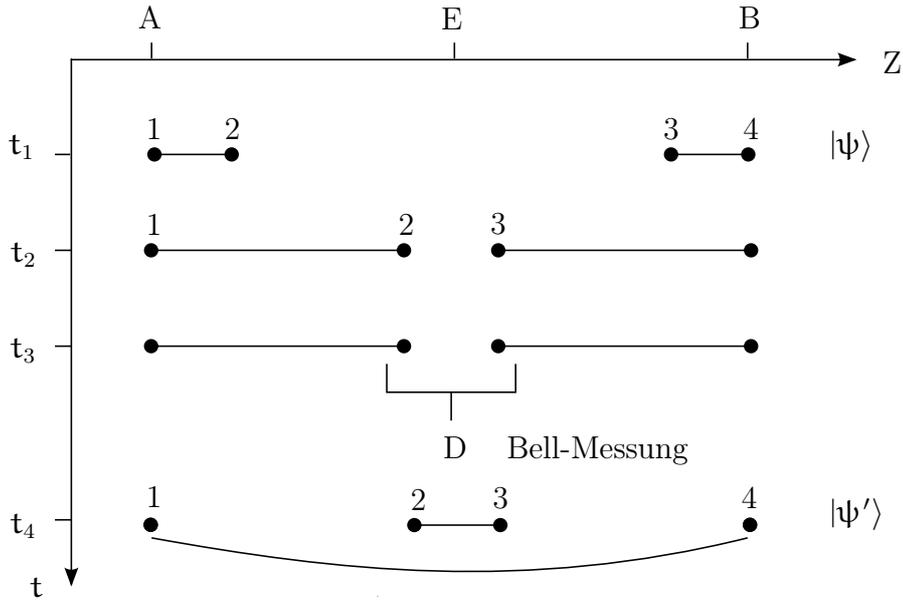


Abbildung IV.10.: Protokoll 3

$$\begin{aligned}
 & |\phi_3(14)\rangle \otimes |\phi_3(23)\rangle; |\phi_4(14)\rangle \otimes |\phi_4(23)\rangle : \\
 & \frac{1}{2} [|1..2\rangle \pm |2..1\rangle] \otimes [|.12.\rangle \pm |.21.\rangle] = \frac{1}{2} [|1122\rangle \pm |1212\rangle \pm |2121\rangle + |2211\rangle] \\
 & \hspace{20em} \text{(IV.7.24c)}
 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
 & - |\phi_1(14)\rangle \otimes |\phi_1(23)\rangle + |\phi_2(14)\rangle \otimes |\phi_2(23)\rangle \\
 & + |\phi_3(14)\rangle \otimes |\phi_3(23)\rangle - |\phi_4(14)\rangle \otimes |\phi_4(23)\rangle = 2 \cdot \text{(IV.7.23)} \sqrt{}
 \end{aligned}$$

Wenn zur Zeit t_3 eine Bell-Messung an den Punkten 2 und 3 durchgeführt wird, befinden sich 1 und 4 im gleichen Bell-Zustand! („action at a distance“)

Experiment nach Jennewein, PRL **88** 071903 (1992): Bell-Messungen sind mittels linearer Optik nur begrenzt möglich. Siehe auch:

Pan, PRL **80**, 3851 (1998); Kritik P. Kok, quant-ph/9907016

„Delayed Choice“ for Entanglement Swapping

Literatur: A. Peres, J.mod.Optics **47**, 139 (2000)

Ergänze Schema 3: Zur Zeit t_3 werden lokale Messungen von A an Teilchen 1 bzw. von B an Teilchen 4 durchgeführt. Die Daten sind in Übereinstimmung mit dem Bell-Zustand, welcher durch die Bell-Messung durch E eingestellt wurde.

Behauptung: Die Reihenfolge der lokalen und der Bell-Messung ist vertauschbar.

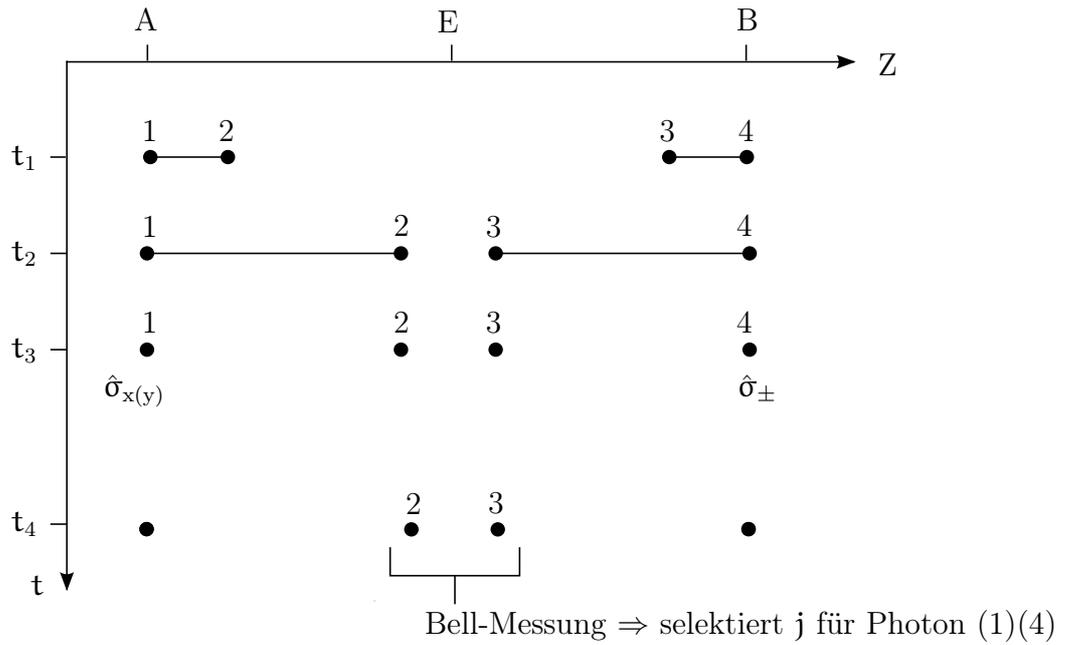


Abbildung IV.11.: Protokoll 4

Protokoll 4: (vgl. Abb. IV.11) Nun gilt (Korrelation lokaler Messungen):

$$\hat{\sigma}_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{\sigma}_x \pm \hat{\sigma}_y)$$

$$\langle \phi_j(14) | \hat{\sigma}_x(1) \otimes \hat{\sigma}_{\pm}(4) | \phi_j(14) \rangle = \begin{cases} +\frac{1}{\sqrt{2}}, & j = 1, 3 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}, & j = 2, 4 \end{cases} \quad (\text{IV.7.25})$$

$$\langle \phi_j(14) | \hat{\sigma}_y(1) \otimes \hat{\sigma}_{\pm}(4) | \phi_j(14) \rangle = \begin{cases} \pm\frac{1}{\sqrt{2}}, & j = 1, 3 \\ \mp\frac{1}{\sqrt{2}}, & j = 2, 4 \end{cases} \quad (\text{IV.7.26})$$

Peres behauptet: Diese lokalen Messungen sind in Übereinstimmung mit der „zukünftigen“ Bell-Messung j an (2,3). Ist dies paradox? Die Bell-Messung (2,3) und die lokalen Messungen (1) und (4) sind konsistent. Was man zuerst misst, schränkt die Messergebnisse der späteren Messung ein. Die Reihenfolge ist beliebig. Vergleiche auch das Experiment in PRL **88**, 017903 (2002)

IV.8. Bell-Ungleichung und Quantenkryptographie

IV.8.1. Paradoxon von Einstein-Podolski-Rosen (EPR)

Literatur:

J. Audretsch, K. Mainzer: Wie viele Leben hat Schrödingers Katze?
BI, Mannheim, 1990

A.J. Leggett, Physik, Birkhäuser 1989

A. Aspect et al, PRL **49**, 91 (1982)

A. Einstein, B. Podolski, W. Rosen, PR **47**, 777 (1935)

F. Selleri, Die Debatte um die Quantentheorie, Vieweg 1983

Formulierung des Paradoxons für zwei Spins: Betrachte den Singulett-Zustand (vgl. (IV.7.12))

$$|\phi_4\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|21\rangle - |12\rangle]$$

Lokale Einzelmessungen (Spins 1 und 2 weit voneinander entfernt):

$$\begin{aligned} \sigma_1^{(1)} = 1 &\implies \sigma_1^{(2)} = -1 \\ \sigma_3^{(1)} = 1 &\implies \sigma_3^{(2)} = -1 \end{aligned}$$

Bei einer Messung von Spin 1 gibt es keinen physikalischen Effekt auf Spin 2, d. h. die Werte $\sigma_1^{(2)}$ und $\sigma_3^{(2)}$ müssen bereits *vor* der Messung existiert haben! Dies bedeutet einen Widerspruch zur Quantenmechanik, welche somit unvollständig wäre!

These: Lokaler Realismus (objektiv lokale Theorie)

- Mögliche Messwerte sind $\sigma_i^{(\mu)} = m_i^{(\mu)}$ mit den Eigenwerten $m_i^{(\mu)} = \pm 1$ auch bei beliebigen Messwinkeln.
- Alle lokalen Eigenschaften $m_i^{(\mu)}$ liegen fest, sind aber unbekannt (versteckte Parameter). Für diese Werte gibt es eine klassische Statistik $f(m_i^{(\mu)})$.
- $f(m_i^{(\mu)})$ erklärt auch alle Mehrpunkt-Korrelationen $K_{ij} = \overline{m_i^{(1)} m_j^{(2)}}$ usw., diese sind somit reduzibel, da sie dann verallgemeinerten Korrelationen $C(\theta_1, \theta_2)$ entsprechen (in der Quantenmechanik ist $K_{ij} = \langle \hat{\sigma}_i(1) \hat{\sigma}_j(2) \rangle$).

IV.8.2. Bell-Ungleichung

Realisierung: Spin $j = 1, 2 \hat{=} \text{Photon-Polarisation}$. Träger durch Photonenpaare (Ausbreitung längs der z-Achse)

	Polarisation (xy-Ebene) \longrightarrow Spin
$i = 1$	lineare Polarisierung ($0^\circ/90^\circ$) \longrightarrow Observable $\hat{\sigma}_1$
$i = 2$	lineare Polarisierung ($45^\circ/135^\circ$) \longrightarrow Observable $\hat{\sigma}_3$
$i = 3$	zirkular (Uhrzeiger/ gegen Uhrzeiger) \longrightarrow Observable $\hat{\sigma}_2$

Der Beweis folgt durch die Beziehung der Eigenzustände untereinander (Nun statt $i = 1, 2, 3 \quad j = 1, 2, 3; \quad \theta_1 = \alpha_1, \alpha_3; \theta_2 = \alpha_2, \alpha_4$). Betrachte nun:

$$\boxed{s \equiv m_{\alpha_1}^{(1)} m_{\alpha_2}^{(2)} + m_{\alpha_3}^{(1)} m_{\alpha_2}^{(2)} + m_{\alpha_3}^{(1)} m_{\alpha_4}^{(2)} - m_{\alpha_1}^{(1)} m_{\alpha_4}^{(2)}} \quad (\text{IV.8.1})$$

Für alle möglichen Messwerte Z_j mit $j = 1, 2, \dots, 2^4$

$$Z_j = \{m_{\alpha_1}^{(1)}, m_{\alpha_3}^{(1)}, m_{\alpha_2}^{(2)}, m_{\alpha_4}^{(2)}\} = \{\pm 1, \pm 1, \pm 1, \pm 1\} \quad (\text{IV.8.2})$$

ist $s(Z_j) = \pm 2$!

Lokaler Realismus: Es existiert eine Wahrscheinlichkeit $f(Z)$ derart, dass im Mittel

$$\bar{s} = \sum_j f(Z_j) s(Z_j)$$

$$\boxed{|\bar{s}| \leq 2} \quad (\text{IV.8.3})$$

Nun ist aber in der Quantenmechanik für den Singulettzustand $|\phi_4\rangle$ (vgl. (IV.3.1):

$$C(\theta_1, \theta_2) \equiv \langle \hat{A}_{\theta_1}(1) \hat{A}_{\theta_2}(2) \rangle = -\cos(\theta_1 - \theta_2) \quad (\text{IV.8.4})$$

wobei

$$\hat{A}_\theta(\mu) = \hat{\sigma}_1(\mu) \sin \theta + \hat{\sigma}_3(\mu) \cos \theta \quad (\text{IV.8.5})$$

Für die Summe von Korrelationsfunktionen entsprechend (IV.8.1)

$$s = C(\alpha_1, \alpha_2) + C(\alpha_3, \alpha_2) + C(\alpha_3, \alpha_4) - C(\alpha_1, \alpha_4)$$

gilt mit

$$\alpha_1 - \alpha_2 = \alpha_2 - \alpha_3 = \alpha_3 - \alpha_4 = \varphi$$

$$s(\rho) = 3 \cos \rho - \cos(3\rho)$$

$$\boxed{\rho = \frac{\pi}{4} \implies s(\rho) = 2\sqrt{2}} \quad (\text{IV.8.6})$$

im Widerspruch zu (IV.8.3).

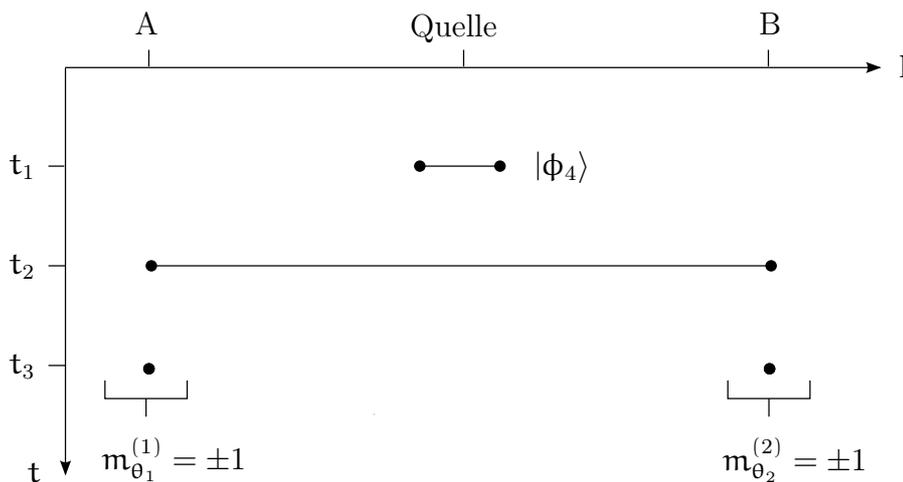


Abbildung IV.12.: Protokoll zur Bell-Messung

Die Konsequenzen hieraus sind:

- Die lokale objektive Theorie ist nicht verträglich mit der Quantenmechanik!
- Das Experiment bestätigt die Quantenmechanik.
- Im verschränkten Zustand sind Eigenschaften von einzelnen Spins keine Elemente der Realität, da inkompatibel mit den Eigenschaften des gesamten Systems!
- Die Nichtlokalität ist nach der Messung zerstört, lokale Eigenschaften existieren wieder! Für Produktzustände gilt (IV.8.3).

IV.8.3. Anwendung: Quantenkryptographie

Literatur:

Ekert, PRL **67**, 661 (1991)

Tapster, PRL **73**, 1923 (1994) Experiment; Sci. Am. Oct 1992, S. 50

Das Ziel sei die Übermittlung geheimer Botschaften zwischen A und B, die Methode der Wahl beruht auf Verschlüsselung. Das Problem ist jedoch der Schutz des Schlüssels. Wie lässt sich der Schlüssel sicher vereinbaren?

Idee: Verschicke Spin-Paare. Jede unerlaubte Messung an einem Einzelspin zerstört eine vorher vorhandene Verschränkung mit dem zweiten Spin. Die Bell-Ungleichung ist dann nicht mehr verletzt. Dies ist nachprüfbar.

IV. Zustandsmodelle

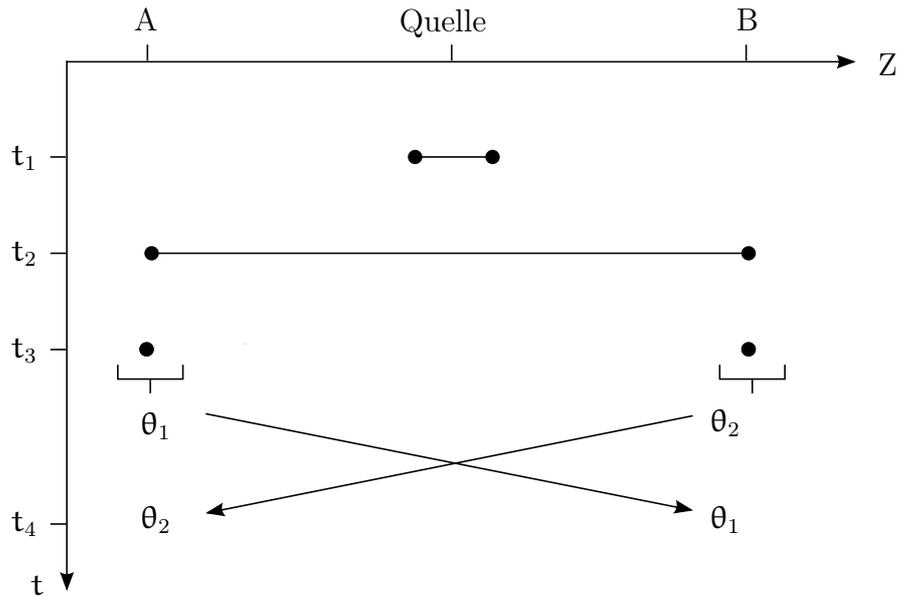


Abbildung IV.13.: Protokoll Quantenkryptographie

„Protokoll“: vgl. Abb. IV.13. Zufällig zu wählen sind die Winkel θ_1, θ_2 aus den diskreten Mengen:

$$\theta_1 = \{\alpha_1, \alpha_3, \alpha_5\} = \left\{0, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right\}$$

$$\theta_2 = \{\alpha_2, \alpha_4, \alpha_6\} = \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right\}$$

Zum Zeitpunkt t_4 findet die gegenseitige Mitteilung der Winkelwahl statt, ohne die zugehörigen Messergebnisse. Bei t_5 erfolgt die Gruppierung der Messergebnisse in Abhängigkeit von den gewählten Winkeln:

- Gruppe 1: $(\alpha_1, \alpha_2), (\alpha_1, \alpha_2), (\alpha_3, \alpha_2), (\alpha_1, \alpha_4)$: „Abstand“ $\frac{\pi}{4}$
 Gruppe 2: $(\alpha_5, \alpha_2), (\alpha_3, \alpha_6)$ „Abstand“ 0
 Gruppe 3: Rest (verworfen)

Zu t_6 schließlich werden die Messergebnisse zu Gruppe 1 ausgetauscht, d. h. jeder Teilnehmer A,B verfügt über alle paarweisen Messdaten. Aus diesen kann jeder $|s|$ ausrechnen, gemittelt über viele Messdaten.

Bell-Test:

$$|s| = |C(\alpha_1, \alpha_2) + C(\alpha_3, \alpha_2) + C(\alpha_3, \alpha_4) - C(\alpha_1, \alpha_4)|$$

- a. $|s| \approx 2\sqrt{2}$
 b. $|s| < 2\sqrt{2}$: Abhörversuche wahrscheinlich!

Im ersten Fall, d. h. wenn der Test positiv verläuft, benutzt man zum Zeitpunkt t_7 die Sequenz aus Gruppe 2 als Schlüssel:

$$\begin{array}{r} \text{A} \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \\ \hline \text{B} \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \end{array} \text{ Anti-Korrelation!}$$

B erhält den identischen Schlüssel zu A durch „Flip“: $0 \leftrightarrow 1$. Sendung einer geheimen Botschaft mit einem „one-time-pad“

$$\begin{array}{r} \text{Schlüssel von A:} \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \\ \text{Botschaft von A:} \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \\ \hline \text{Sende an B:} \quad \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \end{array} \text{ Addiere Modulo 2}$$

$$\begin{array}{r} \text{Schlüssel von B:} \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \\ \hline \text{Botschaft an B:} \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \end{array} \text{ Addiere Modulo 2}$$

IV.8.4. GHZ-Zustände (N = 3) und lokaler Realismus

Literatur: Mermin, Phys. Today, June 1990, S. 9

Wähle

$$|\phi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|111\rangle - |222\rangle]$$

Vgl. (IV.7.3). $|\phi_2\rangle$ ist speziell ein Eigenzustand zu $\hat{Q}_{122}, \hat{Q}_{212}, \hat{Q}_{221}, \hat{Q}_{111}$ ($, \hat{Q}_{033}, \hat{Q}_{303}, \hat{Q}_{230}$) mit den Eigenwerten

$$K_{122} = K_{212} = K_{221} = 1, \quad K_{111} = -1 \quad (\text{IV.8.7})$$

Zur Definition der \hat{Q}_{ijk} vergleiche Kapitel IV.7.1.

Nach der lokalen objektiven Theorie müsste gelten:

$$\begin{aligned} K_{122} &= m_1^{(1)} m_2^{(2)} m_2^{(3)} \\ K_{212} &= m_2^{(1)} m_1^{(2)} m_2^{(3)} \\ K_{122} &= m_2^{(1)} m_2^{(2)} m_1^{(3)} \end{aligned} \quad (\text{IV.8.8})$$

Diese K_{ijk} sind schwankungsfrei, d. h. keine Mittelung notwendig!

Da immer $(m_2^{(\mu)})^2 = 1$ gilt, muss sein:

$$1 = K_{122} \cdot K_{212} \cdot K_{221} = m_1^{(1)} \cdot m_1^{(2)} \cdot m_1^{(3)} = K_{111} \quad (\text{IV.8.9})$$

Da nach (IV.8.7) aber $K_{111} = -1$ ist, führen die Annahmen der lokal objektiven Theorie zum Widerspruch in jeder einzelnen Messung!